Esercizi

Sia $p : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$
l'applicazione definita da $p(z) = 1/3\, z^3 + z$
$p(\infty) = \infty$. Trovare i punti di ramificazione di $p(z)$.

Soluzione $\quad 2g - 2 = -2n + \deg(R_f)$.

$g = 0$, $n = 3$ $\quad -2 = -6 + \deg(R_f)$

$\Rightarrow \deg R_f = 4$.

Cercare poli e dove si annulla il differenziale.

Poli : ∞ molteplicità 3.

$$p'(z) = z^2 + 1 \Rightarrow z = \pm i$$

Vediamo che in $z_0 = i$ (e similmente in $z_0 = -i$

$p(z) = +2/3\, i + 2i(z-i)^2$

Quindi $e_\infty(f) = 3$ $\quad e_i(f) = 2$ $\quad e_{-i}(f) = 2$.

$$R_f = [i] + [-i] + 2[\infty]$$

$f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ l'applicazione analitica
definita da $f(z) = 1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}$

Determinare zeri poli e punti di ramificazione

Trovare una carta φ intorno a -1 e una ψ intorno a $f(-1)$ t.c. $\psi f \varphi^{-1}(z) = z^n$ per $n>0$.

$$f(z) = \frac{z^3+z^2-z-1}{z^3}$$

Grado dell'applicazione = # zeri o # poli

Poli 0 con molteplicità 3.

Abbiamo anche 3 zeri $z^3+z-z-1 = (z-1)(z+1)^2$.

Quindi abbiamo $e_0(f)=3 \quad e_{-1}(f)=2$.

$$df = \frac{(3z^2+2z-1)\,z^3 - 3z^2(z^3+z^2-z-1)}{z^6} = \frac{(z+1)(z-3)}{z^4}.$$

$e_3(f)=2$.

$$f(z) = (z+1)^2\frac{(z-1)}{z^3}$$

Prima carta locale $\varphi_1 : D_{-1} \longrightarrow D_0$

$$z \longmapsto z+1$$

quindi $f\varphi_1^{-1}(w) = w^2\dfrac{(w-2)}{(w-1)^3}$

ovviamente intorno a 0 esiste

$$\sqrt{\frac{w-2}{(w-1)^3}}$$

Consideriamo

$$\varphi_2 : D_0 \longrightarrow D_0 .$$
$$w \longrightarrow w\sqrt{\frac{(w-2)}{(w-1)^3}}$$

$$f\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}(\zeta) = \zeta^2 .$$

Descrivere le applicazioni biolomorfiche di $\hat{\mathbb{C}}$ in sé.

<u>Soluzione</u> $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$

funzione meromorfa con uno zero e un polo distinti $f(z) = \left(\frac{az-b}{cz-d}\right)$

La condizione distinti significa $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$

Inoltre $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda^{\neq 0} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

Quindi le applicazioni biolomorfe di $\mathbb{C}$ in sé (4)
sono parametrizzate da $GL(2,\mathbb{C})/\mathbb{C}^* = PGL(2,\mathbb{C})$.
Il gruppo delle proiettività.

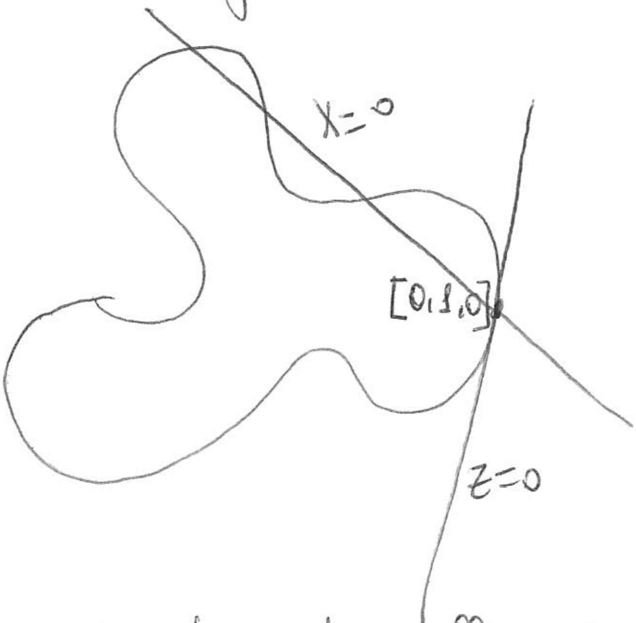
Siano X, Y, Z coordinate omogenee in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$
Sia $C = \{[X,Y,Z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \;/\; X^4 + XY^3 + Z^4 = 0\}$
Si consideri su C la f^ne meromorfa $f = X/Z$.
i) Calcolare poli e zeri di f con i loro ordini
ii) Calcolare i punti di ramificazione di f con i loro indici e calcolare il genere di C.
iii) Trovare su C tre differenziali olomorfi indipendenti.

Sol 1) poli $Z=0 \Rightarrow X=0$ oppure $X^3+Y^3=0$
$[0,1,0]$ $[\rho,1,0]$ $\rho^3=-1$
2) zeri $X=0 \Rightarrow Z=0$ con molteplicità 4.

$[0,1,0] \times 4$.

Allora 3 poli distinti e uno zero con molteplicità 3.

