Capitolo 9

Superfici riemanniane

Sia S una superficie differenziabile, $U \subseteq S$ un aperto e $\mathcal{V}(U)$ i campi vettoriali definiti in U.

Ogni spazio tangente $T_p(S)$ può essere equipaggiato di una metrica euclidea e studiato da questo punto di vista. L'idea della geometria riemanniana è di globalizzare tale metrica a tutta la superficie S e studiare in "modo euclideo" i campi vettoriali.

La metrica Riemanniana ci permette di "misurare". Misureremo vettori tangenti, campi vettoriali, forme differenziali. Combinando la teoria dell'integrazione con la metrica possiamo misurare aree e lunghezze S e lo scarto tra S e il piano euclideo.

Misureremo, cioè, la curvatura di S ed individueremo in essa l'ostruzione a rendere "piatta" una superficie.

La nostra trattazione si suddividerà naturalmente in due parti, una di carattere tangente che sarà affrontata in questo capitolo e l'altra di carattere "cotangente" che sarà trattata in seguito.

1 Curvatura gaussiana

In questa prima sezione studieremo la forma di una superficie. Cominciamo ora a studiare proprietà metriche intrinseche di una superficie differenziabile S, senza considerarla immersa in $\mathbb{R}^n$. In seguito vedremo come nel caso di superfici immerse in $\mathbb{R}^3$ ritroveremo fatti già noti.

Definizione (1.1). *Una superficie differenziale S si dice riemanniana se per* *ogni* $p \in S$ *lo spazio tangente* $T_p(S)$ *è equipaggiato di un prodotto scalare* $\langle , \rangle_p$ *tale che presi comunque due campi vettoriali* V, W *appartenenti a* $\mathcal{V}(S)$ *la funzione* $p \to \langle V(p), W(p) \rangle_p$ *è* C^∞.

Tradotto in coordinate locali, sia (U, φ) una carta locale, sia $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ una base dello $\mathcal{E}^0(U)$ modulo $\mathcal{V}(U)$, posto

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i} , \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = g_{ij} \ , \quad g_{ij} = g_{ji} \quad i, j = 1, 2 \tag{1.1}$$

abbiamo la seguente forma bilineare e simmetrica definita su $\mathcal{V}(U)$

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

cosicché dati

$$V = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \ , \ W = b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathcal{V}(U)$$

si ha

$$\langle V, W \rangle|_U = ds^2(V, W) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} a_i b_j \tag{1.2}$$

La notazione ds^2 proviene dal fatto che assegnata una curva $\gamma : I \to S$ si definisce la lunghezza di γ ponendo

$$l(\gamma) = \int_0^1 \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2} dt = \int_0^1 ds(\gamma', \gamma')$$

Esempio. Nel caso di superfici $S \subseteq \mathbb{R}^3$ abbiamo che il prodotto scalare non è altro che la restrizione dell'abituale prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ ristretto a $T_p(S)$ e $g_{11} = E$, $g_{12} = F$, $g_{22} = G$.

Osservazione. Su ogni superficie differenziabile S può essere introdotta una metrica riemanniana.

Sia infatti $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un ricoprimento di S con carte locali introduciamo in U_α la metrica riemanniana indotta dall'identificazione di U_α con un aperto di $\mathbb{R}^2$, i.e.

$$ds^2_\alpha = dx^\alpha_i \otimes dx^\alpha_1 + dx^\alpha_2 \otimes dx^\alpha_2 \tag{1.3}$$

(ovvero $g_{ij} = \delta_{ij}$).

Sia ora λ_α una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. Ora $\lambda_\alpha s_\alpha^2$ come forma è definita su $\mathcal{V}(S) \times \mathcal{V}(S)$, posto

$$ds^2 = \sum_\alpha \lambda_\alpha ds_\alpha^2 \tag{1.4}$$

abbiamo una metrica riemanniana su S.

Sia ora (U, φ) una carta locale di S, partendo dalla base $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ si può costruire, tramite Gram–Schmidt, una base ortonormale e_1 e e_2 di $\mathcal{V}(U)$. La metrica induce un riferimento ortonormale ω_1, ω_2 di $\mathcal{E}^1(U)$ definito da

$$\omega_i(p) = \langle e_i, \rangle_p \quad \forall\, p \in U \ .$$

Sia ω_1', ω_2' un riferimento ortonormale in un'altra carta locale (U', φ') allora in $U \cap U'$ abbiamo che

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \pm \omega_1' \wedge \omega_2' \tag{1.5}$$

Supporremo, d'ora in poi, che la superficie riemanniana S sia orientata da una 2–forma $\mu \in \mathcal{E}^\in(\mathcal{S})$ cf. Cap. 5 § 11.

Dato un riferimento ortonormale e_1, e_2 di $\mathcal{V}(U)$ ed il suo duale ω_1, ω_2 si dirà che è positivamente orientato se

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = f\mu \quad \text{con} \ \ f(p) > 0 \ \forall\, p \in U \tag{1.6}$$

Dalla (5) si ricava che dato un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di S con carte locali e scelti su di esse dei *riferimenti ortonormali positivamente orientati* $\omega_1^\alpha, \omega_2^\alpha$ resta definita una 2–forma mai nulla

$$\{\omega_1^\alpha \wedge \omega_2^\alpha\} \tag{1.7}$$

che ha un significato riemanniano intrinseco. Questo prende il nome di elemento di area e si designa con il simbolo dA.

Esempio. Nel caso delle superfici $S \subseteq \mathbb{R}^3$ abbiamo che

$$e_1 = E^{-1/2} \frac{\partial}{\partial u} \ , \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(E^{1/2} \frac{\partial}{\partial v} - F E^{-1/2} \frac{\partial}{\partial u} \right) \tag{1.8}$$

Da cui si ottiene

$$\omega_1 = E^{1/2} du + F E^{-1/2} dv \ , \quad \omega_2 = \sqrt{EG - F^2}\, E^{-1/2} dv \ .$$

Quindi
$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv \tag{1.9}$$
che è il classico elemento di area.

