Funzioni meromorfe, differenziali meromorfi

Abbiamo visto $\mathcal{E}^0(U, \mathbb{C}) \supseteq \mathcal{O}(U) \supseteq \mathcal{M}(U)$

$U \subseteq S$ aperto $\quad U$ connesso $\Rightarrow \mathcal{O}(U)$ dominio di integrità $\mathcal{M}(U)$ campo.

ω 1-forma è olomorfa se

identifichiamo U con la sua carta locale

$\omega_U = f(z)\, dz$.

$f(z)$ olomorfa.

$$\Omega^1(S) = \{\omega \text{ olomorfe}\} = \{\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(S) \,/\, d\omega = 0\}$$

$U = \Delta$

$\omega|_U = f(z)dz \qquad d\omega|_U = \frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z \wedge dz = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0.$

Osservazione ω è chiusa

ω chiusa $\Rightarrow$ ω esatta nel disco quindi

$\omega = dg(z) = \frac{\partial g}{\partial z} dz + \cancel{\frac{\partial g}{\partial \bar z} d\bar z}$. quindi $g(z)$ è olomorfa

$$\Omega^1_{mero}(S) = \{ 1 \text{ forme meromorfe.} \}$$

$\omega_U = f_U\, dz \qquad f_U$ meromorfa in "$\varphi(U)$"

Definizione ben posta

$$\omega_U = f_U \, dz$$

$$\omega_V = f_V \, dw.$$

$$f_U = \frac{dw}{dz} f_V$$

quindi $\nu_0(f_U) = \nu_0(f_V)$ molteplicità in 0 di f_U è uguale a quella di f_V.

<u>Lemma</u> Sia $\omega \in \Omega^1_{mero}(S)$ un differenziale non nullo. Si ha

$$\Omega^1_{mero}(S) = \mathcal{M}(S) \cdot \omega.$$

<u>Dim</u>

$f \in \mathcal{M}(S)$ $\quad f \cdot \omega \in \Omega^1_{mero}(S)$

Viceversa $\omega = \{\omega_U\}$ $\quad \omega' = \{\omega'_U\}$.

$\omega_U = f_U \, dz$ $\quad \omega'_U = g_U \, dz.$

$\omega'_U = \frac{g_U}{f_U} \omega_U$. $\quad g_U/f_U \in \mathcal{M}(U)$

Adesso $\omega'_V = g_V/f_V \, \omega_V$ $\quad g_V/f_V \in \mathcal{M}(V)$

Cosa succede in $U \cap V$??

$g_U/f_U = g_V/f_V$??

$f_U = \frac{dw}{dz} f_V \qquad g_U = \frac{dw}{dz} g_V.$

Quindi la risposta è affermativa.

Quindi abbiamo $F = \{ g_U/f_U \}$ sugli aperti U.

che è globale

(Veramente dovremmo usare le carte locali (U, φ))

ESEMPIO

$S = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \qquad U \subseteq S \qquad U = \begin{cases} \Delta \\ \mathbb{C} \end{cases}.$

Funzioni olomorfe, meromorfe in Δ, $\mathbb{C}$. ovvio $\quad f(z)$ olomorfe o meromorfe

1 - forme olomorfe (meromorfe)

$$\omega = f(z)\,dz.$$

$\underline{\hat{\mathbb{C}}} = U_0 \cup U_1 \qquad U_0 = \mathbb{C} \qquad U_1 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}.$

Funzioni olomorfe.

come applicazioni

$F : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}.$

$$\varphi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}. \qquad z \longrightarrow z$$

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C} \qquad z \longrightarrow \frac{1}{z} \qquad \infty \longrightarrow 0$$

Abbiamo che ~~[illegible]~~ F è limitata perchè $\hat{\mathbb{C}}$ è compatto. $|F|$ ha massimo in $z_0 \in \mathbb{C}$

(*) F olomorfa su $\mathbb{C}$, $|F|$ massimo, ~~limitata~~ $\Rightarrow$ F costante.

Nota: se è in ∞ cambia carta

Dimostrazione (*)

Tutto è basato sul principio di continuazione analitica:

f analitica (sviluppabile in serie) complessa non nulla definita in $U \subseteq \mathbb{C}$ connesso, allora l'insieme degli zeri Z di f è privo di punti di accumulazione in U.