Spiegazione geometrica



Quartica piana

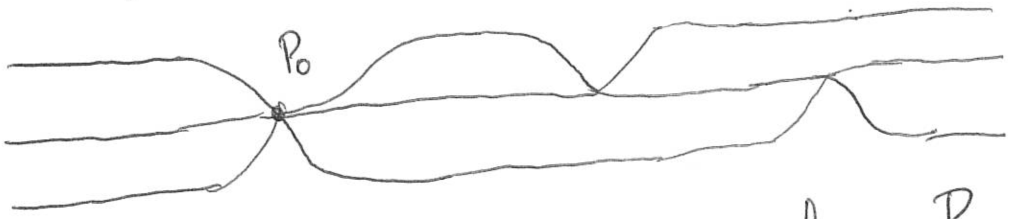
$Z=0$ retta tangente alla curva nel punto $[0,1,0]=P_0$ con molteplicità 4.

$X=0$ retta passante per P_0 e che incontra la quartica in altri 3 punti

la funzione meromorfa f parametrizza il fascio di rette per il punto P_0, i.e. le rette per P_0 hanno equazione $aX + cZ = 0$. Fissiamo r con a_0, c_0 quindi $X/Z = -c_0/a_0$. i punti Q_1, Q_2, Q_3 t.c. $f(Q_i) = -c_0/a_0$ sono i punti che si ottengono dall'intersezione $C \cap r_0$ escluso il punto P_0.

l'applicazione ramifica quando i punti Q_1, Q_2, Q_3 non sono distinti

Disegno



Nel nostro caso sappiamo che P_0 è di ramificazione. (P_0 è il polo) adesso possiamo assumere $Z=1$. e $X/Z = \alpha \neq 0$ $X=\alpha$ e cercare le soluzioni

$$X^4+XY^3=-1 \quad \text{diventa}$$

$$\alpha^4+\alpha Y^3=-1$$

$$Y^3 = \frac{-1-\alpha^4}{\alpha}.$$

ha sempre 3 soluzioni distinte eccetto quando.

$$-1-\alpha^4=0 \quad \text{i.e} \quad \alpha^4=-1.$$

Abbiamo 4 valori per α $\alpha_1 = e^{2\pi i/8}$, $\alpha_2 = e^{3\cdot 2\pi i/8}$ $\alpha_3 = e^{10\pi i/8}$ $\alpha_4 = e^{14\pi i/8}$. In ognuno di questi casi abbiamo ramificazione totale. ~~tre.~~

Punti sono $P_1=[\alpha_1, 0, 1]$ $P_2=[\alpha_2, 0, 1]$ $P_3=[\alpha_3, 0, 1]$, $P_4=[\alpha_4, 0, 1]$.

Formula di Hurwitz.

$$2g-2 = -6 + \deg R. \qquad \deg R = 10$$

quindi $g=3$, infatti abbiamo una quartica piana non singolare che ha genere

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Differenziali olomorfi (Forme di grado $d-3$)

In questo caso $d-3=1$. Forme lineari

X, Y, Z. Da queste possiamo scrivere sulle carte locali ...

$$\omega_U = \frac{x\,dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad \text{etc...}$$

Esercizio: Calcolare il genere della Superficie di Riemann S desingolarizzazione della curva $y^4+x^2y^2+x^2z^2=0$ (Esonero)

Sappiamo che i punti singolari sono $P_1=[1,0,0]$ e $[0,0,1]=P_2$

Intorno a P_1 abbiamo equazione locale $y^4+y^2+z^2=0$. Scoppiamo posto $z=ty$ abbiamo i punti $(y,t)=(0,\pm i)$

Intorno a P_2.
abbiamo equazione $y^4+y^2x^2+x^2=0$
Posto $x=yt$ otteniamo $(y^2+y^2t^2+t^2)=0$ ancora singolare in $(0,0)$. Posto $t=ys$ abbiamo come soluzione $(y,s)=(0,\pm i)$

Per calcolare il genere consideriamo.
f estensione di y/x.
Cominciamo a vedere possibili poli e/o zeri

$y=0$ otteniamo i punti

$[0\,0,1]$ e $[1,0,0]$ con molteplicità 2

ma questi sono punti regolari

posto $x=0$ $[0,0,1]$ con molteplicità 4.

ma adesso vediamo cosa succede nel punto P_1

abbiamo $y/x=0$ sopra a P_1 ci sono 2 punti questi sono 2 zeri

<u>Caso 2</u> P_2 "y/x" $= 0/0$ ma scoppiando abbiamo

posto $x=yt$ $\Rightarrow$ $y/x = \frac{1}{t} = \frac{1}{y^s}$. quindi

la funzione assume il valore ∞ e abbiamo 2 punti che vanno in ∞.

Adesso possiamo assumere y e $x \neq 0$ quindi

prendiamo $y=1$, $x=\alpha\neq 0$ quindi abbiamo

$$\alpha^2 z^2 = -1-\alpha^2$$

$$z^2 = \frac{-1-\alpha^2}{\alpha^2} \qquad \text{quindi } \alpha = \pm i$$

L'applicazione è di grado 2 e ramifica su 2 punti

7d

Risultato

$2g-2 = -4 + 2 = -2 \Rightarrow g = 0$

Riverifica Verifica Ulteriore (non serve)

$f = X/Z$

divide in 2

Poli $[1\ 0\ 0] \times 2$

$[1\ \pm i\ 0]$

Zeri $[0, 0\ 1]$ abbiamo 2 zeri dove ramifica

Adesso $X = 1$, $Z = \alpha$.

