

## ESERCIZI SU SPAZIO PROIETTIVO

**Esercizio 1.** Determinare per quali punti  $[t_0, t_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , i punti  $[1, 2, 1]$ ,  $[t_0, t_1, t_1]$  e  $[0, t_0, t_1]$  sono allineati in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 2.** Determinare le equazioni di tutti i piani  $P \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  contenenti la retta  $x_0 = x_1 = 0$ .

**Esercizio 3.** Determinare la retta  $r \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  passante per il punto  $P = [1, 1, 1, 1]$  e che interseca la rette  $s, t$  di equazioni

$$\begin{aligned} s : x_0 = x_1 = 0, \\ t : x_2 = x_3 = 0. \end{aligned}$$

**Esercizio 4.** Dimostrare che ogni proiettività di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  possiede almeno un punto fisso.

**Esercizio 5.** Dimostrare che per ogni proiettività  $\phi$  di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  esiste un iperpiano proiettivo  $H \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  tale che  $\phi(H) = H$ .

**Esercizio 6.** Si considerino i quattro punti di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ :  $a = [1, 1]$ ,  $b = [1, 0]$ ,  $c = [0, 1]$ ,  $d = [3, 1]$ .

- (1) Calcolare il birapporto  $(abcd) \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ .
- (2) Determinare la proiettività  $\phi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tale che  $\phi(a) = b$ ,  $\phi(b) = a$ ,  $\phi(c) = d$  e dimostrare che  $\phi(d) = c$  e che  $\phi^2$  è l'identità.

**Esercizio 7.** Sia  $\phi: \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  una proiettività. Dimostrare che il luogo dei punti fissi

$$Fix(\phi) = \{p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid \phi(p) = p\}$$

è unione di al più  $n + 1$  sottospazi proiettivi. Per ogni  $1 \leq d \leq n + 1$  trovare una proiettività  $\phi_d: \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  tale che  $Fix(\phi)$  è unione di esattamente  $d$  sottospazi proiettivi, disgiunti due a due.

**Esercizio 8.** Sia  $\phi$  una proiettività di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  diversa dall'identità e tale che  $\phi^3 = Id$ . Dimostrare che  $\phi$  non ha punti fissi.