Data una superficie riemanniana orientata definiamo l'operatore di "rotazione di $\frac{\pi}{2}$"
$$* : \mathcal{E}^1(S) \to \mathcal{E}^1(S)$$
dove, per ogni riferimento locale positivamente orientato e_1, e_2, si pone,
$$* \, \omega_1 = \omega_2 \ , \quad * \, \omega_2 = -\omega_1 \ .$$
Più in generale definiamo
$$* : \mathcal{E}^p(S) \to \mathcal{E}^{2-p}(S) \tag{1.10}$$
ponendo per $p = 0$ $\ * 1 = \omega_1 \wedge \omega_2$ per $p = 2$ $\ * \omega_1 \wedge \omega_2 = 1$. Cosicché
$$** = (-1)^p \ .$$
Infine, per abuso di notazione, data una funzione $f \in \mathcal{E}^0(S)$ scriveremo
$$\int_S f$$
intendendo
$$\int_S *f = \int_S f dA \ .$$
Passiamo ora a definire la curvatura gaussiana. Sia (U, φ) una carta locale e_1, e_2, ω_1, ω_2 come sopra.

Lemma (1.12). *ω_1, ω_2 individuano univocamente due 1–forme ω_{12} e $\omega_{21} \in \mathcal{E}^1(U)$ tali che*
$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1 \end{cases} \qquad \omega_{12} = -\omega_{21} \ . \tag{1.11}$$

Dimostrazione. Scriviamo $d\omega_1 = a\omega_1 \wedge \omega_2$ e $d\omega_2 = b\omega_1 \wedge \omega_2$. Ciò implica che $\omega_{12} = a\omega_1 + b\omega_2$.

La forma ω_{12} dipende chiaramente dal riferimento. Si può invece dimostrare che $d\omega_{12}$ è indipendente dal riferimento. Quindi questa forma avrà un significato intrinseco. Una volta ottenuta questa informazione e ricordando che l'elemento di area è intrinseco si può concludere che la funzione $k \in \mathcal{E}^0(S)$ definita da

$$d\omega_{12} = -kdA \tag{1.12}$$

ha significato intrinseco.

DEFINIZIONE (1.15). *Il valore $k(p)$ di k in un punto $p \in S$ si chiama curvatura gaussiana di S in p.*

TEOREMA (1.16). *$d\omega_{12}$ è intrinseca, i.e. non dipende dalla speciale base ortonormale.*

Dimostrazione. Sia f_1, f_2 un altro riferimento ortonormale positivamente orientato in U e sia ξ_1, ξ_2 il suo duale. Allora si ha

$$d\xi_i = \xi_{ij} \wedge \xi_j \qquad i \neq j \ , \quad i = 1, 2 \ .$$

Inoltre

$$\omega_1 = \cos\varphi\xi_1 - \sin\varphi\xi_2$$
$$\omega_2 = \sin\varphi\xi_1 + \cos\varphi\xi_2$$

con φ in $\mathcal{E}^0(U)$.

Da cui

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= -\sin\varphi d\varphi \wedge \xi_1 + \cos\varphi d\xi_1 - \cos\varphi d\varphi \wedge \xi_2 - \sin\varphi d\xi_2 = \\ &= (\xi_{12} - d\varphi) \wedge (\sin\varphi\xi_1 + \cos\varphi\xi_2) = (\xi_{12} - d\varphi) \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

in modo simile si ottiene

$$d\omega_2 = -(\xi_{12} - d\varphi) \wedge \omega_1 \ .$$

Quindi per l'unicità di $\omega_{12} = -\omega_{21}$ abbiamo che

$$\omega_{12} = \xi_{12} - d\varphi \ , \quad \text{da cui} \ \ d\omega_{12} = d\xi_{12} \ .$$

Richiamiamo la seguente

DEFINIZIONE (1.17) *Siano S e S' due superfici riemanniane un'applicazione differenziabile $F : S \to S'$ si dice un'isometria locale se $\forall\, p \in S$ e $v, w \in T_p(S)$*

$$\langle F_{*v}, \ F_{*w} \rangle_{F(p)} = \langle v, w \rangle_p \ . \tag{1.13}$$

Si dice che F è un'isometria se F è anche un diffeomorfismo.

Finora abbiamo implicitamente visto che la lunghezza d'area, l'elemento d'area e la curvatura gaussiana k sono invarianti isometrici.

Nel caso di una superficie riemanniana compatta S prenderemo in considerazione un altro invariante isometrico e cioè la curvatura totale

$$\int_S kdA \ .$$

Il contenuto del teorema di Gauss–Bonnet è che la curvatura totale è un *invariante topologico*. Infatti si dimostra che

$$\int_S kdA = 2\pi\chi(S) \ .$$

Qui $\chi(S)$ denota la caratteristica di Eulero–Poincaré della superficie (cf. Cap. 7 § 2).

Esercizi

1. Sia S una superficie riemanniana orientata con una metrica conforme, cioè definita localmente da

$$ds^2 = \lambda^2(u,v)(du^2 + dv^2), \quad \lambda > 0.$$

Verificare che l'elemento d'area è dato da $\lambda^2(u,v)du \wedge dv$.

Indichiamo con Δ l'operatore

$$\frac{1}{\lambda^2}(\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v^2}).$$

Verificare che si ha la seguente espressione per la curvatura gaussiana

$$k = -\Delta log\lambda.$$

2. Un potenziale per una metrica conforme è una funzione P tale che $\Delta P = 1$.

Verificare che il potenziale non dipende dalle particolari coordinate locali

3. Sia $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$. con metrica iperbolica $\frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$.

Calcolare la curvatura gaussiana e un potenziale per la metrica iperbolica

.

4. Calcolare la curvatura gaussiana e un potenziale per la metrica iperbolica $\frac{4dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$ del disco unitario D. Verificare che l'applicazione $F : \mathbb{H} \to D$ definita da $F(z) = \frac{z-i}{z+i}$ è un isometria.

5. Sia $G : \mathbb{H} \to D \setminus \{0\}$ definita da $G(z) = e^{iz}$, verificare che G è un rivestimento e induce la metrica $\frac{4dzd\bar{z}}{|z|^2(log|z|^2)^2}$ su $D \setminus \{0\}$.

