

## Capitolo 8

# Funzioni meromorfe su Superfici di Riemann compatte

In questo capitolo studieremo le funzioni meromorfe definite su di una superficie di Riemann compatta  $C$ . Nella prima sezione realizzeremo le funzioni meromorfe come rivestimenti ramificati di  $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \widehat{\mathbb{C}}$ . Nella seconda sezione considereremo le applicazioni analitiche di  $C$  in uno spazio proiettivo  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ . Nella terza sezione concentreremo la nostra attenzione sul caso  $n = 2$  e studieremo il collegamento tra la teoria delle superfici di Riemann compatte e quella delle curve algebriche piane. Nell'ultima sezione descriveremo il campo  $\mathcal{M}(C)$  delle funzioni meromorfe su  $C$  mostrando che lo studio delle superfici di Riemann compatte equivale a quello delle estensioni algebriche finite del campo delle funzioni razionali.

### 8.1 Superfici di Riemann compatte e rivestimenti ramificati

La prima osservazione da fare è che su di una superficie di Riemann compatta  $S$  non vi sono funzioni oloomorfe non costanti, i.e.

$$\mathcal{O}(S) = \mathbb{C} .$$

Ciò discende dal teorema del massimo. Data  $f \in \mathcal{O}(S)$ , esiste, per compattezza, un punto  $p \in S$  in cui  $|f|$  raggiunge il suo massimo. Per il teorema del massimo  $f$  è costante intorno a  $p$  e, per continuazione analitica,  $f$  è costante in  $S$ .

Le funzioni meromorfe su  $S$  (che supponiamo connessa) formano un campo che denotiamo con  $\mathcal{M}(S)$ . Essendo  $S$  compatta ogni funzione meromorfa possiede un numero finito di zeri e di poli. Per parlare degli zeri e dei poli di una funzione

meromorfa, è utile introdurre il linguaggio dei *divisori*. Un *divisore* su  $S$  è una combinazione formale finita a coefficienti interi di punti di  $S$ . Un divisore  $D$  si scriverà dunque nella forma

$$D = n_1 P_1 + \cdots + n_k P_k . \quad (1.1)$$

Naturalmente si pone

$$\begin{aligned} nP + mP &= (n + m)P \\ 0P &= 0 . \end{aligned}$$

I divisori formano dunque un gruppo abeliano che si denota con  $\text{Div}(S)$ . Nello scrivere un divisore non nullo, come in (1.1), potremo sempre assumere che  $P_i \neq P_j$ , per  $i \neq j$ , e che  $n_i \neq 0$ , e si dirà che  $\{P_1, \dots, P_k\}$  è il *supporto* di  $D$ . Diremo inoltre che un divisore  $D = n_1 P_1 + \cdots + n_k P_k$  è positivo o nullo e scriveremo  $D \geq 0$ , se  $n_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Dati due divisori  $D$  e  $D'$ , scriveremo

$$D \geq D'$$

se  $D - D' \geq 0$ . Si definisce il *grado* di un divisore  $D = \sum_{i=1}^k n_i P_i$  ponendo

$$\text{deg } D = \sum_{i=1}^k n_i .$$

Data una funzione meromorfa  $f \in \mathcal{M}(S)$  si introducono il *divisore degli zeri*  $(f)_0$  e il *divisore dei poli*  $(f)_\infty$  ponendo

$$(f)_0 = \sum_{p \in \{\text{zeri di } f\}} \nu_p(f) p \quad , \quad (f)_\infty = - \sum_{p \in \{\text{poli di } f\}} \nu_p(f) p \quad (1.2)$$

e si definisce il *divisore di*  $f$

$$(f) = \sum_{p \in S} \nu_p(f) p = (f)_0 - (f)_\infty . \quad (1.3)$$

In modo analogo, dato un differenziale meromorfo  $\omega \in \Omega_{\text{mero}}^1(S)$ , si pone

$$\begin{aligned} (\omega)_0 &= \sum_{p \in \{\text{zeri di } \omega\}} \nu_p(\omega) \cdot p \\ (\omega)_\infty &= \sum_{p \in \{\text{poli di } \omega\}} \nu_p(\omega) \cdot p \\ (\omega) &= \sum_{p \in S} \nu_p(\omega) p = (\omega)_0 - (\omega)_\infty \end{aligned} \quad (1.4)$$