$y^4 + y^2 + \alpha^2 = 0$ Radici multiple

Biquadratica $Y^2 + Y + \alpha^2 = 0$ $\quad Y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4\alpha^2}}{2}$

Ramifica quando $\alpha^2 = \frac{1}{4}$

2 valori di α e per ogni α 2 valori di $Y = \sqrt{\frac{-1}{2}}$

Quindi ramifica su $4+2 = 6$ punti

$2g-2 = -2 \cdot 4 + 6 = -2 \Rightarrow g = 0$

Superfici di Riemann Applicazioni in $\mathbb{P}^n$

n-ple $f_1 \dots f_n$ di funzioni meromorfe.

$$\Phi : S \setminus \{\text{poli delle } f_i\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$
$$p \longrightarrow [1, f_1(p) \dots f_n(p)]$$

Estendiamo Φ a tutto S.

Sia p un polo di qualche f_i

(U, φ) una carta locale

$f_i \varphi^{-1}(z) = z^{\nu_i} h^i(z)$ $\quad h^i(z)$ olomorfa $\quad \nu_i$

$-N = \cancel{8}\min\{\nu_i\}$.

Allora moltiplicando per z^N otteniamo $\quad N > 0$

che per $q \neq p$ $\quad z \neq 0$ quindi moltiplichiamo tutto per z^N

$$\Phi(q) = [1, z^{\nu_1} h_1(z) \dots z^{-N} h_i(z), z^{\nu_n} h_n(z)]$$

moltiplichiamo per z^N e abbiamo $\qquad K_j(z) = z^{N-\nu_j} h_j$

$$\Phi(p) = [\cancel{0} \dots \overset{\neq 0}{h_i(0)} \dots k_n(0)]$$

Quindi l'applicazione estende

Vediamo che questo è il caso generale (9)

Prop: S superficie di Riemann. I seguenti dati sono equivalenti

A) n funzioni meromorfe $f^1 \dots f^n$

B) Un'applicazione analitica $\Phi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$.

C) Un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\forall \alpha$.
$s_\alpha^0 \dots s_\alpha^n \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ e delle $\xi_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$
t.c. $s_\beta^k = \xi_{\alpha\beta} s_\alpha^k$.

<u>Dim</u> $A \Rightarrow B$ ok.

$B \Rightarrow C$ Φ applicazione $X_0 \dots X_n$ coordinate di $\mathbb{P}^n$

$V_\alpha = \{[X_0 \dots X_n] \,/\, X_\alpha \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n$

$U_\alpha = \Phi^{-1}(V_\alpha)$

$$\begin{aligned} \Phi : U_\alpha &\longrightarrow V_\alpha . \\ p &\longrightarrow [h_\alpha^0 \dots h_\alpha^n] \end{aligned}$$ h_j^α sono olomorfe.

e queste sono $s_\alpha^0 \dots s_\alpha^n$

Adesso in $U_\alpha \cap U_\beta$ poniamo $\xi_{\alpha\beta} = s_\beta^\alpha / s_\alpha^\alpha \neq 0$.

$C \Rightarrow A$ Poniamo $f^i_\alpha = s^i_\alpha / s^0_\alpha$. $i = 1 \dots n$.

f^i_α è una funzione meromorfa in U_α.

Similmente $f^i_\beta = s^i_\beta / s^0_\beta$

Adesso in $U_\alpha \cap U_\beta$ $f^i_\beta = s^i_\beta / s^0_\beta = \dfrac{\xi_{\alpha\beta}\, s^i_\alpha}{\xi_{\alpha\beta}\, s^0_\alpha} = f^i_\alpha$

Quindi f^i sono meromorfe in S.

Relazione tra superfici di Riemann e curve algebriche piane (proiettive)

Abbiamo visto come desingolarizzare una curva algebrica piana.

Dato $F(X, Y, Z) = 0$ polinomio irriducibile di grado d. $\Gamma = \{ [X, Y, Z] / F(X, Y, Z) = 0 \}$.

Dopo scoppiamenti abbiamo C è una superficie di Riemann (connessa dopo). compatta

$\sigma : C \longrightarrow \mathbb{P}^2$ composizione scoppiamenti + $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{P}^2$.

Proprietà

a) $\sigma(C) = \Gamma$.

b) $\sigma^{-1}(\Gamma_{sing}) = \{p_1 \dots p_N\} \Rightarrow \sigma : C \setminus \{p_1 \dots p_N\} \to \Gamma \setminus \Gamma_{sing}$

è un isomorfismo.

Veramente vale il seguente

Teorema: C una superficie di Riemann compatta f, g funzioni meromorfe. Allora esiste $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ t.c. $F(f,g) \equiv 0$

Meglio ancora

Teorema ogni superficie di Riemann compatta si può ottenere come desingolarizzazione di una curva algebrica piana definita da un polinomio irriducibile

Dimostrazione sarà conseguenza del Teorema di Riemann-Roch.

Capitolo 9

Superfici Riemanniane (cenni)

S superficie diff. $U \subseteq S$ aperto $\mathcal{V}(U)$

Campi vettoriali $T_p(S)$ spazio tangente.

