Esercizi Prova 30/01/2018

Sia $\mathcal{C}$ la superficie di Riemann compatta associata alla curva algebrica piana $C_0 = \{(x,y) / x^4+y^5-x=0\}$ (1)

Sia $\pi_x : C_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ la proiezione sulla coordinata x

trovare $f : \mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ che estende π_x

Trovare i punti di ramificazione di f e calcolare il genere di $\mathcal{C}$ usando la formula di Hurwitz.

Troviamo i punti singolari di $\overline{C_0} = \{[X,Y,Z] / X^4Z+Y^5-XZ^4=0\}$

Vediamo C_0 (i.e. $Z=1$)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3-1=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 5y^4 = 0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0$$

$\Rightarrow C_0$ è liscio. In $\overline{C_0} \setminus C_0$ abbiamo solo il punto dato da $Z=0$ e quindi $[1,0,0]$

Adesso se prendiamo $X=1$ abbiamo equazione locale

$Z+Y^5-Z^4=0$ e tutto procede come prima

quindi $\mathcal{C} = \overline{C_0}$ è una sup. di Riemann compatta

$\pi_x : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$.

estudie a $f = X/Z : \mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$

"Poli potenziali" $z=0$ quindi $y^5=0$ $P_0=[1,0,0] \times 5$.

Zeri potenziali $P_1=[0,0,1] \times 5$.

Allora f è un rivestimento ramificato di grado 5

P_0, P_1 sono punti di ramificazione totale.

Ulteriori punti di ramificazione $z=1$, $x=\alpha$ $\Longrightarrow$

vediamo quando $\alpha^4+y^5-\alpha=0$ non ha radici

distinte $\qquad y=\alpha(1-\alpha^3) \qquad \alpha \neq 0$

quindi $\alpha = 1, \rho, \rho^2$ con $\rho^3=1$.

$[\rho\ 0\ 1]$, $[1,0,1]$, $[\rho^2,0,1]$ 3 ulteriori

punti di ramificazione totale quindi

$\deg(R_f) = 5 \cdot 4 = 20$

$2g-2 = -2 \cdot 5 + 20 = 10 \Rightarrow g = 6 = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ con $d=5$.

X superficie di Riemann compatta, D di grado d.
e $\varphi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$.

Verificare che $g(X) \geq d-n$. Indicare quando vale $=$

$$\ell(D) - \ell(K-D) = d - g + 1 \qquad \ell(D) = n+1$$

$$n = d - g + \ell(K-D) \qquad \text{oppure}$$

$$g = d - n + \ell(K-D) \quad \text{quindi vale} = \iff \ell(K-D) = 0.$$

Prova 15/01/2020

Sia C la sup di Riemann compatta associata alla curva piana $\{(x,y) \,/\, x^4+y^4-1=0\}$.
Calcolare il genere di C.
Sia $P=(1,0)$ verificare che $4P$ è il divisore canonico. Sia $Q=(0,1)$ Calcolare $\ell(3P+Q)$ e $\ell(2P+2Q)$

C è $X^4+Y^4-Z^4=0$ non singolare, quindi

$g(C) = 3$.

In questo caso i divisori canonici sono tagliati dalle rette di $\mathbb{P}^2$. (4)

Quindi $4P$ è un divisore canonico $\iff \exists$ retta r t.c. $I_P(r \cap C) = 4$. In particolare r deve essere la retta tangente a P.

Equazione affine della retta tg. $4(x-1) = 0$

retta proiettiva $X - Z = 0$.

Adesso $X - Z = 0$ interseca $\mathcal{C}$ nel punto $[1, 0, 1] = P$ con molteplicità 4, quindi $4P = K$ e $\ell(4P) = 3$

$\ell(3P + Q) = \ell(4P + Q - P)$ non è il divisore canonico.

quindi $\ell(3P + Q) \leq 2$. Applichiamo R.R.

$\ell(3P + Q) - \ell(K - 3P - Q) = 2$.

quindi $\ell(3P+Q) = 2$ infatti $K \not\sim 3P + Q$. quindi $\ell(K - 3P - Q) = 0$.

$\ell(2P + 2Q) - \ell(K - 2P - 2Q) = 2$.

$\ell(2P + 2Q) - \ell(2P - 2Q) = 2$.

Adesso $\ell(2P - 2Q) = 0$ perché altrimenti $\mathcal{C}$ iperellittica

ma $\varphi_K : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ è proprio l'immersione della curva in $\mathbb{P}^2$.

$\Rightarrow \ell(2P + 2Q) = 2$.

5

Sia $X=\hat{\mathbb{C}}$ $p_1=[0,1]=0$ $p_2=[1,0]=\infty$

Calcolare la dimensione di $I(-p_1 - 2p_2)$

Scrivere una base di $I(-p_1-2p_2)$.

$$I(D)=\ell(K-D) \qquad K=(dz)=-2p_2.$$

Quindi se $D=-p_1-2p_2$

$$\ell(K-D)=\ell(p_1) = \underbrace{\ell(K-p_1)}_{=0}+1-0+1$$

$$\ell(p_1)=2. \Rightarrow i(-p_1-2p_2)=2.$$

$$(\omega)+p_1+2p_2\geq 0. \qquad \omega_1=dz \qquad (\omega_1)=-2p_2.$$

$$\omega_2=\frac{dz}{z} \qquad (\omega_2)=-p_1-p_2.$$

quindi ω_1 e ω_2 sono una base.

