Geometria Analitica- II prova di esonero

Cognome Lb-Z

14 Gennaio 2010

Esercizio 1. Determinare la proiettività f di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f([0,1]) = [0,1],\ f([1,2]) = [-1,2],\ f([1,-1]) = [1,1]$$

Sol. Un semplice conto dà la matrice associata a f:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ verificare che i punti

$$P_1 = [0,1,-1],\ P_2 = [-1,0,1],\ P_3 = [1,-1,0]$$

sono allineati.

Trovare le coordinate proiettive del punto $P_4 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = 2$$

Sol. I tre punti sono allineati , perché

$$\det \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Inoltre, posto

$$v_1 = (0,1,-1),\ v_2 = (-1,0,1),\ v_3 = (1,-1,0)$$

si ha $v_3 = -v_1 - v_2$, quindi

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = 2 \iff P_4 = [-v_1 - 2v_2] = [2,-1,-1]$$

Esercizio 3 . Sia

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z)/x = y = 0\}$$

con topologia euclidea. Verificare che X è connesso.

Sol. Abbiamo che X è omeomorfo a

$$(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}$$

Entrambi sono connessi e il loro prodotto è connesso.

Esercizio 4. Siano X uno spazio topologico e sia A un suo sottinsieme. Ricordiamo che il sottinsieme

$$\partial A = \overline{A} \cap X \setminus A^0$$

è detto frontiera di A.

Siano X uno spazio topologico di Hausdorff e Kun suo sottinsieme compatto, verificare che ∂K è compatto

Sol. Poiché X è uno spazio topologico di Hausdorff e K un suo sottinsieme compatto, K è chiuso.

$$\partial K = K \cap (X \setminus K^0) \subset K$$

è chiuso in un compatto, quindi è compatto