Definizione S si dice riemanniana se $\forall p \in S$

$T_p(S)$ è equipaggiato con un prodotto scalare $\langle\, , \rangle_p$.

tali che presi $V, W \in \mathcal{V}(S)$

$$p \longrightarrow \langle V(p), W(p) \rangle_p \quad \text{è } C^\infty.$$

Carte locali (U, φ) $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ base di $\mathcal{V}(U)$

posto $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = g_{ij}$

abbiamo la forma bilineare simmetrica definita su $\mathcal{V}(U)$

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$$

Quindi $V = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ $\quad W = b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

$\langle V, W \rangle|_U = ds^2(V, W) = \sum g_{ij} a_i b_j$.

ds^2 notazione viene dalla lunghezza di una curva

$$l(\gamma) = \int_0^1 \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2} = \int_0^1 ds(\gamma', \gamma').$$

Esempio Superfici in $\mathbb{R}^3$ $g_{11} = E$, $g_{12} = F$ $g_{22} = G$.

Su ogni superficie differenziabile possiamo introdurre una metrica Riemanniana.

D'ora in poi prendiamo S orientata.

Intanto partendo da $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ possiamo costruire una base ortonormale e_1, e_2 di $V(U)$.

Quindi base duale ω_1, ω_2 in $\mathcal{E}^1(U)$.

$$\omega_i(p) = \langle e_i, \ \rangle_p \quad \forall p \in U.$$

Sia ω_1', ω_2' un altro riferimento ortonormale in una carta V allora abbiamo $\omega_1 \wedge \omega_2 = \pm\, \omega_1' \wedge \omega_2'$ nell'intersezione.

Inoltre se $\mu \in \mathcal{E}^2(S)$ è la forma che dà l'orientazione. diremo che e_1, e_2. (ω_1, ω_2) sono positivamente orientati se

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = f\mu \qquad f(p) > 0 \quad \forall p \in U.$$

In questo modo prendendo tutti riferimenti ortonormali positivamente orientati otteniamo

$$dA = \{\omega_1^\alpha \wedge \omega_2^\alpha\} \quad \text{elemento d'area.}$$

Nel caso delle superfici in $\mathbb{R}^3$ abbiamo

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv.$$

<u>Data</u> una Superficie Riemanniana orientata definiamo la "rotazione di $\frac{\pi}{2}$"

$$* \quad \mathcal{E}^1(S) \longrightarrow \mathcal{E}^1(S)$$

~~da~~ con $*\omega_1 = \omega_2$
$*\omega_2 = -\omega_1$.

Più in generale
$$*: \mathcal{E}^p(S) \longrightarrow \mathcal{E}^{2-p}(S)$$

$p=0$ $\quad *1 = \omega_1 \wedge \omega_2 \qquad *\omega_1 \wedge \omega_2 = 1. \quad p=2$

Così $** = (-1)^p$.

Inoltre $*(\alpha+\beta) = *\alpha + *\beta$.

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{E}^p(S)$$

Assumiamo S compatta, possiamo definire una forma bilineare simmetrica in $\mathcal{E}^p(S)$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_S \alpha \wedge *\beta = \int_S \beta \wedge *\alpha = \langle \beta, \alpha \rangle.$$

Questa forma risulta essere definita positiva.
Quindi $\mathcal{E}^p(S)$ ha una struttura di spazio normato

$$\|\alpha\| = \int_S \alpha \wedge *\alpha.$$

Consideriamo

$$d : \mathcal{E}^p(S) \longrightarrow \mathcal{E}^{p+1}(S)$$

Esiste un aggiunto di d rispetto al $\langle , \rangle$.

$$\delta : \mathcal{E}^p(S) \longrightarrow \mathcal{E}^{p-1}(S)$$

$$\delta = -*d*.$$

Allora $\alpha \in \mathcal{E}^p(S)$ $\beta \in \mathcal{E}^{p+1}(S)$

$$\langle d\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha \; \delta\beta\rangle.$$

$$d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta + (-1)^p \alpha \wedge d*\beta = d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge * \delta \beta$$

Applichiamo Stokes.

$$0 = \int_S d(\alpha \wedge * \beta) = \langle d\alpha, \beta\rangle - \langle \alpha, \delta\beta\rangle.$$

Definiamo l'operatore di Laplace

$$\Delta : \mathcal{E}^p(S) \longrightarrow \mathcal{E}^p(S).$$

$$\Delta = \delta d + d\delta.$$

Proprietà di Δ.

$d\Delta = \Delta d$ banale

$*\Delta = \Delta *$

Inoltre Δ è autoaggiunto $\langle \Delta\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \Delta\beta\rangle$

Vediamo su una carta locale.

$S = \mathbb{R}^2$.

$\omega_1 = dx \quad \omega_2 = dy$.

$* dx = dy \quad * dy = -dx$

$p=0 \quad \Delta f = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

$p=1 \quad \Delta(f\,dx + g\,dy) = \Delta f\,dx + \Delta g\,dy$.

$p=2 \quad \Delta(f\,dx\wedge dy) = \Delta f\,dx\wedge dy$.

$S = \mathbb{C}$.

$* dz = -i\,dz$

$* d\bar{z} = i\,d\bar{z}$.

$\Delta f = -4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$

$*(dz\wedge d\bar{z}) = -2i$

$* 1 = \frac{i}{2}\,dz\wedge d\bar{z}$.

Una p-forma differenziale si dice cochiusa se $\delta\omega = 0$. Una p forma si dice armonica se $\delta\omega = d\omega = 0$ $(\Rightarrow \Delta\omega = 0)$.

