Esercizi

1. Sia Y una curva razionale non singulare che non è isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

   Verificare che Y è isomorfo a un' aperto di $\mathbb{A}^1$

   Verificare che Y è affine

   Verificare che $A(Y)$ è un UFD (difficile)
2. Verificare che ogni elemento di $PGL(1,k)$ induce un automorfismo di $\mathbb{P}^1(k)$.

   Verificare che $Aut\mathbb{P}^1$ è isomorfo a $Autk(x)$

   Vedere che $Autk(x)$ è isomorfo a $PGL(1,k)$ (Sugg: immagine di x)
3. Siano $P_1,\ldots,P_k,Q_1\ldots Q_s \in \mathring{A}^1$. Se $\mathring{A}^1 \setminus \{P_1,\ldots,P_k\}$ è isomorfo a $\mathbb{A}^1 \setminus \{Q_1,\ldots,Q_s\}$ allora $k = s$. Vero il viceversa?
4. Sia $C = \{[X,Y,Z] \in \mathbb{P}^2/Y^2Z - X^3 = 0\}$ e sia $C^0 = C \setminus \{[0,0,1]\}$ Verificare che C^0 è liscio.

   Verificare che C^0 ha una struttura di gruppo con $0 = [0,1,0]$ indotta da $\phi(t) = (t,1,t^3)$
5. Sia C una curva proiettiva, verificare che esiste un morfismo birazionale $\phi : C \to C'$ con C' una curva proiettiva piana.
6. Siano F e G fasci su X, verificare che il prefascio $U \to F(U) \oplus G(U)$ è un fascio
7. Siano F eG fasci di gruppi abeliani su X verificare che il prefascio $U \to Hom(F(U),G(U))$ è un fascio
8. Verificare che un fascio costante su uno spazio irriducibile è fiacco
9. Verificare che il fascio delle funzioni razionali di una varietà è fiacco.

10 . $X = \mathbb{P}^1$ e $Z = \{P,Q\}$, si ha abbiamo un a successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z \to 0.$$

Vedere che la mappa sulle sezioni globali non è esatta.

11 . $X = \mathbb{P}^1$ e $\mathcal{K}$ il fascio costante delle funzioni razionali.
   Verificare che $\mathcal{O}_X \to \mathcal{K}$ è un' immersione.
   Verificare che il fascio quoziente è isomorfo alla
   somma diretta di fasci

$$\sum_{p\in X} i_p(I_p)$$

con $I_p = K/\mathcal{O}_p$ e $i_p(I_p)$ il fascio a grattacielo centrato in p.

12 . X una varietà affine. Se $k[X]$ è un UFD allora $Pic(X) = 0$.

13 . in $\mathbb{P}^n$ per ogni divisore irriducibile D definiamo $deg(D)$ come il grado dell' ipersuperficie D.

Verificare che se D ha grado d allora D e dH hanno la stessa immagine in $Pic(\mathbb{P}^n)$

Se $f \in K^*$ $deg(f) = 0$

Si ha un isomorfismo

$$deg : Div(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{Z}$$

14 Sia X tale che gli anelli locali sono UFD, sia $Z \subset X$ chiuso e sia $U = X \setminus Z$.

Verificare che cè un morfismo $\psi : PicX \to Pic(U)$ con

$$\psi(\sum_{i=1}^{n} n_i D_i) = \sum_{i=1}^{n} n_i (D_i \cap U)$$

Verificare che se Z ha codimensione almeno 2 in X allora ψ è un isomorfismo.

Verificare che se Z è irriducibile di codimensione 1 , allora si ha una successione esatta

$$\mathbb{Z} \to PicX \to Pic(U) \to 0$$