Esercizio Si consideri la curva
$$C=\{[X,Y,Z]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,/\, Y^3Z=X^4-X^2Z^2\}$$

Desingolarizzare C. Sia X la superficie di Riemann compatta associata. Si consideri su X l'applicazione indotta da X/Y. Usare Hurwitz per calcolare il genere

Carta locale U_2 i.e $z=1$

$$y^3 = x^4 - x^2$$

Punto singolare $(0,0)$.

Scoppiamento. Posto $x = yt$ abbiamo

$$y^2(y - y^2t^4 - t^2)$$

Quindi equazione locale $y - t^2 - y^2t^4 = 0$
liscia e nella fibra sul punto $(0,0)$ vi è un
solo punto $(y,t) = (0,0)$

Posto $y = xs$. si vede che non ci sono altri punti

Al di fuori della carta U_2 ci sono i punti con $Z=0$, i.e
il punto $[0,1,0]$. Vediamolo nella carta U_1.

equazione $z = x^4 - x^2z^2$ che è liscia in $(0,0)$

Quindi un unico punto singolare $[0,0,1]$

Consideriamo la ~~a~~ funzione X/Y.

Nota: Nel punto P che è lo scoppiamento di $[0,0,1]$
abbiamo $x = yt$ quindi $X/Y = t$ e il punto
ha coordinate $(y,t) = (0,0)$

Quindi in P abbiamo uno zero.

Vediamolo $X=0 \Rightarrow Y=0$ con molteplicità 3

e $Z=0$

Quindi abbiamo $[0,1,0]$ e P_∞ con molteplicità 3

Adesso $Y=0$ $X=0$ con molt 2

oppure $X^2=Z^2$ i.e $[1,0,1]$, $[1,0-1]$

Abbiamo quindi un rivestimento 2:1. che ha 2 poli e 2 zeri distinti Posto $y=1$, $x=\alpha$

vediamo dove ramifica

$$-Z + \alpha^4 - \alpha^2 Z^2 = 0$$

$$Z^2 + \frac{Z}{\alpha^2} - \alpha^2 = 0$$

Ramifica laddove $\quad \frac{1}{\alpha^2} - 4\alpha^2 = 0 \qquad \underline{4\alpha^4 = 1}$

abbiamo 4 punti $\alpha^4 = \frac{1}{4}$ quindi

$$2g-2 = -4+4 = 0 \Rightarrow g = 1.$$

Sia X una superficie di Riemann compatta di genere 2. (8)

Sia $p \in X$ un punto. Calcolare tutti i possibili valori di np $n \in \mathbb{N}$.

$g(X) = 2 \Rightarrow \deg K = 2$.

$\Rightarrow \ell(nP) - \ell(K - nP) = n - 2 + 1 = n - 1$.

Se $n \geq 3$ $\deg(K - nP) < 0 \Rightarrow \ell(K - nP) = 0$

quindi $\ell(nP) = n - 1$.

Se $n = 0, 1 \Rightarrow \ell(0) = \ell(P) = 1$.

$\boxed{n=2}$ $\ell(2P) = \ell(K - 2P) + 1$.

$\ell(2P) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$. In particolare $\ell(2P) = 2 \iff K \sim 2P$

Equivalentemente se $2P$ è un divisore canonico i.e. se ~~f~~ φ_K ramifica in P.

Esercizio Sia $C \subseteq \mathbb{P}^2$ ~~une~~ la curva algebrica di equazione $Y^2Z + X^3 + Z^3 = 0$

Verificare che la curva è non singolare. Dare un'applicazione di grado 2. $f: C \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$

In $U_1 = \{[X,Y,Z] \,/\, Y=1\}$ (9)

Abbiamo $\mathcal{C}_1:\ Z + X^3 + Z^2 = 0$ che è non singolare

infatti $\frac{\partial f}{\partial z} = 1 + 2z \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2 \Rightarrow$

derivate si annullano per $x=0,\ z=-1/2$, ma il punto non è sulla curva.

Quando $Y=0$ abbiamo i punti $[\rho,0,1]$ con $\rho^3=-1$

Dobbiamo studiare la curva in questi punti, posto $Z=1$, abbiamo

$$Y^2 + X^3 + 1 = 0$$

punti singolari $Y=X=0$ non serve

Quindi $\mathcal{C}$ è liscia.

Per costruire un'applicazione di grado 2 basta prendere 2 rette che passano per un punto di $\mathcal{C}$.

Punto $P_0 = [0,1,0]$ rette $Z=0$ $X=0$.

$X/Z : \mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ è 2:1 ramificato.

~~Nel caso affine~~ $\cancel{\pi_x\ \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathbb{C}}$

Poli $[0,1,0]$ x3

Zeri $[0,1,0]$ e $[0\ 1, \pm i]$

Ramifica nel punto P_0. Inoltre posto $z=1$, $x=\alpha$.

$$y^2 = -1-\alpha^3 \quad \text{e nei 3 punti} \quad [\rho, 0, 1]$$

Infatti $g(C) = 1$.