Istituzioni Geometria superiore a.a. 20/21.
Esonero

Esercizio 1. Sia $F(x, y) = 0$ l' equazione di una curva differenziale C. Descrivere campi vettoriali su C. Dimostrare che C è orientabile.

Sia $T_n \subset M_n(\mathbb{R})$ l' insieme delle matrici triangolari superiori. Dare esempi o descrizione dei campi vettoriali su T_n.

Soluzione breve $X = a(x, y)(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y})$ è il tipico campo vettoriale, infatti $X(F) = 0$.

Sia $\omega = \frac{\partial F}{\partial y}dx - \frac{\partial F}{\partial x}dy$, quindi $\omega(X) \neq 0$ T_n è diffeomorfo a $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, allora i campi vettoriali sono del tipo

$$\sum_{1 \leq i \leq j} a_{ij}(X)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

Esercizio 2. Siano $P = (0, 1)$ e $Q = (1, 0)$ punti in $\mathbb{C}^2$. Posto $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{P, Q\}$, calcolare $H_k(X, \mathbb{R})$.

Sia $Y \subset \mathbb{R}^4$ definito da $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ e sia $P = (0, 0, 1, 6)$ e $X = Y \setminus \{P\}$. Calcolare $H_k(X, \mathbb{R})$.

Soluzione breve Nel primo caso $X \sim S^3 \vee S^3$

Nel secondo caso

$Y \sim S^2$, $X = U$, $V = D$ con D un disco di dimensione 3, perché Y è una varietà di dimensione 3. Allora $U \cap V \sim S^2$

Esercizio 3. Sia $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, la curva algebrica di equazione di equazione

$$y^4 + x^2y^2 + x^2z^2 = 0$$

1) Trovare i punti singolari della curva C.

2) Per ogni punto singolare, calcolare quanti scoppiamenti occorrono per desingolarizzare la curva.

3) Calcolare anche quanti punti ci sono sopra ad ogni punto singolare.

Soluzione breve

I punti singolari della curva C sono $[1, 0, 0]$, $[0, 0, 1]$

Nel primo caso uno scoppiamento, nel secondo caso 2 scoppiamenti.

Sopra ad ogni punto singolare ci sono due punti.