Dim Sia $\{S_n\} \subseteq Z$ non costante che converge a $z_0 \in Z \cap U$. Quindi

$f(s_n) = f(z_0) = 0$ In un intorno di z_0.

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

Sia m il più piccolo intero positivo t.c. $a_m \neq 0$

$$0 = \lim_{n \to \infty} \frac{f(s_n)}{(s_n - z_0)^m} = \lim_{n \to \infty} a_m + a_{m+1}(s_n - z_0) + \ldots = a_m$$

Contraddizione

$f \in \mathcal{O}(U)$ U aperto connesso

$|f| =$ costante in U $\Rightarrow$ $f =$ cost.

Dim $|f|^2 = f\bar{f} =$ cost $\Rightarrow$

$$0 = \frac{\partial |f|^2}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}\bar{f} + f\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \quad \text{~~quindi~~}$$

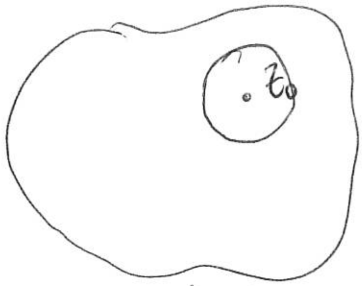
dal P.C.A

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = 0. \qquad \text{quindi } 0 = \frac{\partial f}{\partial z} \text{ oppure } f = 0$$

Nel primo caso f costante

U regione regolare e connessa $f \in \mathcal{O}(V)$ $\bar{U} \subseteq V$

Allora il massimo di $|f|$ in $\bar{U}$ è sul bordo ∂U di U.



Assumiamo che $|f(z)|$ abbia un massimo in z_0.

Δ_ρ un dischetto intorno a $z_0 \in \Delta_\rho \subseteq U$.

$z \in \Delta_\rho$ $\quad z - z_0 = \rho e^{i\theta}$.

Dalla formula integrale di Cauchy.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}}\,dz$$

$\partial\Delta_\rho$.

$$dz = i\rho e^{i\theta}\,d\theta.$$

Quindi $\displaystyle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underline{f(z_0+\rho e^{i\theta})}\,d\theta.$

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{i\theta})|\,d\theta$$

$|f(z_0)| \leq |f(z_0+\rho e^{i\theta})|$. Facciamo variare ρ.

abbiamo $|f| = \text{cost}$ in un intorno di $z_0 \Rightarrow f = \text{cost}$.

Adesso (*)

F olomorfa su $\mathbb{C}$ $|F|$ ha un massimo in z_0

$\Rightarrow F$ è costante.

Funzioni meromorfe su $\hat{\mathbb{C}}$.

$f \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ f olomorfa in $\mathbb{C}$ e con un polo in ∞

Es: $f(z) = p(z) \in \mathbb{C}[z]$

Vediamo cosa succede intorno a ∞.

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \hat{\mathbb{C}} \\ \varphi_1 \downarrow & z \\ & \downarrow \\ \mathbb{C} & 1/z \end{array}$$

$$f(z) = a_n z^n + \dots a_0.$$

$$f \circ \varphi_1^{-1}(w) = a_n \left(\frac{1}{w}\right)^n + \dots \quad a_1 \frac{1}{w} + a_0.$$

ha un polo di ordine n in ∞.

Con il teorema dei residui vedremo che queste sono tutte le funzioni meromorfe con poli solo in ∞.

<u>Differenziali</u>.

$w = p(z)\, dz$. è olomorfo su tutto $\mathbb{C}$.

Come si comporta in ∞.

Intorno ad infinito abbiamo.

$$\left(a_n \left(\frac{1}{w}\right)^n + a_1 \frac{1}{w} + a_0\right) d\left(\frac{1}{w}\right) =$$

$$-\frac{1}{w^2}\left(\text{- - - - -} \quad \text{-}\right) dw.$$

Quindi il differenziale dz si estende ad un differenziale ω su $\hat{\mathbb{C}}$ che ha un polo doppio in ∞. (8)

Allora Funzioni olomorfe $= \mathbb{C}$, ma funzioni meromorfe e differenziali è un po' diverso

Teorema dei Residui su S.