$\mathcal{H}^p(S)$ = spazio delle p-forme armoniche

Essendo S compatto

$\langle \Delta\omega, \omega\rangle = \langle d\delta\omega, \omega\rangle + \langle \delta d\omega, \omega\rangle =$

$\langle \delta\omega, \delta\omega\rangle + (d\omega, d\omega)$ quindi $\Delta\omega = 0 \Rightarrow \omega$ armonica

S superficie di Riemann compatta (caso complesso)

$\alpha, \beta \in \mathcal{E}^1(S)$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_S \alpha \wedge * \bar{\beta}$$ è una forma hermitiana definita positiva

Teorema di Hodge: S superficie di Riemann (compatta)
Ogni ~~una~~ 1 forma $\omega \,|\, |\omega| < \infty$ (automatico se S compatta)
si decompone in modo unico in una somma

$$\omega = \omega_h + df + \delta\mu.$$

$\omega_h \in \mathcal{H}^1(S)$, $f \in \mathcal{E}^0(S)$ $\mu \in \mathcal{E}^2(S)$
Tale decomposizione è ortogonale rispetto al $\langle , \rangle$
Quindi nel caso compatto abbiamo

$$\mathcal{E}^1(S) = \mathcal{H}^1(S) \oplus d\mathcal{E}^0(S) \oplus \delta\mathcal{E}^2(S)$$

Nota: i teoremi di decomposizione ortogonale richiedono la completezza che è tipica degli spazi di Hilbert
Per questo motivo è necessario completare lo spazio $\mathcal{E}^1(S)$ ~~a~~ usando 1-forme a coefficienti L^2_{loc} che rappresentano il naturale completamento di $\mathcal{E}^1(S)$.

Conseguenze:

Teorema S superficie di Riemann compatta allora $\mathcal{H}^1(S) \cong H^1_{dR}(S)$. Ogni classe di coomologia ha un rappresentante armonico.

Dim: Basta far vedere che se $\omega \in \mathcal{E}^2(S)$

$$d\delta\omega = 0 \Rightarrow \delta\omega = 0.$$

Ma $\Delta\delta\omega = 0 \Rightarrow \delta\omega \in \mathcal{H}^1(S)$ quindi $\delta\omega = 0$.

Ricapitoliamo: S superficie di Riemann compatta.

$\omega \in \mathcal{E}^1(S)$ è olomorfa se
$\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(S)$ (i.e. $*\omega = -i\omega$) e $\bar{\partial}\omega = 0$.

In questo caso scriviamo $\omega \in H^{1,0}(S)$.

analogamente abbiamo $\omega \in H^{1,0}(S) \Leftrightarrow \begin{matrix} d\omega = 0 \\ *\omega = -i\omega \end{matrix}$.

$H^{1,0}(S) = \{1\text{-forme olomorfe}\}$

$H^{0,1}(S) = \{1\text{-forme antiolomorfe}\} = \overline{H^{1,0}(S)}$

$\omega \in \mathcal{E}^{0,1}$ e $\partial\omega = 0$

<u>Proposizione</u> $\mathcal{H}^1(S) = H^{1,0}(S) \oplus H^{0,1}(S)$

<u>Dim</u> $H^{1,0}(S) \subseteq \mathcal{H}^1(S)$

$\omega \in H^{1,0}(S)$ allora $d\omega = 0$ e $\delta\omega = -*d*\omega =$

$-*d(-i\omega) = i*d\omega = 0 \implies \omega \in \mathcal{H}^1(S)$

Nel caso di $H^{0,1}(S)$ si procede in modo simile.

Oppure basta osservare che se ω è armonica $\Rightarrow$ anche $\bar{\omega}$ lo è perchè $\bar{\delta} = \delta$ e $\bar{d} = d$.

Adesso sia $\varphi \in \mathcal{H}^1(S)$ (quindi anche $\bar{\varphi}$ lo è)

$\omega = \varphi + i*\varphi$ $\quad *\omega = *\varphi - i\varphi = -i(\varphi + i*\varphi) = -i\omega$.

$d\omega = d\varphi + i\,d*\varphi = 0$ perchè $0 = \delta\omega = -*d*\omega \implies$ $d*\omega = 0$.

$$\varphi = \underbrace{\tfrac{1}{2}(\varphi + i*\varphi)}_{\substack{\omega \\ \text{olomorfa}}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\varphi - i*\varphi)}_{\substack{\psi \\ \text{antiolomorfa}}}$$

$\omega + \psi$

olomorfa $\quad$ antiolomorfa.

Nota $\varphi - i*\varphi = \overline{(\overline{\varphi} + i*\overline{\varphi})}$

Conseguenze $\dim H^{1,0}(S) = g$.

Ritroviamo il caso delle curve algebriche piane proiettive.

<u>Problema</u>: Trovare funzioni meromorfe non costanti su S e relazione con le curve algebriche piane.

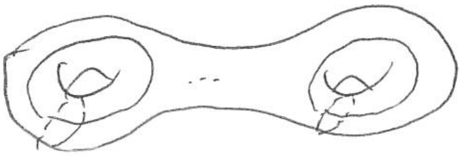
Questo è il contenuto del teorema di Riemann Roch. che da una stima (spesso esatta) di funzioni meromorfe con assegnato comportamento polare.

Conseguenza sarà la realizzazione di una superficie di Riemann come curva proiettiva liscia in $\mathbb{P}^n$. (CAPITOLO 12)

Relazioni bilineari di Riemann.

