Geometria Analitica - I prova di esonero (con soluzioni)
R. Salvati Manni

13 Novembre 2009

GUSTIFICATE LE RISPOSTE!

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$f(x, y, z) := x^2 + 2xy + 4xz + 2yz + z^2.$$

Determinate indice di nullità e segnatura di f.

*(Ri)Soluzione:*L' indice di nullità è 0 la segnatura è $(1, 2)$. Si può procedere nel modo seguente : si calcola il polinomio caratteristico della matrice associata

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = t^3 - 2t^2 - 5t - 2$$

e si applica il criterio di Cartesio

Esercizio 2. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}^2$ la conica definita da

$$\mathcal{C} = V(2x^2 + 4xy - y^2 + x - 2y - 1).$$

Determinate un cambiamento di coordinate cartesiane (corrispondente a un altro sistema di riferimento <u>ortonormale</u>) tale che l'equazione di $\mathcal{C}$ nel nuovo sistema di coordinate sia in forma canonica, e determinate la forma canonica di $\mathcal{C}$.

(Ri)Soluzione: Siano (u, v) le coordinate del "nuovo"sistema Cartesiano RC' date da

$$\begin{aligned} u = &\quad \tfrac{2}{\sqrt{5}}x + \tfrac{1}{\sqrt{5}}y \\ v = &\quad \tfrac{1}{\sqrt{5}}x - \tfrac{2}{\sqrt{5}}y - \tfrac{\sqrt{5}}{4} \end{aligned} \tag{1}$$

L'equazione di $\mathcal{C}$ nel sistema RC' è in forma canonica ed è dato da

$$\mathcal{C} : \frac{u^2}{1/8} - \frac{v^2}{3/16} = 1. \tag{2}$$

(Quindi $\mathcal{C}$ è un'iperbole.) Come si arriva a tale cambiamento di coordinate? Il primo passo consiste nel passare a coordinate (s, t) di un nuovo sistema di coordinate Cartesiane in modo da diagonalizzare il termine dominante dell'equazione di $\mathcal{C}$. Sia M la matrice associate alla forma quadratica $g(x,y) = 2x^2 + 4xy - y^2$ cioè il termine dominante dell'equazione di $\mathcal{C}$ nelle coordinate (x,y). Allora

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Per il Teorema spettrale esiste una base ortonormale di autovettori di M e nelle coordinate relative a una tale base g sarà diagonalizzata. Il polinomio caratteristico di M è

$$p_M(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 3).$$

Una base ortonormale di autovettori è $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2),\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\}$. Siano (s,t) le coordinate del riferimento Cartesiano di origine $(0,0)$ e base dei vettori data da $\mathcal{B}$. Allora

$$\begin{aligned} x = &\quad \tfrac{1}{\sqrt{5}}s + \tfrac{2}{\sqrt{5}}t \\ y = &\quad -\tfrac{2}{\sqrt{5}}s + \tfrac{1}{\sqrt{5}}t \end{aligned}$$

Segue che

$$\mathcal{C} = V(-2s^2 + 3t^2 + \sqrt{5}s - 1).$$

Ora trasliamo: nel nuovo sistema di riferimento l'origine è $(\sqrt{5}/4, 0)$; le nuovissime coordinate (u,v) sono date da

$$\begin{aligned} u = &\quad t \\ v = &\quad s - \tfrac{\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Un facile calcolo dà che l'equazione di $\mathcal{C}$ nelle coordinate (u,v) è data da (2) e che la relazione tra le coordinate (u,v) e le (x,y) è data da (1).

Esercizio 3. Sia $M \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ la matrice definite da

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

Definiamo $H\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ con la formula $H(X,Y) = X^t \cdot M \cdot \overline{Y}$ dove $X, Y \in M_{2,1}(\mathbb{C})$.

(1) Dimostrate che H è un prodotto Hermitiano.

(2) Sia

$$A := \begin{pmatrix} -i & 0 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

e $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione lineare definita da A cioè $f(X) := A \cdot X$ dove $X \in M_{2,1}(\mathbb{C})$. Determinate se f è o non è auto-aggiunta per H.

(Ri)Soluzione: (1): La matrice M è autoaggiunta relativamente alla forma Hermitiana standard su $\mathbb{C}^2$. Quindi risulta una semplice verifica dimostrare che H è un prodotto Hermitiano.

$$H(X,Y) =^t XM\overline{Y} =^t \overline{Y}^t MX = \overline{{}^tYM\overline{X}} = \overline{H(Y,X)}$$

(2): A è autoaggiunta per H se e solo se ${}^tAM = M \cdot \overline{A}$. Un calcolo dà che vale

$$\begin{aligned} {}^tAM &= \begin{pmatrix} -1-i & * \\ * & -* \end{pmatrix}. \\ &= M\overline{A} = \begin{pmatrix} -1+i & * \\ * & -* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quindi A non è autoaggiunta per H.

Esercizio 4. Spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

(1) Verificare che i punti $P_1 = [2, -1, -1, -3]$, $P_2 = [-1, 2, 1, 2]$ $eP_2 = [5, 8, 1, -4]$ sono allineati.

(2) Enunciare l'affermazione duale a: tre punti distinti sono allineati.

(Ri)Soluzione: (1): I tre punti sono allineati , infatti la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

ha rango 2.
L'affermazione duale è: tre piani distinti formano fascio