Esercizi del corso di Geometria

10 Marzo 2014

Esercizio 1. (1) Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calcolare i prodotti AB e BA.

Calcolare il determinante della matrice $C = AB$

(2) Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il prodotto AB e il determinante della matrice $C = AB$

Esercizio 2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare l'inversa di A, cioè una matrice $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $AB = BA = \mathrm{Id}$.

Esercizio 3.
Sia $f \colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$f(x, y) = (3x - 2y, x + 3y).$$

Calcolare la matrice di f nella base $\{(2, 1), (1, 3)\}$.

Esercizio 4.
Sia $f \colon \mathbb{R}[x]_1 \mapsto \mathbb{R}[x]_1$ l'applicazione lineare data da

$$f(p(t) = 5p(t - 1)$$

Calcolare la matrice di f nella base $\{1,\, t\}$.

Esercizio 5. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2, 3) \\ v_2 &= (1, 2, 0) \\ v_3 &= (2, 1, 1) \\ v &= (-1, 2, -1). \end{aligned}$$

Calcolare le coordinate dei vettori della base standard e di v rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Esercizio 6. (lungo!!) Siano v_1, v_2 e v_3 come nell'esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'applicazione la cui matrice nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la matrice di f nella base standard.

Esercizio 7. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e consideriamo l'applicazione lineare $f\colon V \mapsto V$ data da

$$f(p(x)) = \frac{p(x) - p(0)}{x} + p(x).$$

Scelta una base di V, trovare la matrice di f rispetto a questa base e calcolarne il determinante. Perchè una scelta diversa della base dà lo stesso risultato?

Esercizio 9. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare A^{-1}.
2. Verificate che $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, ma $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Esercizio 10. In $\mathbb{R}^3$ ortonormalizzare i seguenti vettori

$$v_1 = (1, 0, 1,)^T, \ v_2 = (0, 1, -1,)^T, \ v_3 = (1, 0, 0,)$$

Esercizio 11. In $\mathbb{R}^4$ ortogonalizzare i seguenti vettori

$$v_1 = (1, 0, 1, -1)^T, \ v_2 = (0, 1, -1, 0)^T, \ v_3 = (1, 0, 0, 0)$$

Completare a una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$