Istituzioni di Geometria Superiore a.a. 19/20.
Prova esonero 15/01/20.

Esercizio 1. Si consideri la curva
$$C = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid X^4 + Y^3Z - Z^3Y\} = 0.$$
Si consideri su C la funzione meromorfa $g = \frac{Y}{Z}$, calcolare i poli e gli zeri di g. Si consideri g come applicazione. Trovare i punti di ramificazione.

Esercizio 2. Si consideri la curva
$$C = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid X^4 + Y^4 - Z^4\} = 0.$$
Siano $P = [0, 1, 1]$ e $Q = [0, 1, -1] \in C$.Calcolare l' omologia a coefficienti in $\mathbb{R}$ dello spazio topologico
$$X = C \setminus \{P, Q\}$$

Esercizio 3. Sia $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \hat{\mathbb{C}}$, $p_1 = [0, 1] = 0$, $p_2 = [1, 0] = \infty$.
Calcolare la dimensione di $\mathcal{I}(-p_1 - 2p_2)$.
Scrivere esplicitamente una base di $\mathcal{I}(-p_1 - 2p_2)$.

Esercizio 4. Sia C la superficie di Riemann della curva algebrica piana
$$C_0 = \{(x, y)/x^4 + y^4 - 1 = 0\}.$$
Calcolare il genere di C.
Sia $P = (1, 0) \in C_0 \subset C$, Verificare che $4P$ è un divisore canonico
Sia $Q = (0, 1)$ Calcolare $l(3P + Q)$ e $l(2P + 2Q)$

Esercizio 5. Si consideri la curva
$$C = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid Y^3Z = X^4 - X^2Z^2\}.$$
Desingolarizzare C
Sia X la superficie di Riemann associata. Si consideri su X l' applicazione indotta da $f = \frac{X}{Y}$. Usare la formula di Hurwitz per calcolare il genere di X.