**Proposizione 1** a) Sia  $f \in \mathcal{M}(S)$  allora  $\text{deg}(f) = 0$ , (ovvero, una funzione meromorfa su  $S$  ha tanti zeri quanti poli, contati ognuno con la propria molteplicità. b) se  $\omega, \varphi \in \Omega_{\text{mero}}^1(S)$ , allora

$$\text{deg } \omega = \text{deg } \varphi .$$

*Dim.* Il punto a) è una conseguenza immediata del Corollario del Cap 7, applicato al caso in cui la regione regolare  $G$  coincide con  $S$ . Essendo in questo caso  $\partial G = \emptyset$  si ha

$$\deg(f) = \sum_{p \in S} \nu_p(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{df}{f} = 0 .$$

Per quello che riguarda il punto b) si usa il lemma (3.43) e si scrive

$$\omega = f\varphi$$

con  $f \in \mathcal{M}(S)$ . Si osserva poi che

$$(\omega) = (f) + (\varphi) ,$$

e che

$$\deg(\omega) = \deg(f) + \deg(\varphi) .$$

Dunque b) segue da a).

Una funzione meromorfa  $f \in \mathcal{M}(S)$  può essere riguardata come una applicazione

$$f : S \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1$$

ponendo  $f(p) = \infty$  non appena  $p$  è un polo di  $f$ . Vediamo che in questo senso la  $f$  è una applicazione analitica di  $S$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Fissiamo su  $\widehat{\mathbb{C}}$  le due carte

$$\begin{array}{ccc} \psi_0 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} & ; & \psi_\infty : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z & & z \longmapsto \frac{1}{z} \\ & & \infty \longmapsto 0 \end{array}$$

Sia  $p \in S$  e sia  $\varphi$  una carta locale intorno a  $p$  con  $\varphi(p) = 0$ . Se  $p$  non è un polo si  $f$  si potrà scrivere

$$f\varphi^{-1}(z) = z^n h(z), \quad n = \nu_p(f - f(p)) > 0, \quad h(z) \text{ olo.}, \quad h(0) \neq 0 \quad (1.5)$$

Se  $p$  è un polo di  $f$  si avrà

$$f\varphi^{-1}(z) = z^{-m} h(z), \quad m = -\nu_p(f) > 0, \quad h(z) \text{ olo.}, \quad h(0) \neq 0 . \quad (1.6)$$

Nel primo caso si avrà

$$\psi_0 f \varphi^{-1}(z) = z^n h(z) , \quad (1.7)$$

nel secondo

$$\psi_\infty f \varphi^{-1}(z) = \frac{z^m}{h(z)} , \quad (1.8)$$

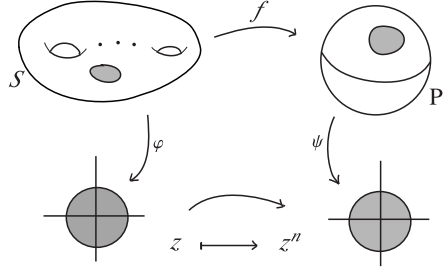
e ciò dimostra che  $f$  è una applicazione analitica di  $S$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$ . In effetti la (1.7) e la (1.8) dicono molto di più. Ci dicono che, a meno di cambiare ulteriormente la carta  $\varphi$ , si può assumere che

$$\psi_0 f \varphi^{-1}(z) = z^n \quad , \quad n = \nu_p(f - f(p)) , \quad \text{se } p \text{ non è un polo} . \quad (1.9)$$

$$\psi_\infty f \varphi^{-1}(z) = z^m \quad , \quad m = -\nu_p(f), \text{ se } p \text{ è un polo .} \quad (1.10)$$

Dunque come nel caso delle funzioni meromorfe su  $\widehat{\mathbb{C}}$ , data una  $f \in \mathcal{M}(S)$ , e vista come applicazione analitica da  $S$  a  $\widehat{\mathbb{C}}$ , si può sempre scegliere una coordinata locale  $\psi$  intorno a  $f(p)$  e una coordinata locale  $\varphi$  intorno a  $p$  in modo che

$$\psi f \varphi^{-1}(z) = z^n \quad (1.11)$$



Come prima conseguenza si ha che  $f$ , se non è costante, è una applicazione *aperta* e dunque, essendo  $S$  e  $\widehat{\mathbb{C}}$  compatte,  $f$  è *suriettiva*. Possiamo poi definire l'*indice di ramificazione*  $e_p(f)$ , come l'intero  $n$  che appare nella (1.11). Osserviamo che se  $p$  non è un polo di  $f$  allora

$$\nu_p(f - f(p)) = \nu_p d(f - f(p)) + 1 = \nu_p(df) + 1 ,$$

e quindi si ha

$$e_p(f) = \begin{cases} -\nu_p(f), & \text{se } p \text{ è un polo di } f \\ \nu_p(df) + 1, & \text{se } p \text{ non è un polo di } f. \end{cases} \quad (1.12)$$

