Esercizi

1. Verificare se l' ideale $I =< y - x^2, y >$è radicale.
2. Siano F e G polinomi in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Sia F irriducibile. Si dimostri che se G si annulla sugli zeri di F allora F divide G.
3. Verificare che la somma, il prodotto , l'intersezione di ideali omogenei è ancora un ideale omogeneo e che il radicale di un ideale omogeneo è ancora un ideale omogeneo.
4. Sia $Y \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ un insieme algebrico proiettivo e $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{O\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ l'applicazione quoziente, dimostrare che $\pi^{-1}(Y) \cup \{O\}$è un insieme algebrico affine
5. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, siano Q_1 e Q_2 rispettivamente definite dalle equazioni $x_0x_1 - x_3x_4 = 0$ e $x_0^2 - x_1x_3 = 0$. Verificare che $Q_1 \cap Q_2$ non è una varietà proiettiva.
6. Verificare con un esempio che la topologia delle varietà prodotto non è la topologia prodotto.
7. Verificare che l'immagine dell' applicazione di Segre di

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$$

è una quadrica che contiene due famiglie di rette proiettive.

8. Dimostrare che il prodotto di due varietà quasi–proiettive è ancora una varietà quasi–proiettiva.

9. Sia X una varietà proiettiva (affine), dimostrare che la diagonale $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ è una varietà proiettiva (affine).
10. Siano X e Y le curve piane di equazione $y = x^2$ e $xy = 1$ rispettivamente, verificare che non sono isomorfe.

11. Dimostrare che $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non è una varietà affine

12. Dimostrare che ogni conica in $\mathbb{A}^2$ è isomorfa a $\mathbb{A}^1$ oppure a $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.
Dimostrare che ogni conica in $\mathbb{P}^2$ è isomorfa a $\mathbb{P}^1$

13. Dimostrare che $Y = \{(t, t^2, t^3)\} \subset \mathbb{A}^3$ è una varietà affine isomorfa a $\mathbb{A}^1$.

14. Sia $\psi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ un morfismo dato da n polinomi

$$g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n)$$

e sia

$$J(x_1, \ldots, x_n) = det(\partial g_i/\partial x_j)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Dimostrare che se ψ è un isomorfismo, allora $J(x_1, \ldots, x_n) = c \neq 0$
Nota: l' affermazione inversa é la Congettura Jacobiana!!

15. Dimostrare che $SL(n, \mathbb{C})$ è una varietà affine.

16. Dimostrare che $GL(n, \mathbb{C})$ è una varietà affine.

17. Verifiicare se $PGL(n, \mathbb{C})$ è una varietà affine o proiettiva.

18. Dimostrare che il punto è l' unica varietà affine e proiettiva.

19. Sia H un iperpiano di $\mathbb{P}^n$ e $p \in X = \mathbb{P}^n \setminus H$ un punto. Per ogni $q \in X$, indichiamo con r_q l'unica retta passante per p e q.

Definiamo un'applicazione

$$\pi : X \to H$$

ponendo $\pi(q) = r_q \cup H$. Tale applicazione è detta la proiezione da p su H; verificare che è un morfismo.

20. Sia $\mathcal{O}_{p,X}$ l'anello locale al punto p di una varietà X, verificare che 'e un anello noetheriano.

21. Sia $\mathcal{O}_{p,X}$ l'anello locale al punto p di una varietà X, verificare che c'è una corrispondenza biunivoca tra gli ideali primi di $\mathcal{O}_{p,X}$ e le varietà passanti per il punto p.

22. Verificare che una ipersuperficie di $\mathbb{A}^n$ ha dimensione $n - 1$

23. Trovare i punti singolari delle curve piane

a) $x^4 - y^2 = 0$
b) $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$
c) $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$.

24. Sia p un punto doppio di una curva algebrica di equazione $f(x, y) = 0$, verificare che è un nodo $\iff$ $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}^2(p) \neq \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x}(p)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y}(p)$.

25. Sia X una varietà, $p \in X$, $m_p \subset \mathcal{O}_{p,X}$ l'ideale massimale dell' anello locale; verificare che

$$T_p(X) \cong (m_p/m_p^2)^*$$

26. Costruire un morfismo birazionale tra $\mathbb{A}^1$ e la curva affine $\mathcal{C}$ di equazione $y^2 = x^2(x + 1)$.

27. Dimostrare che la quadrica

$$Q : X_0X_2 - X_1X_3 = 0 \subset \mathbb{P}^3$$

è birazionale a $\mathbb{P}^2$.

28. Verificare che l'applicazione $\psi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ data da

$$\psi([x_0, x_1, x_2]) = ([1/x_0, 1/x_1, 1/x_2]$$

è birazionale

29. Dimostrare che se $\psi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ è un morfismo birazionale, allora è un isomorfismo.

30. Dimostrare che $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è birazionale a $\mathbb{P}^{n+m}$.

32. Dimostrare che $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ non è isomorfo a $\mathbb{P}^2$.

33. Sia $\phi : X \to Y$un morfismo di varietà affini, verificare che ϕ è dominante iff ϕ^* è iniettivo.

34. Siano ϕ_1 e ϕ_2 le proiezioni della parabola $y = x^2$ sui due assi, studiare l' applicazioni indotte $T_O(\phi_i)$

35. Siano V e W insiemi algebrici in $\mathbb{A}^n$. Dimostrare che $V = W \iff I(V) = I(W)$

36 Sia $\mathcal{C}$ una collezione non vuota di ideali in un anello noetheriano R. Allora $\mathcal{C}$ ha elementi massimali

37 Decomporre $\mathcal{Z}(X^2 + Y^2 - 1, X^2 - Z^2 - 1) \subset \mathbb{A}^3$ in componenti irriducibili.

38 Sia $I = (X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3) \subset k[X, Y, Z]$. Definiamo

$$\alpha : k[X, Y, Z] \to k[T],$$

con $\alpha(X) = T^9,\ \alpha(Y) = T^6,\ \alpha(Z) = T^4$. Verificare che ogni elemento di $k[X, Y, Z]/I$ è del tipo

$$F = A + XB + YC + XYD, \text{ con } A, B, C, D \in k[Z]$$

38a Verificare che se $\alpha(F) = 0$ allora $F = 0 \in [X, Y, Z]/I$

38b Verificare che se $\operatorname{Ker} \alpha = I$ e I è un ideale primo.

38c Verificare che l' applicazione indotta $f : \mathbb{A}^1 \to \mathcal{Z}(I)$ è biettiva , ma non è un isomorfismo.

39 Verificare che una cubica singolare in $\mathbb{P}^2$ è razionale.

40 X, Y varietá, verificare che se esiste un' applicazione razionale $\phi : X \to Y$, dominante, allora $dimY \leq dimX$

41 Sia X una curva (varietà di dimensione 1), verificare che ha solo un numero finito di punti singolari