6. Calcolare la curvatura gaussiana della sfera S^2 dotata della metrica $\frac{4dzd\bar{z}}{(1+|z|^2)}$.

2 Lo spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ e le equazioni strutturali di Cartan

Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ un riferimento ortonormale di $\mathcal{V}(\mathbb{E}^3)$ è costituito da $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$. Ricordiamo che una delle operazioni fondamentali è quella della derivata covariante di un campo vettoriale. Dato un vettore $v \in T_p(\mathbb{E}^3)$, $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ e un campo vettoriale $W = \sum_{i=1}^3 W_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ si definisce

$$\nabla_v W = \lim_{t \to 0} \frac{W(p+tv) - W(p)}{t} \in T_p(\mathbb{E}^3)$$

chiaramente

$$\nabla_v W = \sum v(W_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p . \tag{2.1}$$

Nel caso in cui si vogliano usare la curva $\alpha(t)$ adattata al vettore v, si ha

$$\nabla_v W = \frac{d}{dt} W(\alpha(t))\Big|_{t=0} .$$

Più in generale si definisce la connessione

$$\nabla : \mathcal{V}(\mathbb{E}^3) \times \mathcal{V}(\mathbb{E}^3) \to \mathcal{V}(\mathbb{E}^3)$$

ponendo

$$\nabla_V W = \sum V(W_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dove $V = \sum V_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Si verificano per ∇ le seguenti proprietà

$$\begin{cases} \nabla_W(aV+bV') = a\nabla_W(V) + b\nabla_W(V') \\ \nabla_{aW+bW'}(V) = a\nabla_W(V) + b\nabla_{W'}(V) \\ \nabla_{fW}(V) = f\nabla_W V & a,b \in \mathbb{R}. \\ \nabla_W(fV) = W(f)V + f\nabla_W V = df(W)V + f\nabla_W V \ , \quad f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{E}^3) \\ W(\langle V,V'\rangle) = \langle \nabla_W V, V'\rangle + \langle V, \nabla_W V'\rangle \end{cases} \tag{2.2}$$

Osservazione. Se $\langle V, V'\rangle =$ cost abbiamo che

$$\langle \nabla_W V, V'\rangle = -\langle V, \nabla_W V'\rangle \ . \tag{2.3}$$

La connessione euclidea verifica un'altra importante proprietà.

Dati due campi vettoriali $V,\ W \in \mathcal{V}(\mathbb{E}^3)$ definiamo il campo vettoriale $[V,W]$ ponendo $\forall\, f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{E}^3)$

$$[V,W](f) = V(W(f)) - W(V(f)) \ . \tag{2.4}$$

Si verifica facilmente che

$$[V,W] = \nabla_V W - \nabla_W V \ .$$

Si usa esprimere questa proprietà dicendo che la connessione euclidea è priva di torsione (infatti in generale si definisce Tor $(V,W) = \nabla_V W - \nabla_W V - [V,W]$).

Supponiamo ora di avere un altro riferimento ortonormale $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathcal{V}(\mathbb{E}^3)$. Si ha

$$e_i = \sum_i a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad\qquad a_{ij} \in \mathcal{E}^0(\mathbb{E}^3) \ .$$

La matrice ortogonale $A = (a_{ij})$ si chiama matrice di comportamento di $\{e_i\}$, in quanto indica, in ogni punto, di quanto il riferimento mobile $\{e_i\}$ sia ruotato rispetto al riferimento standard.

Per rendere più intrinseco lo studio del riferimento mobile $\{e_i\}$ vogliamo misurare di quanto in ogni punto ruoti rispetto a se stesso. Questa informazione è fornita dalla matrice di connessione. Questa è una matrice i cui coefficienti sono 1–forme così definite.

Per $V \in \mathcal{V}(\mathbb{E}^3)$ sia

$$\nabla_V e_i = \sum \omega_{ij}(V) e_j \tag{2.5}$$

con

$$\omega_{ij}(V) = \langle \nabla_V e_i, e_j \rangle \ .$$

Lo strumento fondamentale nello studio della geometria di $\mathbb{E}^3$ sono le cosiddette *equazioni strutturali di Cartan*.

TEOREMA (2.6). *Sia* e_1, e_2, e_3 *un riferimento ortonormale di* $\mathcal{V}(\mathbb{E}^3)$ *e* ω_1, ω_2, ω_3 *il riferimento duale.*

Sia $\Omega = (\omega_{ij})$ *la matrice di connessione, allora:*

$$\begin{aligned} \text{(a)} \ \ d\omega_i &= \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \omega_j \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \\ \text{(b)} \ \ d\omega_{ij} &= \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Il fatto che $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ segue da (**??**) e (**??**). Sia $A = (a_{ij})$ la matrice di comportamento di $\{e_i\}$, ${}^tA^{-1} = A$. Usando notazioni matriciali poniamo

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \qquad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

e $dA = (da_{ij})$.

Si ha $e = A\frac{\partial}{\partial x}$ e quindi $\omega = {}^tA^{-1}dx = Adx$. Inoltre

$$\begin{aligned} \omega_{ij}(V) &= \langle \nabla_V e_i, e_j \rangle = \langle \nabla_V \Sigma a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \ , \ \Sigma a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{3} \langle V(a_{ik}) \frac{\partial}{\partial x_k} \ , \ a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} \rangle = \sum_{k=1}^{3} V(a_{ik}) a_{jk} = \sum_{k=1}^{3} da_{ik}(V) a_{jk} \ . \end{aligned}$$

Quindi

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} da_{ik} a_{jk} \tag{2.7}$$

e perciò

$$\Omega = dA \ {}^tA = dAA^{-1} \ .$$

Si ha

$$d\omega = dA \wedge dx = dAA^{-1} \wedge Adx = \Omega \wedge \omega$$

$$d\Omega = -dA \wedge {}^t dA = -dAA^{-1} \wedge A\, {}^t dA = -\Omega \wedge {}^t\Omega = \Omega \wedge \Omega \ .$$

Considereremo ora superfici immerse in $\mathbb{R}^3$ con la metrica riemanniana indotta da $\mathbb{E}^3$.

Il nostro obiettivo è di dimostrare che la nozione di curvatura gaussiana data nel paragrafo 1 coincide con quella abitualmente usata per questo tipo di superfici, cioè la curvatura gaussiana vista come determinante dell'operatore forma o anche operatore di Weingarten.

Sia e_1, e_2, e_3 un riferimento ortonormale mobile di $\mathcal{V}(\mathbb{E}^3)$ a cui imponiamo le seguenti condizioni

$$e_3 \equiv N$$

dove N è il versore normale alla superficie e chiaramente e_1, e_2 formano un riferimento normale locale $\mathcal{V}(U)$, $U \subseteq S$ (U, φ) carta locale. Sia ω_1, ω_2, ω_3 il riferimento duale di e_1, e_2, e_3.

Dalle equazioni strutturali (2.7) estraiamo le seguenti

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 + \omega_{13} \wedge \omega_3 \\ d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1 + \omega_{23} \wedge \omega_3 \end{cases} \qquad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \tag{2.8}$$

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} \qquad \text{(l'equazione di Gauss)}\ . \tag{2.9}$$

Restringiamo ora le forme ω_i, $\omega_{ij} \in \mathcal{E}^1(\mathbb{E}^3)$ a U. Otteniamo delle forme che denoteremo con gli stessi simboli in $\mathcal{E}^1(U)$. Chiaramente $\omega_3 \equiv 0$ in U.

