Geometria. a.a. 2015-16, Gruppo: 3

Prova esonero del 22 Gennaio 2016

NOTA: Scrivere in stampatello sull' elaborato in alto a destra

Cognome Nome,

Numero matricola

Docente

Esercizio 1. Trovare una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard del sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{cases} v_1 = (1, 1, 0, -1), \\ v_2 = (2, -1, 1, 0) \end{cases}$$

Trovare equazioni cartesiane del sottospazio U ortogonale a W

Soluzione:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, -1),\ w_2 = \frac{1}{\sqrt{51}}(5, -4, 3, 1)$$
$$x + y - w = 0,\ 2x - y + z = 0$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}_2[x]$ si consideri il prodotto scalare

$$< p(x), q(x) >= p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(0)q(2) + p(2)q(0).$$

Verificare se il prodotto scalare è non degenere.

Calcolarne la segnatura

Soluzione: La matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base $1, x, x^2$ risulta essere

$$S = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

Il determinante è -64 pertanto il prodotto scalare è non degenere. Il polinomio caratteristicoè $-t^3 + 8t^2 + 20t - 64$, quindi per il Criterio di Cartesio la segnatura è $(2, 1)$.

Esercizio 3. Sia $S(2.\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici simmetriche $2x2$ reali Sia matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$T_A : S(2.\mathbb{R}) \to S(2.\mathbb{R})$ l' operatore

$$T_A(S) = A^T S A$$

Verificare se T_A è diagonalizzabile o triangolarizzabile.

Soluzione: La matrice associata all' operatore T_A rispetto alla base $E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}$ risulta essere

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

Il polinomio caratteristico dell' operatore T_A è $-t^3+1$ che ha un' unica radice reale. quindi non è triangolarizzabile 9 e diagonalizzabile)

Esercizio 4. Sia
$$A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$
Dire perché A è diagonalizzabile. Trovare una base ortonormale di autovettori

Soluzione: La matrice è simmetrica, quindiè diagonalizzabile. Gli autovalori sono $4, 4+\sqrt{2}, 4-\sqrt{2}$. Una base ortonormale risulta essere
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \frac{1}{2}(1,\sqrt{2},1),\ \frac{1}{2}(-1,\sqrt{2},-1)$$

Esercizio 5. Verificare che il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ non gode della proprietà associativa.

Soluzione:
$$0 = (e_1 \wedge e_1) \wedge e_2 \neq e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3 = -e_2$$