Geometria. a.a. 2015-16, Gruppo: L- P

Prova scritta del 20 Novembre 2015

Esercizio 1. Si consideri il sistema di 3 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

Scrivere la matrice A dei coefficienti del sistema. Scrivere la matrice completa del sistema.
Determinare l'insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema.
Soluzione

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \qquad (A:b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

$$S = 1/2 \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} -7 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale a 2 e sia

$$T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$$

l' applicazione lineare definita da

$$T(p(t)) = p(t-2)$$

Determinare la matrice associata a T rispetto alla base standard e rispetto alla base $2, 1+t, 2-t+t^2$

Verificare che T è un isomorfismo.

Soluzione Matrici associate alla base standard e all' altra base

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

T è un isomorfismo , perché le matrici sono invertibili

Esercizio 3. Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ e siano U e W i sottospazi di V definiti da

$$U = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$W = \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \text{tali che } a+d=0,\ a+b+c=0 \right)$$

Determinare la dimensione di U e quella di W. Determinare una base per $U+W$.
Determinare la dimensione di $U \cap W$. Stabilire se $M_{2,2} = U \oplus W$.

Soluzione Identificando con $\mathbb{R}^4$ si ha che una base di U è data da

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Una base di W è data da

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

L' unione è una base di V.

Esercizio 4. Calcolare il prodotto $C = AB$ con

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Verificare se C è invertibile.
Verificare per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_t = \begin{vmatrix} 1 & t & 2 \\ t & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

è invertibile.

Soluzione C non è invertibile, perché le colonne di B sono dipendenti, oppure è singolare la matrice

$$C = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 7 & 13 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

$\det A_t = -t^2 + 4t - 1$, quindi la matrice è invertibile per $t \neq 2 \pm \sqrt{3}$

Esercizio 5. Nello spazio $\mathcal{A}^3$, fissato un riferimento affine $RA(O, A_1, A_2, A_3)$ determinare equazioni cartesiane della retta r passante per i punti $P = (0, 1, 2)$ e $Q = (3, -1, 2)$.

noindent *Soluzione* Equazioni della retta sono

$$2x + 3y = 3, \quad z = 2$$