Istituzioni di Geometria Superiore a.a. 16/17.
Prova scritta 18/09/17.

Esercizio 1. Sia $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la curva algebrica di equazione

$$0 = XZ^4 + X^5 + Y^5$$

Verificare che la curva è non singolare .
Trovare i punti di ramificazione dell' applicazione $F : C \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ indotta dalla funzione meromorfa $f = \frac{X}{Y}$.
Calcolare il genere di C usando la formula di Hurwitz per F.

Esercizio 2. Si consideri la curva

$$C = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid Y^6 - X^5Z - X^4Z^2 = 0\}.$$

Trovare i punti singolari della curva C. Descrivere gli scoppiamenti necessari per desingolarizzare la curva C.
Sia X la superficie di Riemann compatta associata alla curva C, dimostrare che X è iperellittica.

Esercizio 3. Si consideri la curva

$$C = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid X^4 + Y^4 - Z^4\} = 0.$$

e le rette

$$r = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2 \mid X = 0\}$$
$$s = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2 \mid X + iZ = 0\}.$$

Siano $X = C \setminus (C \cap r)]$ e $Y = C \setminus (C \cap s)$.Calcolare l' omologia a coefficienti in $\mathbb{R}$ delgli spazi topologici X e Y .

Esercizio 4. Sia $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \hat{\mathbb{C}}$, $p_1 = [0, 1] = 0$, $p_2 = [1, 0] = \infty$.
Calcolare la dimensione di $\mathcal{I}(-2p_1 - 2p_2)$.
Scrivere esplicitamente una base di $\mathcal{I}(-2p_1 - 2p_2)$.

Esercizio 5. Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ l' ellissoide di equazione

$$X^2 + Y^2/2 + Z^2/4 = 1.$$

Calcolare l' omologia a coefficienti in $\mathbb{R}$ degli spazi topologici

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus E,$$
$$Y = E \setminus \{(1, 0, 0) \cup (0, 0, 2) \cup (0, 0, -2)\}.$$