**Geometria 1. a.a. 12/13.**

**Esercizi del 3/12/2012**

**Esercizio 1.** Siano $A, B$ sottinsiemi di uno spazio topologico.

Verificare che
$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$$
Verificare che è falsa l'affermazione
$$A^0 \cup B^0 = (A \cup B)^0.$$

**Esercizio 2.** Sul piano $\mathbb{R}^2$ si consideri la famiglia formata da $\emptyset$, da $\mathbb{R}^2$ e dai dischi aperti di raggio $r > 0$, i.e.
$$D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < r\}$$
Determinare che si tratta di una topologia e determinare la chiusura dell' insieme $\{xy = 1\}$.

**Esercizio 3.** Uno spazio topologico $X$ è $T_1$ se ogni sottinsieme finito è chiuso. Verificare che la definizione è equivalente a
$$\{x\} = \bigcap_{U \in \{I(x)\}} U, \text{ per ogni } x \in X.$$

**Esercizio 4.** Supponiamo che l' insieme $X$ sia dotato di due differenti topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$.

Verificare che l' applicazione identità
$$id : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$$
è continua $\iff$ la topologia $\mathcal{T}_1$è più fine della topologia $\mathcal{T}_2$.

**Esercizio 5.** Siano, $m, n \in \mathbb{N}$ con $n > m$, dotiamo gli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ della topologia euclidea.

Verificare che l' applicazione
$$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
data da
$$\pi((x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_m)$$
è aperta , ma non chiusa

Verificare che l' applicazione
$$\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
data da
$$\iota((x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$
è chiusa , ma non aperta

**Esercizio 6.** Dotare gli spazi proiettivi $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ di una topologia in modo che sulle rispettive restizioni a $\mathbb{C}$ e a $\mathbb{R}$ siano indotte le topologie euclidee.

**Esercizio 7.** Sia $f : X \to Y$ un' applicazione tra due spazi topologici.

Verificare che se $D \subset Y$è denso, allora $f^{-1}(D) \subset X$ è denso.