$p \in G \subseteq S$ regione regolare ω 1-forma olomorfa in $G \setminus \{p\}$, meromorfa in G ω C^∞ in un intorno di ∂G.

$$\mathrm{Res}_p\, \omega \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \omega$$

Definizione ben posta, i.e non dipende da G.

Sia $p \in \Gamma \subseteq \overline{\Gamma} \subset G$ un'altra regione regolare

Vogliamo $\int_{\partial G} \omega = \int_{\partial \Gamma} \omega$. $\quad \Gamma = \Delta$

$$\int_{\partial(G \setminus \Gamma)} \omega = \int_{\partial G} \omega - \int_{\partial \Gamma} \omega$$ cambiare orientazione

Adesso in $G \setminus \Gamma$ ω è olomorfa, quindi chiusa. Usando Stokes si ha

$$\int_{\partial(G \setminus \Gamma)} \omega = \int_{G \setminus \Gamma} d\omega = 0$$

Quindi per calcolare $\mathrm{Res}_p \omega$.
(U, φ) una carta locale che finisce in un disco $\varphi(p) = 0$.

$$\omega_U = (\varphi^*)^{-1} \omega = f_U \, dz.$$

$$\mathrm{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \varphi^{-1}(\Delta)} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} f_U \, dz = \mathrm{Res}_0 f_U \, dz.$$

Da notare: si parlerà sempre del residuo della forma differenziale, mai del residuo della funzione

Applicazioni:
$f \in \mathcal{M}(S)$ $\quad df \in \Omega^1_{mero}(S) \ni \omega = \dfrac{df}{f}$.
(U, φ) carta.

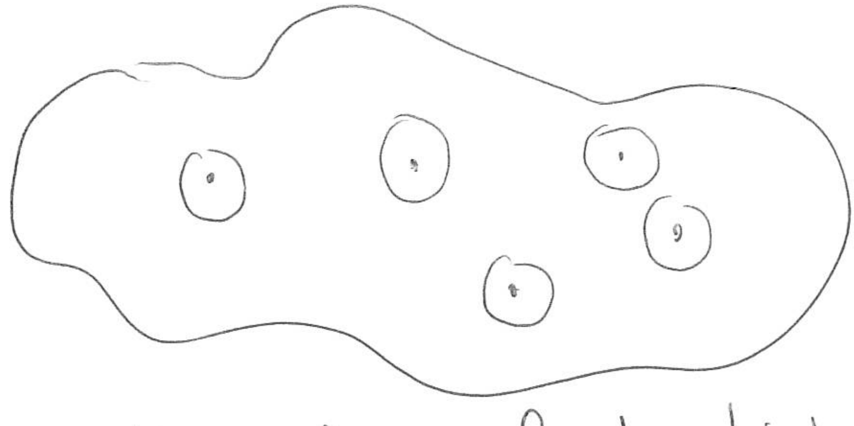
$$\omega_U = \frac{df_U}{f_U} \qquad \mathrm{Res}_p \omega = \nu_0(f_U) = \nu_0(f)$$

Dove $v_0(f_v) = \begin{cases} \text{l'ordine di } 0 \text{ come zero di } f_v. \\ -\text{ordine di } 0 \text{ come polo di } f_v. \end{cases}$

Esempio $v_0\left(\frac{1}{z}\right) = -1.$

Teorema dei Residui (su S)
Sia S una superficie di Riemann. Sia $G \subseteq S$ una regione regolare a chiusura compatta. ω 1-forma meromorfa che sia C^∞ in un intorno di ∂G, allora

$$\sum_{p \in G}{}' \operatorname{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \omega .$$



Dim $\bar{G}$ compatto solo # finito di poli $p_1 \dots p_n$
Prendiamo dei dischetti D_i centrati in p_i
(parametrici)

Con $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = \phi$ se $i \neq j$.

e $\overline{D}_i \subset G$. $\forall i$

ω è olomorfa in $G \setminus \{\cup D_j\}$, quindi sempre per il teorema di Stokes.

$$\sum_{p \in G} \operatorname{Res}_p \omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_j} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \omega .$$

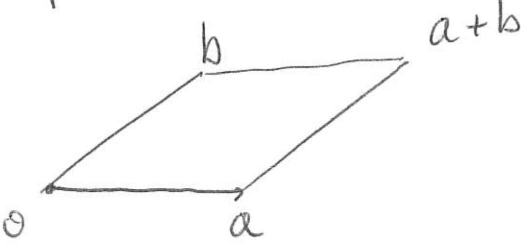
Corollario S superficie di Riemann f funzione meromorfa su S, $G \subseteq S$ regolare a chiusura compatta e non contenente nel bordo poli dif.