Possiamo quindi concludere dicendo che

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1 \end{cases} \qquad \omega_{12} = -\omega_{21} \tag{2.10}$$

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}\ . \tag{2.11}$$

Ora le equazioni (**??**) non sono altro le (**??**). Possiamo quindi concludere dicendo che

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -k\omega_1 \wedge \omega_2\ .$$

Ciò ci permette di estrinsecare (calcolare) la curvatura gaussiana. Infatti, essendo

$$\omega_{13} = \omega_{13}(e_1)\omega_1 + \omega_{13}(e_2)\omega_2$$

abbiamo che

$$k(p) = \det \begin{pmatrix} \omega_{13}(e_1) & \omega_{23}(e_1) \\ \omega_{13}(e_2) & \omega_{23}(e_2) \end{pmatrix} (p) = \det(-\nabla_v N)$$

dove $-\nabla_v(N)$ è l'operatore forma e $\nabla_v(N)$ è il differenziale dell'applicazione

$$N : S \to S^2$$

che ad ogni punto x della superficie associa il suo versore normale.

Esercizi

1. Verificare le proprietà (**??**).

3 Il teorema di Gauss-Bonnet

In questa sezione considereremo superfici riemanniane S non necessariamente immerse.

Comunque terremo sempre presente l'esempio delle superfici immerse in $\mathbb{E}^3$.

Così come nel caso di $\mathbb{E}^3$ vogliamo dimostrare che esistono connessioni su una superficie riemanniana S. Intendiamo con ciò un operatore

$$\nabla : \mathcal{V}(S) \times \mathcal{V}(S) \to \mathcal{V}(S)$$

che soddisfi le proprietà (**??**) della connessione $\nabla^{\mathbb{E}^3}$.

Ritorniamo per un attimo al caso di una superficie $S \subseteq \mathbb{E}^3$. Siano V e W campi vettoriali su S. È chiaro che in generale $\nabla_V^{\mathbb{E}^3} W \notin \mathcal{V}(S)$, ma il versore N individua un campo vettoriale di $\mathbb{E}^3$ normale a S, quindi

$$\nabla_V W = \nabla_V^{\mathbb{E}^3} W - \langle \nabla_V^{\mathbb{E}^3} W, N \rangle N \tag{3.1}$$

è in $\mathcal{V}(S)$.

Una facile verifica mostra che ∇ così definita soddisfa tutte le proprietà (**??**) delle connessioni. Questo e la discussione fatta nel paragrafo precedente ci suggerisce un modo per definire una connessione su una qualsiasi superficie riemanniana.

DEFINIZIONE (3.2). *Sia S una superficie riemanniana, sia e_1, e_2 un riferimento ortonormale in una carta locale. Sia ω_1, ω_2 il suo duale e sia ω_{12} la 1–forma che soddisfa l'equazione*

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2$$

$$d\omega_2 = -\omega_{12} \wedge \omega_1 \ .$$

Allora si definisce su S una connessione ponendo

$$\nabla_V e_1 = \omega_{12}(V)\ e_2 \tag{3.2}$$

$$\nabla_V e_2 = -\omega_{12}(V)\ e_1 \tag{3.3}$$

$$\nabla_V(f_1 e_1 + f_2 e_2) = (df_1 - f_2\omega_{12})(V)e_1 + (df_2 + f_1\omega_{12})(V)e_2 \ . \tag{3.4}$$

Che ∇ soddisfi le proprietà (2.2) è di immediata verifica. Bisogna verificare che è ben definita. Sia come nel § 1 f_1, f_2 un'altra base ortonormale e ∇' un altro operatore t.c.

$$\nabla' f_1 = \xi_{12} f_2 \ , \qquad \nabla' f_2 = -\xi_{12} f_1 \ . \tag{3.5}$$

Dobbiamo verificare che

$$\nabla'(f_i) = \nabla f_i \qquad\qquad i = 1, 2 \ .$$

Dimostriamolo per $i = 1$. Sappiamo che $\xi_1 = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2$, allora per la (3.4) abbiamo che

$$\nabla f_1 = (d\cos\varphi - \sin\varphi\omega_{12})e_1 + (d\sin\varphi + \cos\varphi\omega_{12})e_2 \ .$$

D'altro canto

$$\begin{aligned} \nabla f_1 \ &= \ (d\cos\varphi + \sin\varphi d\varphi - \sin\varphi\xi_{12})e_1 + d\sin\varphi - \cos\varphi d\varphi + \\ &\quad\ \cos\varphi(\xi_{12})e_2 = -\sin\varphi\xi_{12}e_1 + \cos\varphi\xi_{12}e_2 = \xi_{12}f_2 = \nabla' f_1 \ . \end{aligned}$$

Introduciamo ora il concetto di geodetica.

Definizione (3.7). *Sia S una superficie riemanniana con connessione ∇, sia $\gamma : I \to S$ una curva in S. Si dice che γ è una geodetica se*

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) \equiv 0 \ . \tag{3.6}$$

Questa definizione poggia l'accento su una delle proprietà caratteristiche delle geodetiche, quella cioè di essere, su S, le curve più "dirette". L'altra proprietà è quella di essere le curve più corte.

Nel caso delle superfici di $\mathbb{R}^3$ questa proprietà si traduce nel fatto che l'accelerazione è normale ad S, infatti possiamo scrivere

$$\gamma'' = \nabla^{\mathbb{E}^3}_{\gamma'}\gamma' = \nabla_{\gamma'}\gamma' + \langle \nabla^{\mathbb{E}^3}_{\gamma'}\gamma', N\rangle N = \langle \nabla^{\mathbb{E}^3}_{\gamma'}\gamma', N\rangle N \ .$$

Inoltre è chiaro che se γ è una geodetica allora la sua velocità è costante, infatti

$$\frac{d}{dt}\|\gamma'\|^2 = 2\langle \gamma'', \gamma'\rangle = 0 \ .$$

Vogliamo ora definire la *curvatura geodetica* di una curva $\alpha : I \to S$.

Definizione (3.9). *Se $\alpha : I \to S$ è un arco di curva su una superficie riemanniana orientata S. Si ponga $T\alpha = \frac{\alpha'}{\|\alpha\|}$, la curvatura geodetica $k_g(\alpha)$ di α è la lunghezza di $\nabla_{T\alpha}T_\alpha$:*

$$k_g(\alpha) := \|\nabla_{T_\alpha}T_\alpha\| \ . \tag{3.7}$$

Particolarmente interessante è il caso $\|\alpha'\|$ = costante. In questo caso si ha che α è una geodetica se e solo se $k_g(\alpha) \equiv 0$. Quindi si può dire che la curvatura geodetica di α "misura" la curvatura della curva che si ottiene proiettando α sul piano tangente.