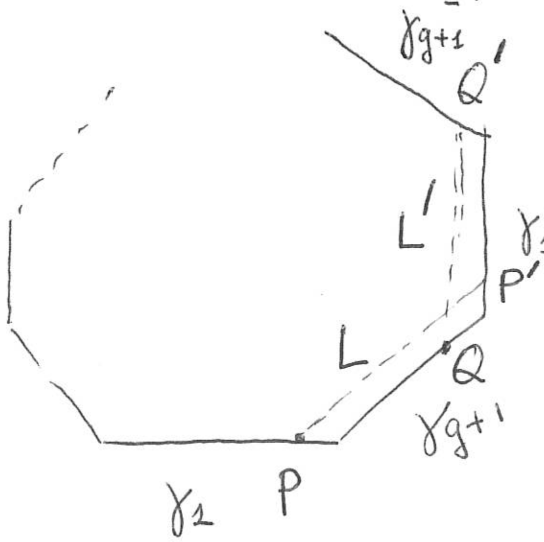
X una superficie di Riemann compatta.

Tagliamo lungo i cammini $\gamma_1 \dots \gamma_{2g}$. che generano l'omologia



Poniamo $X_0 = X - \{\gamma_1 \dots \gamma_{2g}\}$.

Otteniamo un poligono aperto con $4g$ lati



$\gamma_1 \gamma_{g+1} \gamma_1^{-1} \gamma_{g+1}^{-1} \gamma_2 \dots$

Sia φ è una 1-forme differenziale definita intorno a $\gamma_1 \cup \dots \gamma_{2g}$.

$$\Pi_\nu = \int_{\gamma_\nu} \varphi .$$ ν-periodo di φ.

ω olomorfa.

$$\pi_\nu = \int_{\gamma_\nu} \omega .$$

X_0 è semplicemente connesso quindi $\omega = df$ f olomorfa in X_0.

Da dimostrare.

$$\int_{\partial X_0} f\varphi = \sum_{\nu=1}^{g} \left(\pi_\nu \Pi_{g+\nu} - \pi_{g+\nu} \Pi_\nu \right) \quad \otimes$$

Nota: f non è definita su X. Avrà valori diversi dove si dovrà identificare. (vedi disegno $P \equiv P'$, $Q \equiv Q'$)

Allora

$$f(p') - f(p) = \int_p^{p'} \omega = \int_L \omega = \int_{\gamma_{g+\nu}} \omega = \Pi_{g+\nu} \quad p \in \gamma_\nu.$$

$$f(q') - f(q) = \text{- - - -} \quad \int_{\gamma_\nu^{-1}} \omega = -\pi_\nu \quad q \in \gamma_{g+\nu}.$$

$$\int_{\partial X_0} f\varphi = \int_{\partial P} f\varphi = \sum_{\nu=1}^{g} \underbrace{\int_{\gamma_\nu} f\varphi + \int_{\gamma_\nu^{-1}} f\varphi} + \int_{\gamma_{g+\nu}} f\varphi + \int_{\gamma_{g+\nu}^{-1}} f\varphi =$$

Adesso $\displaystyle\int_{\gamma_\nu} f\varphi + \int_{\gamma_\nu^{-1}} f\varphi = \int_{\gamma_\nu} f\varphi - \int_{\gamma_\nu} (f(p) + \Pi_{g+\nu})\varphi = -\pi_{g+\nu} \Pi_\nu.$

In modo simile per $\displaystyle\int_{\gamma_{g+\nu}}$ - - -

DIFFERENZIALI E PERIODI

$$\mathcal{H}^1(S) = \Omega^1(X) \oplus \overline{\Omega^1(X)}$$

differenziali olomorfi

diff. antiolomorfi

Sia $\gamma_1 \dots \gamma_{2g}$ una base simplettica di $H_1(X,\mathbb{Z})$

$$(\gamma_i, \gamma_j) = \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix}$$

$\omega \in \Omega^1(X) \qquad \omega = 0 \iff \int_{\gamma_i} \omega = 0 \quad i = 1 \dots 2g.$

Veramente $\quad \omega = 0 \iff \int_{\gamma_i} \omega = 0 \quad i = 1 \dots g.$

Poiché abbiamo un prodotto hermitiano definito positivo

$$\omega = 0 \iff \int_X \omega \wedge * \overline{\omega} = 0$$

Nota $* \overline{\omega} = i \overline{\omega}$. Inoltre se localmente $\omega_U = f(z) dz$.

$$\cancel{\int_X} \ \omega_U \wedge * \omega_U = i |f(z)|^2 dz \wedge d\bar{z} = +2i |f(z)|^2 dx \wedge dy.$$

Adesso applichiamo le relazioni bilineari di Riemann

$$\int_{\gamma_\nu} \omega = \pi_\nu \qquad \int_{\gamma_\nu} \overline{\omega} = \Pi_\nu = \overline{\pi}_\nu$$

Allora se $\omega = df$ in X_0.

$$\int_{X_0} \omega \wedge * \overline{\omega} = i \int_{X_0} df \wedge \overline{\omega} = i \int_{\partial X_0} f \overline{\omega} = i \left(\sum \pi_\nu \overline{\pi_{g+\nu}} - \pi_{g+\nu} \overline{\pi_\nu} \right)$$

Allora se $\pi_\nu = 0 \Rightarrow \omega = 0$.

Conseguenza : $\Omega^1(X) \longrightarrow \mathbb{C}^g$.

$$\omega \longrightarrow \left(\int_{\gamma_1} \omega \; \dots \; \int_{\gamma_g} \omega \right)$$

è un isomorfismo.

Allora esiste una base $\omega_1 \dots \omega_g$ t.c. $\int_{\gamma_i} \omega_j = \delta_{ij}$.

Base normalizzata rispetto alla base simplettica.