Allora $$\sum_{p \in G} v_p(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{df}{f} .$$

Corollario: S superficie di Riemann compatta. f funzione meromorfa su S, ... (Esercizio)

Esercizio / Esempio Sia $f(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ che non ha poli né zeri lungo ∂P bordo del parallelogramma fondamentale. Verificare che

$$\int_{\partial P} z \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \in \Lambda .$$



$$\int_0^a z\frac{df}{f} + \int_{a+b}^{b} z\frac{df}{f} = \int_0^a z\frac{df}{f} - \int_b^{a+b} z\frac{df}{f} =$$

$$-b\int_0^a \frac{df}{f}$$

. Adesso da in $[0,a]$ $f \neq 0$. e quindi anche in un intorno

Allora in questo aperto $\log f$ è definito.

$$\log f\Big]_0^a \qquad \text{ma } f(0) = f(a)$$

$$e^{\log(f(0))} = e^{\log f(a)}$$

$$\log f(a) - \log f(0) = 2k\pi i .$$ Quindi

$$\int_{\partial P} z\frac{df}{f} \in \Lambda .$$

$$= -kb + ha . \qquad k, h \in \mathbb{Z} .$$

Funzioni meromorfe su Superfici di Riemann compatte (connesse)

Vogliamo studiare funzioni meromorfe su superfici di Riemann compatte. Vedremo le funzioni meromorfe come rivestimenti ramificati di $\hat{\mathbb{C}}$.

Sappiamo che $\mathcal{O}(S) = \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(S)$ è un campo. (Nota: In generale non sappiamo che esistano funzioni meromorfe $\neq$ costanti)

S compatta $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{M}(S)$ ha # finito di zeri e poli anzi usando l'indicatore logaritmico $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{df}{f}$ abbiamo che ha tanti poli quanti zeri perché $\sum_{p \in S} \nu_p(f) = 0$

Per parlare di zeri e poli è opportuno introdurre i Divisori

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i \qquad n_i \in \mathbb{Z} \quad P_i \in S.$$

$Div(S)$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma

$\{P_1 \ldots P_k\}$ supporto di D se $n_i \neq 0$

$D \geq 0$ effettivo se $n_i \geq 0$, $D \geq D'$ se $D - D' \geq 0$.

$$\deg D = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$f \in \mathcal{M}(S)$ $(f)_0 =$ divisore degli zeri di f.

$(f)_\infty =$ divisore dei poli di f.

$$(f) = \sum_{p \in S} \nu_p(f)\, p = (f)_0 - (f)_\infty.$$

ω differenziale meromorfo $\omega \in \Omega^1_{mero}(S)$

$$(\omega)_0 = \sum_{p\ zero} \nu_p(\omega) \cdot p.$$

$$(\omega)_\infty = -\sum_{p\ polo} \nu_p(\omega)\, p$$

$$(\omega) = (\omega)_0 - (\omega)_\infty.$$

<u>Prop</u> a) $f \in \mathcal{M}(S) \Rightarrow \deg f = 0$

b) Se ω e $\varphi \in \Omega^1_{mero}(S) \Rightarrow$

$\deg \omega = \deg \varphi$.

<u>Dim</u> a) fatto , b) $\omega = f \cdot \varphi$.

<u>Esempio</u> : $\hat{\mathbb{C}}$

Funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ e meromorfe in $\hat{\mathbb{C}}$ diverse dalle costanti. Se f non ha zeri in $\mathbb{C}$.
$\Rightarrow f$ in ∞ non ha zeri e poli $\Rightarrow f$ olomorfa in $\hat{\mathbb{C}}$
$\Rightarrow f$ costante (Nota: e^z non ha singolarità polare in ∞, ma sing essenziale)

f ha # finito di zeri in $\hat{\mathbb{C}}$ e quindi ~~...~~ anche in $\mathbb{C}$. siano $p_1 \dots p_k$.

con molteplicità $m_1 \dots m_k$.

$$\frac{f}{\prod (z - p_i)^{m_i}} = c. \quad \Rightarrow \quad f \in \mathbb{C}[z].$$

Più in generale

$f \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ ha # finito di poli e zeri

Siano $q_1 \dots q_n$ poli al finito di molteplicità $n_1 \dots n_n$.