Lemma (3.5). *Sia $\alpha : I \to S$ una curva tale che $\|\alpha'\| = 1$, sia e_1, e_2 un riferimento ortonormale locale e ω_{12} la relativa 1–forma. Sia $\alpha' = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2$, allora*

$$k_g(\alpha) = \frac{d\varphi}{dt} + \omega_{12}(\alpha') \ . \tag{3.8}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\nabla\alpha' &= \nabla(\cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2) = (-\sin\varphi d\varphi + \sin\varphi\omega_{21})e_1 \\ &+ (\cos\varphi\omega_{12} + \cos\varphi d\varphi)e_2 = \sin\varphi(-d\varphi - \omega_{12})e_1 + \cos\varphi(d\varphi + \omega_{12})e_2 \ .\end{aligned}$$

Quindi

$$k_g(\alpha) = \|\nabla_{\alpha'}\alpha'\| = \sqrt{(\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2)(d\varphi(\alpha') + \omega_{12}(\alpha')^2} = \frac{d\varphi(\alpha(t))}{dt} + \omega_{12}(\alpha')\ .$$

COROLLARIO (3.6). *Sia $\beta : I \to S$ una curva. Siano e_1, e_2 ω_{12} come nell'enunciato del lemma, allora*

$$\int_\beta k_g dt = \varphi(1) - \varphi(0) + \int_\beta \omega_{12}\ .$$

Dimostrazione. Il risultato è indipendente dalla parametrizzazione di β se si intende, così come è giusto intendere, $\varphi(1) = \varphi(\beta(1))$ e $\varphi(0) = \varphi(\beta(0))$, quindi si può assumere che $\|\beta'\| = 1$ e il corollario segue dal lemma precedente.

Premettiamo ora alcune definizioni ed alcune osservazioni alla dimostrazione del teorema di Gauss–Bonnet.

Siano α_1, $\alpha_2 : I \to S$ due curve tali che $\alpha_1(1) = \alpha_2(0) = p$. Possiamo allora definire l'angolo esterno tra α_1 e α_2 in p come l'angolo ε tale che

(a)
$$\cos\varepsilon = \frac{\langle \alpha_1'(1), \alpha_2'(0)\rangle}{\|\alpha_1'(1)\|\,\|\alpha_2'(0)\|}$$

(b)
$$0 < \varepsilon < \pi \quad \text{se } \alpha_1'(1),\ \alpha_2'(0) \quad \text{è positivamente orientato}$$
$$-\pi < \varepsilon < 0 \quad \text{se } \alpha_1'(1),\ \alpha_2'(0) \quad \text{è negativamente orientato.}$$

Sia ora $\sigma : \Delta_2 \to S$ un 2–simplesso ottenuto per restrizione a Δ_2 di un diffeomorfismo $\sigma : U \to \sigma(U) \subseteq S$, definito su un intorno aperto U di Δ_2.

Sia $\alpha = -\sigma \circ j_3$, $\beta = \sigma \circ j_1$, $\gamma = \sigma \circ j_2$.

ε_1 l'angolo esterno tra γ e α

ε_2 l'angolo esterno tra α e $-\beta$

ε_3 l'angolo esterno tra $-\beta$ e γ.

Sia $e_1 = \frac{1}{\|\sigma_* \frac{\partial}{\partial u}\|} \sigma_* \frac{\partial}{\partial u}$ e sia e_2 tale che e_1, e_2 sia un riferimento ortonormale. Poniamo

$$\begin{cases} \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \cos\varphi_\alpha e_1 + \sin\varphi_\alpha e_2 \\ \frac{\beta'}{\|\beta'\|} = \cos\varphi_\beta e_1 + \sin\varphi_\beta (e_2) \\ \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = e_1 \ . \end{cases} \tag{3.9}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\cos\varepsilon_1 &= \langle e_1, \cos\varphi_\alpha(0)e_1 + \sin\varphi_\alpha(0)e_2\rangle_{\varphi_\alpha(0)=\varphi_\gamma(1)} = \cos\varphi_\alpha(0) \Rightarrow \varepsilon_1 = \varphi_\alpha(0) \\
\cos\varepsilon_2 &= \langle \cos\varphi_\alpha(1)e_1 + \sin\varphi_\alpha(1)e_2,\ -\cos\varphi_\beta(1)e_1 - \sin\varphi_\beta(1)e_2\rangle_{\varphi_\beta(1)=\varphi_\alpha(1)} = \\
& \langle \cos\varphi_\alpha(1)e_1 + \sin\varphi_\alpha(1)e_2,\ -\cos(-\varphi_\beta(1))e_1 + \sin(-\varphi_\beta(1))e_2\rangle_{\varphi_\beta(1)=\varphi_\alpha(1)} = \\
&- \cos\varphi_\alpha(1)\cos(-\varphi_\beta(1)) + \sin\varphi_\alpha(1)\sin(-\varphi_\beta(1)) = \cos(\pi - \varphi_\alpha(1) + \varphi_\beta(1)) \\
&\Rightarrow \varepsilon_2 = \pi - \varphi_\alpha(1) + \varphi_\beta(1) \\
\cos\varepsilon_3 &= \langle -\cos\varphi_\beta(0)e_1 - \sin\varphi_\beta(0)e_2, e_1\rangle = \cos(\pi - \varphi_\beta(0)) \\
&\Rightarrow \varepsilon_3 = \pi - \varphi_\beta(0) \ .
\end{aligned}$$

Il seguente lemma è il nucleo centrale del Teorema di Gauss–Bonnet. Esso è una combinazione del corollario precedente e del Teorema di Stokes.

