Prova scritta di Geometria Analitica (Lb-Z) con soluzioni stringate

19 Gennaio 2010

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$f(x,y,z) := 2x^2 + 2xz + y^2 - 2yz + (3/2)z^2$$

(1) Determinate indice di nullità e segnatura di f.

(2) Sia $<,>$ la forma bilineare simmetrica associata a f, determinare una base dello spazio $V_0 = \{v \in \mathbb{R}^3 / < v, w >= 0, \text{ per ogni } w \in \mathbb{R}^3\}$

Soluzione Il polinomio caratteristico della matrice associata alla forma quadratica risulta essere

$$t^3 - (9/2)t^2 + (9/2)t$$

Applicando il Criterio di Cartesio abbiamo 2 autovalori positivi e uno nullo. Quindi indice di nullità eguale a 1 e segnatura eguale a $(2,0)$

Una base dello spazio V_0 è data dagli autovettori con autovalore nullo i.e. $v = (1, -2, -2)$

Esercizio 2. Spazio affine $\mathcal{A}^2(\mathbb{R})$. Classificare le seguenti coniche

$$5X^2 - 26XY + 5Y^2 + 72 = 0; \quad 2X^2 + 5XY - 3Y^2 + 2X + 6Y = 0$$

$$2X^2 + 4XY + 5Y^2 - 6 = 0$$

Soluzione Calcolando gli invarianti affini (determinante della matrice associata A, determinante di A_0, segno di A_0, esistenza di punti reali), le coniche risultano essere: iperbole non degenere, iperbole degenere (2 rette incidenti), ellisse a punti reali

Esercizio 3. Siano

$$P_1 = [1, 1, 0, 0],\ P_2 = [1, 0, -1, 0],\ P_3 = [1, 2, 1, 0], P_4 = [3, 1, -2, 0]$$

punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

(1) Verificare che i 4 punti sono allineati

(2) Calcolare $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$

Soluzione la retta passante per i punti P_1 e P_2 ha equazioni parametriche $P = sP_1 + tP_2$ che in coordinate diventano

$$X_0 = s + t, \quad X_1 = s, \quad X_2 = -t, \quad X_3 = 0.$$

Il punto P_3 corrisponde al caso $s = 2, t = -1$. Il punto P_4 corrisponde al caso $s = 1, t = 2$.

Un riferimento fondamentale è dato da

$$P_1 = [2, 2, 0, 0],\ P_2 = [-1, 0, 1, 0],\ P_3 = [1, 2, 1, 0]$$

quindi le coordinate di P_4 sono $[(1/2), -2]$ e $\beta = -4$

Esercizio 4. Spazio proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ Sia $P = [1, 1, -3$, $Q = [0, 1, 1]$ e siano

$$r_1 : X_0 = 0,\ r_2 : X_0 + X_1 = 0, r_3 : X_0 + X_1 + X_2 = 0;$$

$$s_1 : X_1 = 0,\ s_2 : X_2 + X_1 = 0, s_3 : X_0 + X_1 + X_2 = 0$$

due terne di rette. Determinare la proiettività f tale che

$$f(P) = Q, \quad f(r_i) = s_i,\ i = 1, 2, 3$$

Soluzione Siano

$$P_{ij} = r_i \cap r_j \text{ e } Q_{ij} = s_i \cap s_j \text{ con } 1 \leq i < j \leq 3$$

Ovviamente $f(P_{ij}) = Q_{ij}$. Abbiamo quindi 4 punti in posizione generale a cui corrispondono 4 punti in posizione generale La matrice associata alla proiettività è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z)/x = 0\}$$

con topologia euclidea. Verificare se X è connesso.

Soluzione X non è connesso , infatti la funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y, z) = x$ ha immagine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ che non è connesso, quindi anche X non lo è.