$(z-q_1)^{n_1} \dots (z-q_n)^{n_n} \cdot f$ olomorfa in $\mathbb{C}$.

e quindi un polinomio $p(z)$ $f = \frac{p(z)}{q(z)} \in \mathbb{C}(z)$

campo delle f^{ni} razionali.

Osservazione $f = \frac{p(z)}{q(z)}$ $\deg p(z) = n$.
$\deg q(z) = m$.

Allora f ha n zeri e m poli al finito

Quindi a "∞" ha $\nu_\infty(f) = m-n$.

Infatti $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ $a_n \neq 0$
$q(z) = b_m z^n + \dots + b_0$ $b_m \neq 0$

Intorno a ∞ usando la carta locale $z \longrightarrow \frac{1}{z}$

Abbiamo

$$p\left(\frac{1}{w}\right) = a_n \frac{1}{w^n} + \cdots + a_0.$$

$$q\left(\frac{1}{w}\right) = b_m \frac{1}{w^m} + b_0.$$

$$\frac{p\left(\frac{1}{w}\right)}{q\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{w^m}{w^n}\left(\frac{a_n + \cdots\ a_0 w^n}{b_m + \cdots\ b_0 w^m}\right)$$

Il termine $\left(\cdots\right)\Big|_0 \neq 0$ perché a_n e b_m sono $\neq 0$.

Quindi $v_\infty(f) = m - n$.

Differenziali meromorfi (olomorfi).

$\omega = f(z)\,dz$ $\quad f(z) \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ $\quad \deg(f) = 0$

Basta calcolare $\deg(\text{"}dz\text{"})$

sulla carta U_0 $\quad dz$ non ha zeri né poli

in U_1 $\quad dz = d\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2}\,dw$ ha

un polo doppio in 0 quindi $v_\infty(dz) = -2$.

$\deg(\omega) = -2$.

In particolare abbiamo che non esistono differenziali olomorfi in $\hat{\mathbb{C}}$.

Esempio $\omega = \frac{1}{z} dz$. su $\hat{\mathbb{C}}$.

ha un polo semplice in 0. Intorno a ∞ diventa. $-\frac{1}{w} dw$. Altro polo semplice.

Oss: $\mathrm{Res}_0(\omega) = 1$ $\quad \mathrm{Res}_\infty(\omega) = -1$

RIVESTIMENTI RAMIFICATI

$f \in \mathcal{M}(S)$ può essere vista come

$f : S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ analitica

Se p non è un polo

$$\begin{aligned} \varphi : U_p &\longrightarrow \Delta \\ p &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\psi_0 f \varphi^{-1}(z) = z^n h(z) \qquad \psi_0 : \begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\to z - f(p) \end{aligned}$$

$n = v_p(f - f(p))$.

Se $f(p) = \infty$ p un polo.

$\psi_\infty f \varphi^{-1}(z) = z^n h(z)$

$\psi_\infty : U_1 \to \mathbb{C}$

$z \to 1/z$

$\infty \to 0$

$n = -\nu_p(f)$.

Supponiamo che f non sia costante allora localmente $f\varphi^{-1}(z) = z^n$.

quindi f è un'applicazione aperta

$f(S) \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ aperto e chiuso $\Rightarrow f(S) = \hat{\mathbb{C}}$.

Definiamo l'indice di ramificazione di f nel punto p. $e_p(f) = n$ come sopra

Se p non è un polo

$\nu_p(f - f(p)) = \nu_p\, d(f - f(p)) + 1 = \nu_p(df) + 1$.

$$e_p(f) = \begin{cases} -\nu_p(f) & \text{se } f \text{ ha in } p \text{ un polo} \\ \nu_p(df) + 1 & \text{se } p \text{ è regolare.} \end{cases}$$

p è di ramificazione se $e_p(f) \geq 2$.