Lemma (3.7). *Sia $\sigma : \Delta_2 \to S$ un simplesso ottenuto per restrizione di un diffeomorfismo $\sigma : U \to \sigma(U)$ di un intorno U di Δ_2. Siano ε_1, ε_2, ε_3 gli angoli esterni di σ, allora*

$$\int_\sigma k dA + \int_{\partial\sigma} k_g = 2\pi - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Poniamo $e_1 = \frac{1}{\left\| \sigma_* \frac{\partial}{\partial u} \right\|} \left(\sigma_* \frac{\partial}{\partial u} \right)$. Sia e_2 tale che e_1, e_2 sia un riferimento ortonormale locale orientato. Sia ω_{12} la relativa 1–forma, quindi si ha

$$\int_\sigma kdA = -\int_\sigma d\omega_{12} = -\int_{\partial\sigma} \omega_{12} = -\int_\alpha \omega_{12} + \int_\beta \omega_{12} - \int_\gamma \omega_{12} \ .$$

Per il corollario precedente si ha

$$\int_\sigma kdA = -\int_\alpha k_g + (\varphi_\alpha(1) - \varphi_\alpha(0)) + \int_\beta k_g - [\varphi_\beta(1) - \varphi_\beta(0)] - \int_\gamma k_g \ .$$

Osserviamo che per la nostra scelta di e_1 non c'è mai alcuna variazione dell'angolo φ_γ che è sempre identicamente nullo.

Quindi

$$\int_\sigma kdA + \int_{\partial\sigma} k_g = [\varphi_\alpha(1) - \varphi_\alpha(0)] - [\varphi_\beta(1) - \varphi_\beta(0)] = 2\pi - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \ .$$

Con le notazioni del lemma precedente si definiscono gli angoli interni ponendo $i_k = \pi - \varepsilon_k$. Si noti che $i_k \geq 0$. Ora possiamo anche scrivere (8) come

$$\int_\sigma kdA + \int_{\partial\sigma} k_g = (i_1 + i_2 + i_3) - \pi \ . \tag{3.11}$$

Prima di procedere alla dimostrazione del Teorema di Gauss–Bonnet osserviamo che σ, così come sopra definito, si dice triangolo geodetico se α, β, γ sono geodetiche in S, allora usando il fatto che sui lati di σ $k_g \equiv 0$ otteniamo che

$$\int_\sigma kdA = i_1 + i_2 + i_3 - \pi \ . \tag{3.12}$$

In particolare se $k =$ cost abbiamo che
$K > 0$ (Es.: la sfera) la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è maggiore di π
$K = 0$ (Es.: il piano) la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è uguale a π
$K < 0$ (Es.: il disco di Poincaré) la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è minore di π.

Teorema (Gauss-Bonnet) (3.8). *Sia S una superficie riemanniana orientata e compatta, allora*

$$\int_S kdA = 2\pi\chi(S)$$

Dimostrazione. Assumiamo che S è triangolabile. Sia $\{\sigma_i\}$ una triangolazione, allora

$$\int_S kdA = \sum_i \int_{\sigma_i} kdA \ .$$

Per il Lemma 5 si ha

$$\int_{\sigma_i} kdA = -\int_{\partial\sigma_i} k_g + (i_1 + i_2 + i_3) - \pi \ .$$

Quando si sommano i contributi di tutti i $\partial\sigma_i$ si ha che $\sum_i \int_{\partial\sigma_i} k_g = 0$ perché ogni volta che un 1–simplesso appare come lato di un bordo, deve apparire necessariamente anche come lato di un altro bordo ma con verso di percorrenza opposto. D'altro canto quando si sommano tutti gli angoli interni si ottiene $2\pi v$ dove v è il numero vertici della triangolazione. Quindi si ha

$$\int_S kdA = 2\pi v - \pi f$$

dove $f = \#$ facce.

Si ha inoltre che $3f = 2l$ ($3f$ conta gli spigoli due volte) e quindi $f = 2l - 2f$, sostituendo

$$\int_S kdA = 2\pi(v - l + f) = 2\pi\chi(S) \ .$$

Esercizi

1. Sia P un poligono geodetico con k vertici e angoli interni $i_1, i_2, \ldots, i_k$; verificare che

$$\int_P kdA = \sum_{j=1}^{k} i_j + (2-k)\pi.$$

2. Dimostrare che per un poligono geodetico della sfera S^2 con metrica indotta dalla proiezione stereografica si ha $\int_P kdA = Area(P)$

3. Sia $C \subset \mathbb{E}^3$ il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, verificare che tutte le geodetiche sono:

le circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e $z = c$

le rette di equazione $x = a$ e $y = \sqrt{1 - a^2}$

le eliche

4. Dimostrare che in $\mathbb{H}$ sono geodetiche le rette verticali e i semicerchi perpendicolari all' asse reale.

Verificare che l'isometria $F(z) = \frac{z-i}{z+i}$ porta queste geodetiche sui diametri e sui cerchi ortogonali al bordo di D..

5. Verificare che in $\mathbb{H}$ per due punti passa un'unica geodetica e concludere che quelle descritte nell'esercizio precedente sono tutte le geodetiche.

6. Sia

$$\mathcal{M} = \{\tau \in \mathbb{C} | y > 0, -1/2 < x \leq 1/2, |\tau| > 1\} \cup \{\tau \in \mathbb{C} | y > 0, 0 \leq x \leq 1/2, |\tau| = 1\} \subset \mathbb{H}.$$

Dimostrare che $Area(\mathcal{M}) = \frac{\pi}{3}$.

4 Operatore di Laplace, coordinate isoterme, equazione di Beltrami

Nel § 2 abbiamo definito, per una *superficie riemanniana orientata*, l'operatore

$$* : \mathcal{E}^p(S) \to \mathcal{E}^{2-p}(S) \ .$$

Ricordiamo che nel caso $p = 1$ esso può essere interpretato come rotazione di 90°.

Dato un riferimento *ortonormale locale* ω_1, ω_2 si ha

$$*f = f\omega_1 \wedge \omega_2 = f dA \ , \qquad (p = 0)$$

$$*(f_1\omega_1 + f_2\omega_2) = f_1\omega_2 - f_2\omega_1 \ , \qquad (p = 1)$$

$$*f\omega_1 \wedge \omega_2 = f \qquad (p = 2) \ .$$

Si ha inoltre

$$**\alpha = (-1)^p\alpha \qquad \alpha \in \mathcal{E}^p(S)$$

$$*(\alpha + \beta) = *\alpha + *\beta \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{E}^p(S)$$

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{E}^p(S) \ .$$

Quest'ultima relazione suggerisce di definire una forma *bilineare simmetrica* in $\mathcal{E}^p(S)$ ponendo

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_S \alpha \wedge *\beta \ . \tag{4.1}$$

Naturalmente ci dobbiamo assicurare che l'integrale è finito. Ciò è ovvio nel caso in cui S è *compatto*. Nel caso non compatto dovremo metterci sotto opportune ipotesi di sommabilità che specificheremo nel seguito.

