1. SUCCESSIONI ESATTE

Una *successione esatta corta di spazi vettoriali*

$$0 \to U \overset{F}{\to} V \overset{G}{\to} W \to 0 \tag{1}$$

è il dato di una applicazione lineare *iniettiva* F e di una *suriettiva* G tali che

$$\ker G = \operatorname{Im} F$$

In particolare si ha $U \cong \operatorname{Im} F = \ker G$, $W = \operatorname{Im} G$. Dunque, data una successione esatta corta come sopra, si ha

$$\dim V = \dim U + \dim W\,.$$

Un successione di applicazioni lineari

$$V_1 \overset{F_1}{\to} V_2 \overset{F_2}{\to} V_3 \to \cdots \overset{F_{n-1}}{\to} V_n$$

si dice esatta se

$$\operatorname{Im} F_{i-1} = \ker F_i\,, \quad i = 2, \dots, n-1\,. \tag{2}$$

Quando F_1 è iniettiva e F_{n-1} è suriettiva si scrive

$$0 \to V_1 \overset{F_1}{\to} V_2 \overset{F_2}{\to} V_3 \to \cdots \overset{F_{n-1}}{\to} V_n \to 0 \tag{3}$$

Esempio 1.1. Consideriamo la successione esatta

$$0 \to V_1 \overset{F_1}{\to} V_2 \overset{F_2}{\to} V_3 \overset{F_3}{\to} V_4 \to 0\,;$$

indichiamo con $U = \ker F_3 = \operatorname{Im} F_2$ e con $i \colon U \to V_3$ il morfismo di inclusione. Allora la precedente successione si *spezza* in due successioni esatte corte

$$0 \to V_1 \overset{F_1}{\to} V_2 \overset{F_2}{\to} U \to 0$$

$$0 \to U \overset{i}{\to} V_3 \overset{F_3}{\to} V_4 \to 0$$

e quindi

$$\dim V_3 = \dim V_4 + \dim U, \qquad \dim V_2 = \dim V_1 + \dim U,$$

da cui ricaviamo

$$\dim V_3 - \dim V_4 = \dim V_2 - \dim V_1.$$

Esercizio 1. Data la successione esatta (**??**) dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$$

Università di Roma 1: a.a. 2007-07, corso di Geometria Analitica, E.A., M.M. e A.F.

2. QUOZIENTI

Sia U un sottospazio di V. Si consideri in V la relazione

$$w \sim v \iff w - v \in U$$

È immediato verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Si denota l'insieme quoziente $V/\sim$ con il simbolo V/U. Dato $v \in V$ si denota con $\overline{v}$ la classe di equivalenza di v in V/U e con

$$\begin{aligned} \pi : & V \longrightarrow V/U \\ & v \mapsto \pi(v) = \overline{v} \end{aligned}$$

Spesso si dice che π è la proiezione di V su V/U. Si dota V/U della struttura di spazio vettoriale ponendo, per $w, v \in V$ e $a \in K$,

$$\overline{w} + \overline{v} = \overline{w + v}\,, \qquad a\overline{v} = \overline{av}\,, \qquad 0_{V/U} = \overline{0}_V\,.$$

Con questa struttura, π è una applicazione lineare (suriettiva). Le verifiche sono immediate. Per costruzione si ha una successione esatta corta

$$0 \to U \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} V/U \to 0$$

dove ι è l'inclusione. In particolare

$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

Il quoziente V/U verifica la seguente proprietà universale. Data una qualsiasi applicazione lineare $\alpha : V \to L$ tale che $\alpha(U) = 0$, esiste un'unica applicazione lineare $\eta : V/U \to L$ tale che $\eta\pi = \alpha$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & V/U \arrow[dl, "\exists!\ \eta"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

Infatti basta porre $\eta(\overline{v}) = \alpha(v)$ e verificare che la definizione è ben posta. Da questa proprietà segue che, se $F : V \to W$ è una applicazione lineare, allora si ha un isomorfismo

$$\overline{F} : V/\ker F \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im} F$$

Infatti, per la proprietà universale si ha un diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & & V/\ker F \arrow[dl, "\overline{F}"] \\ & \operatorname{Im} F & \end{tikzcd}$$

Essendo $\overline{F}$ suriettiva ed essendo la dimensione del suo dominio uguale a quella del suo codominio, si ha che $\overline{F}$ è un isomorfismo. In particolare, se F è suriettiva, si ha $V/\ker F \cong W$.

Definizione 2.1. Data una applicazione lineare $F : V \to W$ si definisce il **conucleo** di F ponendo

$$\operatorname{Coker} F = W/\operatorname{Im} F$$

Si ha una successione esatta

$$0 \to \ker F \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{F} W \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} F \to 0$$

dove ι è l'inclusione e p è la proiezione. Si hanno inoltre le formule

$$\dim \ker F = \dim V - \operatorname{rango} F, \qquad \dim \operatorname{Coker} F = \dim W - \operatorname{rango} F.$$

Esempio 2.2. Data una successione esatta corta
$$0 \to U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} W \to 0$$
l'applicazione G si fattorizza ad una applicazione bigettiva
$$V/\ker G \to W$$
e quindi, induce un isomorfismo
$$\operatorname{Coker} F \cong W.$$

Esercizio 2. Dati uno spazio vettoriale V e due sottospazi $U \subset W \subset V$, mostrare che esiste una successione esatta
$$0 \to \frac{W}{U} \to \frac{V}{U} \to \frac{V}{W} \to 0$$
e dedurre che esiste un isomorfismo
$$\frac{V/U}{W/U} \cong V/W.$$

Esercizio 3. Dati uno spazio vettoriale V e due sottospazi $U, W \subset V$, mostrare che esiste una successione esatta
$$0 \to W \cap U \to U \to \frac{U+W}{W} \to 0$$
e dedurre che esiste un isomorfismo
$$\frac{U+W}{W} \cong \frac{U}{U \cap W}.$$

Esercizio 4. Data una successione esatta corta
$$0 \to U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} W \to 0$$
ed un'applicazione lineare $H \colon Z \to W$ denotiamo
$$V \times_W Z = \{(v, z) \in V \times Z \mid G(v) = H(z)\},$$
con $p \colon V \times_W Z \to Z$ la proiezione $p(v, z) = z$ e con $q \colon U \to V \times_W Z$ l'applicazione $q(u) = (u, 0)$. Dimostrare che
$$0 \to U \xrightarrow{q} V \times_W Z \xrightarrow{p} Z \to 0$$
è una successione esatta.

Esercizio 5. Data una successione esatta corta
$$0 \to U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} W \to 0$$
ed un'applicazione lineare $H \colon U \to Z$ denotiamo
$$Z \amalg_U V = \frac{Z \oplus V}{K},$$
dove K è il sottospazio vettoriale di $Z \oplus V$ formato dalle coppie $(H(u), -F(u))$, $u \in U$. Dimostrare che esiste una successione esatta corta
$$0 \to Z \to Z \amalg_U V \to W \to 0.$$