$\gamma_1 \dots \gamma_g, \gamma_{g+1} \dots \gamma_{2g}$.

Allora a S possiamo associare una matrice $\tau = (\tau_{ij}) = \int_{\gamma_{g+j}} \omega_i$

Proprietà della matrice τ.

τ è simmetrica, infatti

$$0 = \int_X \omega_i \wedge \omega_j = \int_{X_0} df_i \wedge \omega_j = \int_{\partial X_0} f_i \omega_j = \sum_{h=1}^{g} \left(\delta_{ih}\tau_{jh} - \tau_{ih}\delta_{jh}\right)$$

$$= \tau_{ji} - \tau_{ij}$$

$\operatorname{Im}\tau > 0$, i.e. $\tau = X + iY$ $\quad {}^t x Y x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^g,\ x \neq 0$.

Sia $\omega = \sum_i x_i \omega_i$ $\quad x_i \in \mathbb{R}$.

$$\pi_\nu = \int_{\gamma_\nu} \omega = x_\nu \qquad \pi_{g+\nu} = \int_{\gamma_{g+\nu}} \omega = \sum_{j=1}^{n} x_j \tau_{j\nu}$$

Adesso

$$0 < \int_X \omega \wedge *\bar{\omega} = \sqrt{-1} \sum_{\nu=1}^{g} \left(\pi_\nu \overline{\pi_{g+\nu}} - \pi_{g+\nu} \overline{\pi_\nu}\right) =$$

$$\sqrt{-1} \sum_{\nu=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} x_\nu x_j \left(\overline{\tau_{j\nu}} - \tau_{j\nu}\right) = 2\sum_{j=1}^{g}\sum_{\nu=1}^{g} x_\nu x_j \operatorname{Im}\tau_{\nu j}.$$

$$= 2\, {}^t x \operatorname{Im}\tau\, x.$$

ATTENZIONE ERRORE sulle dispense.

manca $\sum$.

Relazioni Bilineari di Riemann : Sia X una superficie di Riemann compatta di genere $g \geq 1$. Sia $\gamma_1 \dots \gamma_{2g}$ una base simplettica per $H_1(X, \mathbb{Z})$ e $\omega_1 \dots \omega_g$ una base di $\Omega^1(X)$ tale che

$$\left(\int_{\gamma_i} \omega_j \right)_{\substack{i=1\dots g \\ j=1\dots g}} = I$$

Allora la matrice $\displaystyle\int_{\gamma_{g+j}} \omega_i = \tau$.

è simmetrica definita positiva.

Una conseguenza immediata è che l'applicazione

$$\chi : H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Omega^1(X)^*$$

$$\gamma \longrightarrow \phi_\gamma : \omega \longrightarrow \int_\gamma \omega$$

è iniettiva. Infatti si ha

Sia $\gamma = \sum_{i=1}^{2g} n_i \gamma_i \in \operatorname{Ker} \chi \Rightarrow$

$$0 = \int_\gamma \omega_j = n_j + \sum n_{g+k} \tau_{jk} .$$

Scrivendo $\tau = X + iY$

e posto $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_g \end{pmatrix}$ $\quad m = \begin{pmatrix} n_{g+1} \\ n_{2g} \end{pmatrix}$

$$Ym = 0 \qquad n + Xm = 0 \qquad Y > 0 \Rightarrow Y \text{ invertibile}$$

quindi $m = 0$ e anche $n = 0$.

Quindi a S possiamo associare $\mathbb{C}^g / \langle 1_g, \tau \rangle$.

toro complesso g dimensionale.

Nota: la base $\gamma_1 \dots \gamma_{2g}$ simplettica non è univocamente scelta. Sia $\gamma_1' \dots \gamma_{2g}'$ un'altra base simplettica. Si ha

$$(\gamma_1' \dots \gamma_{2g}') = (\gamma_1 \dots \gamma_{2g})\, {}^tM .$$

$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ è una matrice simplettica a coefficienti interi, i.e. $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix}$

$$M J\, {}^tM = J$$

$\cancel{M J M = J}$. i.e.

$$A^tD - B^tC = 1_g \qquad A^tB \text{ e } C^tD \text{ sono simmetriche.}$$

Anche la matrice τ cambia e produce una matrice τ' (29)

Vediamo brevemente come.

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \\ \gamma_{2g}\end{pmatrix} \cdot (\gamma_1 \dots \gamma_{2g}) = \begin{pmatrix}0 & -1_g\\ 1_g & 0\end{pmatrix} = (\gamma_i \cdot \gamma_j).$$

$$\begin{pmatrix}\gamma_1'\\ \\ \gamma_{2g}'\end{pmatrix} \cdot (\gamma_1' \dots \gamma_{2g}') = M \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \\ \gamma_{2g}\end{pmatrix} (\gamma_1 \dots \gamma_{2g})\, {}^tM = M J\, {}^tM = J.$$

$$\int_{\begin{pmatrix}\gamma_{g+1}\\ \gamma_{2g}\\ \gamma_1\\ \gamma_g\end{pmatrix}} (\omega_1 \dots \omega_g) = \begin{pmatrix}\tau\\ 1_g\end{pmatrix} \qquad \int_{\begin{pmatrix}\gamma_{g+1}'\\ \gamma_{2g}'\\ \gamma_1'\\ \gamma_g'\end{pmatrix}} (\omega_1' \dots \omega_g') = \begin{pmatrix}\tau'\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$M \int_{\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \\ \gamma_g\end{pmatrix}} (\omega_1 \dots \omega_g) A = M \begin{pmatrix}\tau\\ 1_g\end{pmatrix} A$$

$$\Rightarrow \quad A = (C\tau + D)^{-1} \quad e \quad \tau' = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$$

