Algebra Lineare a.a. 2011/12
Esonero del 19/01/12

(1) Sia
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$
(a) Calcolare $\det A$
(b) Calcolare A^{-1}
Risposta: $\det A = 1$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & 6 & -2 \\ -3 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Discutere, al variare del parametro λ, il sistema dato dalle seguenti equazioni
$$x - y + z = \mu, \quad x + \lambda y + z = \lambda, \quad x - y - \lambda z = 1.$$
Risposta: Un'unica soluzione per $\lambda \neq -1$, nessuna soluzione per $\lambda = -1$.

(3) Sia
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 3 & -6 & 2 \\ 4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$
Calcolare autovalori e autovettori della matrice assegnata.
Risposta: il polinomio caratteristico $(t-1)^2(t+1)$. Autovettori $(1,1,2)$ e $(1,1,1)$.

(4) Verificare che i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
formano una base di $\mathbb{Q}^3$.
Descrivere relativamente alla base duale canonica di $\mathbb{Q}^3$ la base duale v_1^*, v_2^*, v_3^*
Risposta: $v_1^* = \varphi_3\,, \quad v_2^* = -\varphi_2 - \varphi_3\,, \quad v_3^* = -\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3$

(5) Sia $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'endomorfismo rappresentato dalla matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^3$.
(a) Determinare polinomio caratteristico e polinomio minimo di φ
(b) Determinare se φ è diagonalizzabile
Risposta: $p_\varphi(t) = q_\varphi(t) = t^2(t+1)$, φ non è diagonalizzabile.