Prova del 23/09/14

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e siano U e W i sottospazi di V definiti da $U = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$
e

$$W = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

Determinare la dimensione di U e quella di W. Determinare una base per $U + W$. Determinare la dimensione di $U \cap W$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale siano date le rette r e s di equazioni:

$$r : \begin{cases} x_1 = 1 + 3t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

a) si determini la posizione rispettiva di r e s
b) si determini un'equazione cartesiana del piano π contenente s e parallelo a r.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(a, b, c, d) = (a, b + d, c)$.
a) si trovi la matrice la matrice A che esprime f rispetto alle basi standard,
b) si trovi una base per il nucleo e una per l'immagine di f
c) si determini $f^{-1}(1, 1, 0)$.

Esercizio 4. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ sia definito il prodotto scalare definito positivo

$$< X, Y >= 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

Sia T l' operatore definito da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 + 2x_3, 3x_2)$$

a) verificare se T è simmetrico
b) trovare gli autovettori di T