Quindi i punti di ramificazione sono o poli oppure zeri di df.
In ogni caso sono # finito

$$R_f = \sum_{p \in S} (e_p(f) - 1)\, p \qquad \bar{e} \text{ un divisore}$$

Sia $z \in \hat{\mathbb{C}}$ mostriamo $\sum_{p \in f^{-1}(z)} e_p(f) = n$.

Preso $z = \infty$.

$$n = \deg(f)_\infty = -\sum_{p \in f^{-1}(\infty)} v_p(f) = \sum_{p \in f^{-1}(z)} e_p(f) = n.$$

Invece se $z \neq \infty$. $z = z_0 \in \mathbb{C}$.

$$n = \deg(f - z_0)_0 = \sum_{p \in f^{-1}(z_0)} v_p(df) + 1 = \sum_{p \in f^{-1}(z_0)} e_p(f)$$

Sia $B = f(\operatorname{Supp} R_f) \subseteq \hat{\mathbb{C}}$

$A = f^{-1}(B) \subseteq S$.

$$f_0 : f|_{S \setminus A} : S \setminus A \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus B.$$

$\bar{e}$ un' applicazione continua che $\bar{e}$
1) omeomorfismo locale 2) ~~s~~uriettiva
3) $f^{-1}(z) = n$ punti distinti

Infatti è un rivestimento di grado n.

Dato un punto $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus B$ e posto $f^{-1}(z) = \{P_1 \dots P_n\}$

prendiamo V_i disco parametrico V_i $V_i \cap V_j = \phi$.

$f_0 : V_i \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus B$ omeomorfismo locale

preso $U \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} f_0(V_i)$ U è un intorno ben rivestito di $\cancel{z} \in \hat{\mathbb{C}} \setminus B$.

Allora $f \in \mathcal{M}(S)$ considerata come applicazione

$$f : S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

è un rivestimento ramificato

Vale il viceversa ?? Cioè Un rivestimento topologico finito di $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1 \dots p_n\}$ può completarsi a una superficie di Riemann compatta?

<u>Teorema</u> Sia $B \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ insieme finito e $f_0 : S_0 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus B$ un rivestimento finito allora esiste un'unica S (sup. R. compatta) e un insieme finito $A \subseteq S$ t.c.

$S_0 = S \setminus A$ e una $f \in \mathcal{M}(S)$

$f|_{S_0} = f_0$.

Dim:

Notazioni Δ disco $\dot{\Delta}$ disco bucato.

Lemma Sia M una superficie di Riemann $f : M \longrightarrow \dot{\Delta}$ un rivestimento topologico finito. Assumiamo f analitica. Allora M è analiticamente equivalente a $\dot{\Delta}$. Inoltre vi è un isom analitico $\varphi : M \longrightarrow \dot{\Delta}$ t.c. $f\varphi^{-1}(z) = z^n$.

$\overline{M} = M \cup \{p\}$ può essere equipaggiato in modo unico di una struttura di varietà complessa in modo che φ si estenda a $\overline{\varphi} : \tilde{M} \to \Delta$.

$$p \longrightarrow 0$$

e f si estende ad un'applicazione analitica $\overline{f} : \overline{M} \longrightarrow \Delta$ con $\overline{f}(p) = 0$.

Dim: $\pi_1(\dot{\Delta}, 1/2) = \mathbb{Z}$ quindi i rivestimenti di grado n corrispondono a sgr di indice n, i.e $n\mathbb{Z}$. Quindi a meno di equivalenze il rivestimento è dato da $\zeta_n : \dot{\Delta} \longrightarrow \dot{\Delta}$

$$z \longrightarrow z^n$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & \dot{\Delta} \arrow[d, "z^n"] \\ & \dot{\Delta} \end{tikzcd}$$

φ è l'omeomorfismo che dà l'equivalenza

Inoltre essendo f e z^n analitiche, anche φ localmente lo è, quindi globalmente. In coordinate $U \subseteq M$ aperto identificato con la carta locale.

$$f(w) = \varphi(w)^n \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = n\,\varphi(w)^{n-1} \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \bar{w}} .$$

Poi tutto segue banalmente

Nota: f analitica è fondamentale.

