Geometria. a.a. 2015-16, Gruppo: 3

Prova scritta del 23 Febbraio 2014

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e siano U e W i sottospazi di V definiti da

$$U = \text{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{array} \right| \right), \quad W = \text{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{array} \right| \right)$$

Determinare la dimensione di U e quella di W.
Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 2. Verificare se la matrice

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{array} \right|;$$

é diagonalizzabile.
Trovare gli autovettori.

Esercizio 3. Siano r e s le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$$

Verificare se le rette sono sghembe
Calcolare la distanza tra le due rette.

Esercizio 4. Nello spazio dei polinomi di grado ≤ 2, $\mathbb{R}_2[x]$, è dato il prodotto scalare definito positivo

$$< p(t), q(t) >= 2p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

Trovare una base ortonormale.
Verificare se è ortogonale l' operatore T definito da

$$T(a + bx + cx^2) = \frac{4a + \sqrt{2}b + c}{2\sqrt{2}} + \frac{-\sqrt{2}b + c}{2}x + \frac{-\sqrt{2}b + c}{\sqrt{2}}x^2$$

Esercizio 5. Sia $C \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile con autovalori

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

Trovare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\left| \begin{array}{cc} k + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & k + c_{22} \end{array} \right|$$

è invertibile.