Esercizio 1: Dare un campo vettoriale su S^n equivale a dare un'applicazione C^∞ $\phi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con $\phi(x) \perp x$.

<u>Sol</u>: $X = \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ campo vettoriale

$F = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1 = 0$ equazione della sfera.

Abbiamo $X(F) = 2 \sum_{i=1}^{n+1} x_i a_i(x) = 0$

la funzione $\Phi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$(x_1 \dots x_{n+1}) \longmapsto \Phi(a_1(x) \dots a_{n+1}(x))$

Esercizio 2 Calcolare lo spazio tangente ad

$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$

Debbo calcolare $\frac{d}{dt} f(a + tX) \Big|_{t=0}$

dove $f(Y) = \det Y - 1$.

$$\det \begin{pmatrix} tx_{11} & 1 + tx_{12} \\ -1 + x_{21} t & tx_{22} \end{pmatrix} = t^2 \det X + t(x_{12} - x_{21}) + 1$$

Quindi abbiamo $x_{12} - x_{21} = 0$

$$T_a(SL(2, \mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ +b & d \end{pmatrix} \right\}$$

Matrici simmetriche