Lemma 2 M varietà complessa di dimensione n. Sia $f : \tilde{M} \longrightarrow M$ un rivestimento topologico. Allora esiste su $\tilde{M}$ un'unica struttura di varietà complessa di dimensione n che rende f analitica

<u>Dim</u>: $p \in \tilde{M}$ $f(p) = q \in U$. Sia (U, φ) carta locale e sia U ben rivestito da f. $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$

$V_i \cap V_j = \emptyset \qquad f|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ omeomorfismo

Sia $V = V_{i_0} \ni p$. Carte locale

$(V, \psi) \quad \psi = \varphi \circ f|_V$

Possiamo ricoprire $\tilde{M}$ con queste carte

Adesso assumiamo che $V \cap V' \neq \emptyset$.

$$\psi' \psi^{-1} : \psi(V \cap V') \longrightarrow \psi'(V \cap V')$$

$$\psi' \psi^{-1} = (\varphi' \circ f|_{V'})(\varphi \circ f|_V)^{-1} = \varphi' \circ \varphi^{-1}$$ che è analitica.

Inoltre $\varphi f \psi^{-1} = 1_{\varphi(U)}$ quindi f analitica.

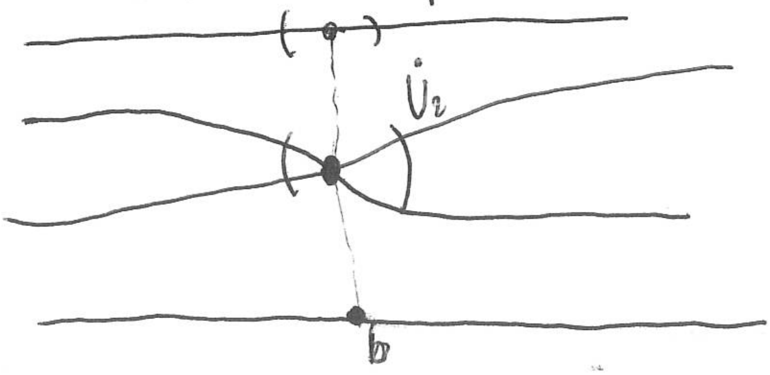
<u>Dim</u> del teorema S_0 ha una struttura di varietà complessa, f_0 è analitica (per il Lemma 2)

$b \in B \quad U$ intorno $U \cap B \ni b$. $\dot{U} = U \setminus \{b\}$.

$f^{-1}(\dot{U}) = \dot{U}_1 \cup \dots \; \dot{U}_k$

$f|_{\dot{U}_i} : \dot{U}_i \longrightarrow \dot{U}$ è rivestimento finito del disco $\dot{\Delta}$

e così via $\dot{U}_1$



Disegno reale

$f|_{U_1}$ tipo $z \longrightarrow z$

$f|_{U_2}$ tipo $z \longrightarrow z^2$.

Quindi alla fine abbiamo

$S_0 \cup \{p_1 \dots p_k\}$. Ripetiamo l'operazione per tutti i punti di B.

Alla fine otteniamo $f : S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ suriettiva analitica.

Compattezza di S è conseguenza della compattezza per successioni. Sia $\{q_n\}$ una successione in S. $f(q_n)$ in $\hat{\mathbb{C}}$, quindi esiste una sottosuccessione che converge a $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Sia $U \ni z$. t.c. $f^{-1}(U)$ è unione disgiunta di k dischi $U_1 \dots U_k$ (k dipende dalla ramificazione). Da un certo indice n tutti i $q_n \in \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Ci sarà una sottosuccessione contenuta in U_{i_0} converge al ~~un~~ punto $\overline{q}$ t.c. $f(q) = z$. (Nota $\overline{U}_{i_0}$ è compatto).

Allora abbiamo

Applicazioni analitiche di grado n

$$f : S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \qquad f(R_f) = B$$

Rivestimenti topologici connessi di grado n.

$$f_0 : S_0 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus B .$$

Abbiamo un modo per costruire superfici di Riemann S equipaggiate di una funzione meromorfa f.

FORMULA di HURWITZ.

