

**Geometria. a.a. 2015-16,**

Prova scritta del 24 giugno 2016, doc. Salvati Manni

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^3$  sia assegnato il prodotto scalare

$$\langle X, Y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2$$

Verificare che tale prodotto scalare è definito positivo.

Trovare una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  rispetto al dato prodotto scalare

**Esercizio 2.** Verificare se la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & -5 \\ -3 & 6 & -5 \end{vmatrix};$$

è diagonalizzabile.

Trovare gli autovettori.

**Esercizio 3.** Siano  $r$  e  $s$  le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

Verificare che le rette sono complanari

Trovare un'equazione cartesiana del piano che contiene le due rette.

**Esercizio 4.** Nello spazio  $\mathbb{R}^2$  sia assegnato il prodotto scalare definito positivo

$$\langle X, Y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

Verificare quali tra i seguenti operatori risultano essere simmetrici rispetto al prodotto scalare assegnato:

$$T_1(x, y) = (2x + 2y, x), \quad e \quad T_2(x, y) = (x, 2y).$$

**Esercizio 5.** Sia  $V \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio generato dai vettori  $(1, 0, 2, 1)$  e  $(-1, 0, 1, 2)$ .  
Sia  $W \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio formato dai vettori  $w = (a, b, c, d)$  che soddisfano le equazioni

$$c - d - a = 0, \quad a + 2b = 0.$$

Verificare se

$$\mathbb{R}^4 = V + W$$