Geometria Analitica- Prova scritta

Cognome Lb-Z

2 Febbraio 2010

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 e $\langle p(t), q(t)\rangle$ il prodotto scalare definito da $p(0)q(1) + p(1)q(0) - p(-1)q(-1)$.
Verificare se il prodotto scalare è non degenere
Determinare una base del sottospazio ortogonale al vettore $1 + t + t^2$ *Sol.* Fissata

una base possiamo associare alla forma bilineare indotta dal prodotto scalare una matrice simmetrica . Scegliamo la base $1, t, t^2$, la matrice associata risulta essere

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Il determinante della matrice è diverso da zero, quindi il prodotto scalare è non degenere.
il vettore $1+t+t^2$ ha coordinate $(1, 1, 1)$ rispetto alla base scelta, quindi un vettore $a + bt + ct^2$ è ortogonale al vettore $1 + t + t^2 \iff$

$$(1,1,1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = 0$$

Quindi abbiamo che le coordinate dei vettori ortogonali al vettore $1 + t + t^2$ soddisfano l' equazione
$3a + 2b = 0$. Pertanto una base è formata da $2 - 3t, \quad t^2$

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ determinare un' equazione cartesiana e un' equazione parametrica della retta passante per i punti $[1, -1, 0]$ e per il punto improprio della retta affine

$$X + Y = 1.$$

Sol. Il punto improprio è $[0, 1, -1]$ un' equazione parametrica della retta passante per i punte è

$$X_0 = s, \quad X_1 = -s + t, \quad X_2 = -t$$

Un' equazione cartesiana è $X_0 + X_1 + X_2 = 0$

Esercizio 3 . Siano

$$P_0 = [1, -1, 1],\ P_1 = [2, 1, 0],\ P_2 = [0, 2, 1],\ M = [1, 1, 0]$$

Determinare la formula $Y = AX$ del cambiamento di coordinate dal riferimento standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ al riferimento determinato dai punti P_0, P_1, P_2, M.
Trovare le nuove coordinate del punto $[1, -2, 1]$
Sol. Poniamo

$$v_0 = (1, -1, 1),\ v_1 = (2, 1, 0),\ v_2 = (0, 2, 1),\ v = (1, 1, 1)]$$

Abbiamo che $-v_0 + 4v_1 + v_2 = 7v$ Quindi la matrice

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

è l' inversa della matrice del cambiamento di coordinate , a meno di un fattore di proporzionalità. Pertanto

$$B = \begin{vmatrix} 4 & -8 & 16 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & -8 & -12 \end{vmatrix}$$

è la matrice del cambiamento di coordinate . L nuove coordinate del punto sono $[40, 1, 8]$.

Esercizio 4. Siano A e B sottinsiemi di uno spazio topologico X . Verificare che

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

Dare un esempio in cui l' inclusione è propria.
Sol. Abbiamo che $A \cap B \subset A$, quindi $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$ e in modo simile $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$, quindi

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea $A = (0, 1)$ e $B = (1, 2)$. Allora

$$\overline{A \cap B} = \emptyset \subset \overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$$

Esercizio 5. Dimostrare che

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$$
$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$$

con topologia euclidea indotta non sono omeomorfi .
Sol. Supponiamo che esista $f : X \to Y$ un omeomorfismo. Sia $P \in X$, necessariamente abbiamo che $X \setminus \{P\}$ e $Y \setminus \{f(P)\}$ sono omeomorfi Sia $f(P) = (0, 0)$. allora si ha che $Y \setminus \{f(P)\}$ ha tre componenti connesse, invece togliendo un punto allo spazio X otteniamo al più due componenti connesse