Geometria. a.a. 2013-14, Gruppo: Pf- Z

Prova scritta del 21 Novembre 2013

Esercizio 1. Si consideri il sistema di 4 equazioni in 5 incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 4t \end{cases}$$

Scrivere la matrice A dei coefficienti del sistema. Scrivere la matrice completa del sistema.
Studiare la compatibilità del sistema al variare di $t \in \mathbb{R}$. Sia $t = 1$. Determinare l'insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^5$ delle soluzioni del sistema.

Esercizio 2. Sia $M_{22}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici due per due a coefficienti reali. Determinare un'applicazione iniettiva $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{22}(\mathbb{R})$ la cui immagine contenga i vettori

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinare un'applicazione $S : M_{22}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che l applicazione $S \cdot T$ sia l' identità.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e siano U e W i sottospazi di V definiti da

$$U = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix} \right), \quad W = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix} \right)$$

Determinare la dimensione di U e quella di W. Determinare una base per $U + W$. Determinare la dimensione di $U \cap W$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 4. Calcolare il prodotto $C = AB$ con

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Verificare se C è invertibile.
Verificare per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

è invertibile.
Calcolare A_2^{-1}