Abbiamo $\mathbb{H}_g = \{\tau \text{ simmetriche } \operatorname{Im}\tau > 0\}$

$$Sp(g, \mathbb{Z}) \times \mathbb{H}_g \longrightarrow \mathbb{H}_g \qquad M \cdot \tau = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$$

$\mathbb{H}_g / Sp(g, \mathbb{Z})$ varietà quasi proiettive

$$\mathcal{M}_g = \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di isomorfismo di} \\ \text{sup. di Riemann compatte} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \mathbb{H}_g / Sp(g, \mathbb{Z})$$

Ultima osservazione: Possiamo applicare le relazioni bilineari di Riemann al caso φ 1-forme meromorfe

$$\int_{\partial P} f\varphi = 2\pi i \sum_{p \in P} \operatorname{Res}_p(f\varphi) = \sum_{\nu=1}^{g} \left(\pi_\nu \Pi_{g+\nu} - \pi_{g+\nu} \Pi_\nu \right)$$

DIVISORI E EQUIVALENZA LINEARE

X superficie di Riemann compatta di genere g.

$$\mathrm{Div}(X) = \left\{ D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i \;/\; n_i \in \mathbb{Z},\ P_i \in X \right\}$$

$D = D^+ - D^-$ $\qquad \mathrm{Supp}(D^+) \cap \mathrm{Supp}(D^-) = \emptyset$.

$D^+ = \sum_i n_i P_i \quad n_i > 0 \qquad D^- = \sum_j m_j Q_j \quad m_j > 0$

Denotiamo con

$$\mathcal{L}(D) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X) \;/\; (f) + D \geq 0 \right\}$$

f può avere poli solo nei punti P_i con molteplicità $\leq n_i$. Meglio

$(f) = (f)_0 - (f)_\infty$

$(f)_0 + D^+ \geq (f)_\infty + D^-$. Siccome i supporti sono disgiunti la condizione equivale a

$$(f)_0 \geq D^- \ ,\ (f)_\infty \leq D^+$$

$\mathcal{L}(D)$ è uno spazio vettoriale:

$$I(D) = \{ \omega \in \Omega^1_{mero} \,/\, (\omega) - D \geq 0 \}.$$

In modo analogo la condizione equivale a

$$(\omega_\infty) \leq D^- \quad (\omega)_0 \geq D^+.$$

2 divisori D e D' sono linearmente equivalenti se esiste $f \in \mathcal{M}(X)$ t.c. $\quad (D \sim D')$.

$$(f) = D - D'$$

Ovviamente $D \sim D' \implies \deg D = \deg D'$

Inoltre $D \sim D' \implies \mathcal{L}(D) \cong \mathcal{L}(D')$

Infatti $h \in \mathcal{L}(D) \overset{def}{\iff} (h) + D \geq 0$.

Consideriamo l'applicazione $h \longrightarrow h \cdot f$.

Abbiamo $(h \cdot f) = (h) + (f)$

Adesso $(h \cdot f) + D' = (h) + D \geq 0. \implies (h \cdot f) \in \mathcal{L}(D')$

Ovviamente invertibile

Dato D considerare la serie lineare completa individuata da D

$$|D| = \{ D' \in \mathrm{Div}(X) \,/\, D' \geq 0 \;\; D' \sim D \}$$

$|D|$ ha una struttura di spazio proiettivo complesso infatti

$$\mathbb{P}\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D) \setminus \{0\} / \sim \longleftrightarrow |D|$$

$$[h] \longrightarrow (h) + D = D'$$

$\dim |D| = \dim \mathcal{L}(D) - 1$.

Importanza fondamentale avrà in seguito la serie canonica (i.e. la serie lineare associata a un divisore canonico $K = (\omega)_0$ $\omega \in \Omega^1(X)$.
↑ anche meromorfa

$$|K| = \{ (\varphi)_0 \,/\, \varphi \in \Omega^1(X) \}.$$

Infatti sia $K' \sim K$ $K' \geq 0$. allora esiste una funzione meromorfa f t.c. $K' = K + (f)$

Sia $\varphi = f\omega \Rightarrow (\varphi) = (f) + (\omega) = (f) + K = K'$ quindi φ olomorfa. Viceversa $\varphi \in \Omega^1(X)$

$f = \frac{\varphi}{\omega} \in \mathcal{M}(X) \Rightarrow (\varphi)_0 \sim (\omega)_0$.

Concludiamo dimostrando che

$\forall D \in Div(X)$ è K nella serie canonica

$$I(D) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{L}(K-D) \qquad K=(\omega)_0$$

$$\| $$

$$\{\varphi \mid (\varphi)-D \geq 0\} \longrightarrow \frac{\varphi}{\omega}$$

$$\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)+K-D \geq 0.$$

viceversa $f \in \mathcal{L}(\cancel{K}-D) \qquad (f)+K-D \geq 0$

$$(f\cdot\omega)-D=(f)+K-D \geq 0 \quad \Rightarrow f\omega \in I(D).$$

Esercizio $P,Q \in \hat{\mathbb{C}} \quad P\neq Q. \Rightarrow P \sim Q.$

$$f=\left(\frac{z-Q}{z-p}\right) \qquad P+(f)=Q.$$