Sia $f: S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ applicazione analitica (funzione meromorfa) rivestimento ramificato

Vogliamo dimostrare che

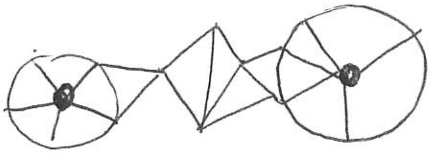
$$2n+2g-2 = \sum_{p\in S} (e_p(f)-1) = \deg R_f.$$

Usiamo rivestimento topologico ramificato

Sappiamo che $2-2g = v-\ell+t$ di una qualunque triangolazione di una superficie orientata compatta.

Siano in $\hat{\mathbb{C}}$ i punti $p_1 \dots p_s$ immagine dei punti di ramificazione di f (punti di dira̲mazione). Intorno ad ogni punto p_i prendiamo dei dischi Δ_i con $\overline{\Delta}_i \cap \overline{\Delta}_j = \emptyset$

Triangoliamo i dischi in modo che i p_i siano vertici

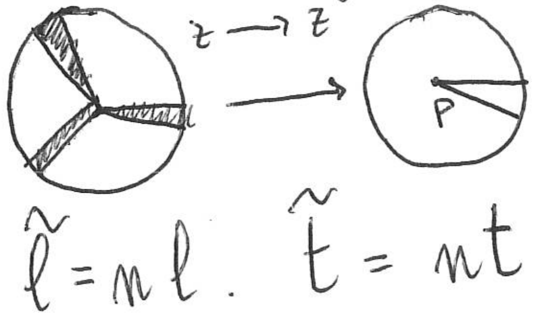


Completiamo a una triangolazione T di $\hat{\mathbb{C}}$ aggiungendo vertici, lati e triangoli

Consideriamo $\tilde{T} = f^{-1}(T)$ è una triangolazione di S.

Come è fatta $\tilde{T}$. Intorno a un vertice che non è di diramazione tutto avviene bene.

Sia p di diramazione.



Allora $\tilde{\ell} = n\ell$. $\tilde{t} = nt$

$$\tilde{V} = nV - \sum_{p \in S} (e_p(f) - 1)$$

Quindi

$$2-2g = \chi(S) = \tilde{v} - \hat{\ell} + \tilde{t} = n(v-\ell+t) - \sum_{p\in S} (e_p(f)-1)$$

$$\chi(S) = n\,\chi(\hat{\mathbb{C}}) - \sum_{p\in S} (e_p(f)-1)$$

"Conseguenze immediate"

$\omega \in \Omega^1_{mero}(S) \Rightarrow \deg \omega = 2g-2$.

Basta fare il conto con un semplice differenziale.

Assumiamo che esista $f \in \mathcal{M}(S)$ non costante.

Possiamo assumere che f abbia poli semplici, altrimenti prendiamo $g = \dfrac{1}{f(z)-a}$. a non di diramazione.

$$\sum_{p\in S} (e_p(f)-1) = \deg(df)_0 .$$

I poli di df sono i poli di f con molteplicità aumentata di 1 quindi $\deg(df)_\infty = 2n$.

$$\deg(df) = \deg(df)_0 - \deg(df)_\infty = \sum_{p\in S}(e_p(f)-1) - 2n = 2g-2$$

C curva algebrica proiettiva liscia (connessa) grado $d \Rightarrow g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$

Sappiamo che $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ equazione

$$\omega = \frac{\varphi(x,y)\,dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad \deg \phi(X_0, X_1, X_2) = d-3$$

$$\varphi(x,y) = \phi[x,y,1]$$

Consideriamo $\varphi = 1$, i.e $\phi(X_0, X_1, X_2) = X_2^d$.

ω non ha zeri in U_2 e non ha poli

Pertanto gli unici zeri sono lungo la retta $X_2 = 0$ e ~~nel caso in~~ saranno con molteplicità $(d-3)$

In quanto localmente

$$\omega = -\frac{u^{d-3}\,du}{\partial F/\partial w}$$

e ~~similmente~~ così via.

Adesso la retta $X_2 = 0$ interseca la curva in d punti. Quindi abbiamo $2g-2 = d(d-3)$

$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. Rappresentanti di $H^1_{dR}(C)$

$$\omega_1 \dots \omega_g, \overline{\omega_1} \dots \overline{\omega_g}.$$