LEMMA (4.2). *In una superficie riemanniana orientata S, la forma $\langle \alpha, \beta \rangle$ è definita positiva.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ vogliamo dimostrare che, allora, $\alpha = 0$. Sia U_k un ricoprimento localmente finito di S con carte locali, e λ_k una partizione dell'unità ad esso relativa. Si può assumere che $\{V_k = \{z \in U_k : \lambda_k(z) \neq 0\}\}$ sia ancora un ricoprimento di S. Si ha:

$$0 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \int_S \alpha \wedge *\alpha = \sum_k \int_{U_k} \lambda_k \alpha \wedge *\alpha \ .$$

Esaminando i vari casi dimostreremo che, in U_k, $\lambda_k \alpha \wedge *\alpha = \lambda_k F_k dA$ con $F_k \geq 0$. Questo basterà per concludere il senso voluto. Infatti

$$\sum_k \int_{U_k} \lambda_k \alpha \wedge *\alpha = 0$$

implica che

$$\int_{U_k} \lambda_k F_k dA = 0$$

. Quindi $\lambda_k F_x \equiv 0 \Rightarrow F_k \equiv 0$ in $V_k \Rightarrow \alpha = 0$.

Caso $p = 0$: $\lambda_k \alpha = \lambda_k f$ in U_k. Quindi $\lambda_k \alpha \wedge *\alpha = \lambda_k f^2 dA$.
Caso $p = 1$: $\lambda_k \alpha = \lambda_k (f_1 \omega_1 + f_2 \omega_2)$. Quindi $\lambda_k \alpha \wedge *\alpha = \lambda_k (f_1^2 + f_2^2) dA$.
Caso $p = 2$: $\lambda_k \alpha = \lambda_k f \omega_1 \wedge \omega_2$. Quindi $A_k \alpha \wedge *\alpha = \lambda_k f^2 dA$.

(Come al solito ω_1, ω_2 è un coriferimento *ortogonale* in U_k e quindi $dA = \omega_1 \wedge \omega_2$).

Si è quindi dato a $\mathcal{E}^p(S)$ una struttura di spazio *normato*, ponendo

$$\|\alpha\| = \int_S \alpha \wedge *\alpha \ . \tag{4.2}$$

Consideriamo ora gli operatori

$$d : \mathcal{E}^p(S) \to \mathcal{E}^{p+1}(S) \ .$$

È naturale chiedersi se esiste un *aggiunto* per d rispetto alla forma bilineare simmetrica $\langle\, ,\rangle$.

Definiamo

$$\delta : \mathcal{E}^p(S) \to \mathcal{E}^{p-1}(S) \tag{4.3}$$

ponendo

$$\delta = - * d* \ ,$$

e dimostriamo il seguente

Lemma (4.5). *Siano $\alpha \in \mathcal{E}^p(S)$, $\beta \in \mathcal{E}^{p+1}(S)$ e si assuma che α o β abbia supporto compatto. Allora*

$$\langle d\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \delta\beta\rangle \ .$$

Dimostrazione.

$$d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d * \beta = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge *\delta\beta \ .$$

Per il Teorema di Stokes, essendo il supporto di $(\alpha \wedge *\beta)$ compatto, si ha:

$$0 = \int_S d(\alpha \wedge *\beta) = \int_S d\alpha \wedge *\beta - \int_S \alpha \wedge *\delta\beta = \langle d\alpha, \beta\rangle - \langle \alpha, \delta\beta\rangle \ .$$

Questa è la *proprietà di aggiunzione* a cui ci riferiamo.

Si definisce ora l'*operatore di Laplace*

$$\Delta : \mathcal{E}^p(S) \to \mathcal{E}^p(S) \tag{4.4}$$

ponendo

$$\Delta = \delta d + d\delta \ .$$

In termini coomologici, Δ è omotopo all'operatore nullo, esso è cioè zero in coomologia (i.e. porta forme chiuse in forme esatte). Dalla definizione segue infatti che

$$d\Delta = \Delta d \ . \tag{4.5}$$

Inoltre, dalla definizione di δ, segue subito che

$$*\Delta = \Delta * \ . \tag{4.6}$$

Inoltre, come immediato corollario del Lemma (4.4), si ha che Δ soddisfa una *proprietà di autoaggiunzione*; se α o β hanno supporto compatto si ha cioè

$$\langle \Delta\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \Delta\beta\rangle \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{E}^p(S) \ . \tag{4.7}$$

Esaminiamo il caso in cui $S = \mathbb{E}^2$.

In questo caso

$$\omega_1 = dx \ , \qquad \omega_2 = dy$$

e quindi

$$*dx = dy \ , \qquad *dy = -dx \ . \tag{4.8}$$

Una facilissima verifica mostra che

$$\begin{cases} p = 0 & \Delta f = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\ p = 1 & \Delta(f dx + g dy) = (\Delta f)dx + (\Delta g)dy \\ p = 2 & \Delta(f dx \wedge dy) = (\Delta f) dx \wedge dy \ . \end{cases} \tag{4.9}$$

Si vede dunque che nel caso euclideo lo studio dell'operatore di Laplace per le p–forme differenziali si riduce allo studio del classico laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, per le funzioni.

Supponiamo ora di avere una superficie riemanniana orientata S. Sorge allora spontaneo il desiderio di poter introdurre in ogni carta locale un sistema di coordinate x, y a mezzo delle quali l'operatore di Laplace possa essere espresso dalle formule (**??**). Per che ciò avvenga, tali coordinate dovranno soddisfare la condizione di ortogonalità (**??**), e prenderanno il nome di *coordinate isoterme*. Dunque un sistema di coordinate isoterme u, v su di una superficie riemanniana S è caratterizzata dalla proprietà

$$\lambda^2(du^2 + dv^2) = ds^2 \ , \qquad \lambda \in \mathcal{E}^0(U) \ , \qquad \lambda > 0 \ . \tag{4.10}$$

Dimostriamo innanzitutto la seguente:

PROPOSIZIONE (4.13). *Sia S una superficie di Riemann. Allora esiste su S una metrica riemanniana ds^2 tale che ogni sistema di coordinate (omolorfo) è, rispetto ad essa, un sistema di coordinate isoterme.*

Dimostrazione. Sia $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un ricoprimento localmente finito di S con carte locali, $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$. Si ponga, in U_α, $ds_\alpha^2 = dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2$. Sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità relativa a U_α. Si definisce allora su S una metrica riemanniana ponendo

$$ds^2 = \Sigma\rho_\beta ds_\beta^2 \ .$$

Vogliamo dimostrare (cf. (4.11)) che in U_α si ha

$$dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2 = \lambda_\alpha ds^2 \ .$$

Sia $J_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^2$. Dalle *equazioni di Cauchy–Riemann* segue subito che, in $U_\alpha \cap U_\beta$, $dx_\beta^2 + dy_\beta^2 = J_{\alpha\beta}(dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2)$.

