Geometria I, Esonero 23/1 /13. COMPITO B

Esercizio 1. In $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea, verificare se l'applicazione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = x^5$ è un omeomorfismo.

Esercizio 2. Calcolare rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) = (x_1 + x_3)^2 + (2x_2 + x_4)^2 - x_4^2.$$

Esercizio 3. Sia (X, τ) lo spazio topologico definito da $X = \{a, b\}$ con la topologia

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}.$$

(1) Costruire un' applicazione continua f di X in sé
(2) Costruire un' applicazione non continua g di X in sé

Esercizio 4. Siano X e Y spazi topologici e siano A, B sottoinsiemi rispettivamente di X e Y. Sia $X \times Y$ lo spazio prodotto . Verificare se

$$(A \times B)^0 = A^0 \times B^0$$

Esercizio 5. Determinare, se esiste, una proiettività

$$\phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

tale che ϕ^2 sia l' identità e

$$\phi([1, 0]) = [-1, 1] \quad \text{e} \quad \phi([0, 1]) = [1, 2]$$

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^3$ dotato della topologia euclidea si consideri il sottospazio

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tali che} \quad x_3(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0\}$$

(1) stabilire se X sia compatto;
(2) stabilire se X sia connesso e se sia connesso per archi;

Università di Roma La Sapienza: a.a. 2012-13, corso di Geometria I, Enrico Arbarello, Riccardo Salvati Manni