Da ciò si deduce che, in U_α

$$ds^2 = \Sigma\rho_\beta ds_\beta^2 = \Sigma\rho_\beta(dx_\beta^2 + dy_\beta^2) = (\Sigma\rho_\beta J_{\alpha\beta})(dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2) = \lambda_\alpha^2\,(dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2) \ .$$

Questo dimostra che su di una superficie di Riemann le coordinate locali sono, in modo naturale, isoterme. Ritorniamo ora al caso di una superficie riemanniana orientata.

TEOREMA (4.14). *Su ogni superficie riemanniana orientata è possibile introdurre coordinate isoterme.*

Ridurremo la dimostrazione di questo teorema all'*equazione di Beltrami* e per lo studio di essa rimandiamo il lettore al libro di Lipman Bers (Riemann Surfaces pagg. 19–35).

Cominciamo con alcune considerazioni euristiche. Supponiamo di avere coordinate isoterme u, v. Si introduca la notazione complessa

$$z = x + iy \ , \qquad w = u + iv$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \ , \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$dz = dx + idy \ , \qquad d\overline{z} = dx - idy$$

$$dx = \frac{1}{2}\,(dz + d\overline{z}) \ , \quad dy = -\frac{i}{2}\,(dz - d\overline{z}) \ .$$

Esprimiamo in queste notazioni la condizione

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) = . \tag{4.11}$$

Sia
$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2 \ .$$
Si ha
$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{1}{4}(E-G) - \frac{i}{2}F\right)dz^2 + \frac{1}{2}(E+G)dzd\overline{z} + \left(\frac{1}{4}(E-G) + \frac{i}{2}F\right)d\overline{z}^2 = \\ &= \nu|dz + \mu d\overline{z}|^2 \ , \end{aligned}$$
dove
$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(E-G) - \sqrt{EG-F^2}\right) \ , \quad \mu = \frac{\frac{1}{2}(E-G) + iF}{\frac{1}{2}(E+G) + \sqrt{EG-F^2}} \ ,$$
$$|\mu|^2 = \frac{\frac{1}{2}(E+G) - \sqrt{EG-F^2}}{\frac{1}{2}(E+G) + \sqrt{EG-F^2}} < 1 \ . \tag{4.12}$$
D'altro canto $du^2 + dv^2 = |dw|^2 = |w_z dz + w_{\overline{z}} d\overline{z}|^2$. La (4.16) può quindi leggersi
$$\lambda^2 |w_z|^2 \left| dz + \frac{w_{\overline{z}}}{w_z} d\overline{z} \right|^2 = \nu|dz + \mu d\overline{z}|^2 \ .) \tag{4.13}$$
Ci siamo quindi ricondotti all'*equazione di Beltrami*
$$w_{\overline{z}} = \mu \ w_z \ .$$
Il teorema a cui si accennava assicura l'esistenza di una soluzione w con $w_z(0) \neq 0$.

Dimostriamo ora che dati ν e μ come sopra, e data una soluzione w dell'equazione di Beltrami allora, in un intorno abbastanza piccolo dell'origine, si ha
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} > 0$$
$$\lambda^2(du^2 + dv^2) = ds^2 \qquad \text{con} \qquad \lambda^2 = \frac{\nu}{|w_z|^2} \ . \tag{4.14}$$
La seconda proprietà si verifica percorrendo a ritroso i calcoli precedentemente effettuati. Per quanto riguarda la prima condizione si ha:
$$\begin{aligned} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \frac{\partial(w,\overline{w})}{\partial(z,\overline{z})} = w_z(\overline{w})_{\overline{z}} - w_{\overline{z}}(\overline{w})_z = |w_z|^2 - |w_{\overline{z}}|^2 = \\ &= |w_z|^2(1-\mu) > 0 \quad \text{in un intorno dell'origine} \end{aligned}$$

(cf. (**??**)).

Una conseguenza assai importante del Teorema 4.14 è il seguente.

Corollario (4.18). *Su di una superficie riemanniana orientata S le coordinate isoterme determinano una struttura complessa rendendo S una superficie di Riemann.*

Dimostrazione. Basta ovviamente dimostrare che, date due soluzioni w o $\hat{w}$ dell'equazione di Beltrami in un intorno di un punto $p \in S$, allora w e $\hat{w}$ sono (forse su un intorno più piccolo) omemorfismi, e che $\hat{w}$ è una funzione analitica di w (e viceversa).

La prima proprietà segue subito dalla (**??**). Per quanto riguarda la seconda si ha

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial \overline{w}} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \overline{w}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{w}} = \frac{\partial (w, \overline{w})}{\partial (z, \overline{z})}\left(-\frac{\partial \hat{w}}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$= -\frac{\partial \hat{w}}{\partial z}\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \mu\frac{\partial \hat{w}}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Il che dimostra l'olomorfia di $\hat{w}(w)$.

Abbiamo quindi dimostrato che:

A) ogni superficie di Riemann ammette coordinate isoterme;

B) ogni superficie riemanniana orientata è una superficie di Riemann (equazione di Beltrami).

Concludiamo questa sezione osservando come si comporta l'operatore di Laplace in presenza di coordinate isoterme. Poiché risulta più semplice usiamo le coordinate complesse.

Quindi, in una carta locale U, abbiamo una metrica che possiamo esprimere nella forma

$$ds^2 = \lambda^2 |dz|^2 \tag{4.15}$$

e l' elemento d'area ha la seguente espressione

$$dA = \frac{i}{2}\lambda^2 dz \wedge d\overline{z}. \tag{4.16}$$

Per ogni $f \in \mathcal{E}^0(U)$, abbiamo

$$\Delta f = - * d * d(f) = - * d * (\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} =$$

$$*d(i\frac{\partial f}{\partial z}dz - i\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} = -(\frac{4}{\lambda^2})\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}dz \wedge d\overline{z}.$$

Quindi Δ, a meno del fattore di conformità agisce sulle funzioni C^∞ come il laplaciano euclideo.

Esercizi

1. Verificare che nella formula (**??**) le coordinate sono isoterme $\iff$ $\mu \equiv 0$.
2. Verificare che nel passaggio da coordinate complesse a coordinate reali l'equazione di Laplace si trasforma in un'equazione differenziale ellittica.