Diremo che  $p$  è un punto di ramificazione di  $f$  se  $e_p(f) \geq 2$ . Dunque i punti di ramificazione vanno ricercati tra i poli di  $f$  e gli zeri di  $df$  e sono perciò in numero finito, essi formano il cosiddetto *divisore di ramificazione*

$$R_f = \sum_{p \in S} (e_p(f) - 1) p . \quad (1.13)$$

Sia ora  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ , mostriamo che

$$\sum_{p \in f^{-1}(z)} e_p(f) = n . \quad (1.14)$$

Ciò discende subito dalla (1.12), infatti se  $z = \infty$

$$n = \deg(f)_\infty = - \sum_{p \in f^{-1}(\infty)} \nu_p(f) = \sum_{p \in f^{-1}(\infty)} e_p(f) ,$$

mentre se  $z \neq \infty$

$$n = \deg(f - z)_0 = \sum_{p \in f^{-1}(z)} (\nu_p(df) + 1) = \sum_{p \in f^{-1}(z)} e_p(f).$$

In particolare posto

$$\begin{aligned} B &= f(\text{supp } R_f) \subset \widehat{\mathbb{C}} \\ A &= f^{-1}(B) \subset S, \end{aligned}$$

si ha che

$$f_0 = f|_{S \setminus A} : S \setminus A \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus B \quad (1.15)$$

è una applicazione continua che è

- i) un omeomorfismo locale,
- ii) suriettiva,
- iii) tale che,  $\forall z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus B$ ,  $f^{-1}(z) = \{n \text{ punti distinti}\}$ .

Dimostriamo che da i), ii), iii) segue che  $f_0$  è un rivestimento di grado  $n$ . Dato un punto  $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus B$ , e posto  $f^{-1}(z) = \{P_1, \dots, P_n\}$ , si prende, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , un piccolo disco parametrico  $V_i$  intorno a  $P_i$  su cui  $f_0$  sia un omeomorfismo locale, avendo cura che  $V_i \cap V_j = \emptyset$  per  $i \neq j$ . Si prende un disco  $U$  intorno a  $z$ , tale che

$$U \subseteq \cap f(V_i)$$

e si verifica immediatamente che  $U$  è un intorno ben rivestito di  $p$ .

Quando si guarda a una funzione meromorfa  $f \in \mathcal{M}(S)$  come ad una applicazione analitica

$$f : S \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}},$$

si suole dire che  $f$  è un *rivestimento ramificato* di  $\widehat{\mathbb{C}}$  e che le preimmagini dei punti di  $\widehat{\mathbb{C}}$  sono le *fibre* di  $f$ . Noi abbiamo dimostrato che togliendo a  $S$  le fibre su cui giacciono i punti di ramificazione si ottiene un rivestimento topologico finito  $f_0$  di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B$ , dove  $B$  è un insieme finito (cf.1.15). Vogliamo ora mostrare che ogni rivestimento topologico di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\text{insieme finito}\}$  può completarsi a un rivestimento ramificato.

**Teorema 1** . Sia  $B \subset \widehat{\mathbb{C}}$  un insieme finito e sia  $f_0 : S_0 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus B$  un rivestimento finito. Allora esiste una (unica) superficie di Riemann compatta  $S$ , un insieme finito  $A \subset S$ , e una funzione meromorfa  $f \in \mathcal{M}(S)$  tali che:  $S_0 = S \setminus A$  e  $f_0 = f|_{S_0}$ .

In ciò che segue denoteremo con i simboli  $\Delta$  e  $\dot{\Delta}$ , rispettivamente, il disco unitario e il disco puntato

$$\dot{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \dot{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo quella di due lemmi.

**Lemma 1** *Sia  $M$  una superficie di Riemann. Sia  $f : M \rightarrow \dot{\Delta}$  un rivestimento topologico finito. Si assuma che  $f$  sia analitica. Allora  $M$  è analiticamente equivalente a un disco puntato. Inoltre vi è un isomorfismo analitico  $\varphi : M \rightarrow \dot{\Delta}$  tale che  $f\varphi^{-1}(z) = z^n$ . Infine si può equipaggiare, in modo unico, l'insieme  $\bar{M} = M \cup \{p\}$  di una struttura analitica in modo tale che l'isomorfismo  $\varphi$  si estenda a un isomorfismo  $\bar{\varphi} : \bar{M} \rightarrow \Delta$ , con  $\bar{\varphi}(p) = 0$ , e  $f$  si estenda a una applicazione analitica  $\bar{f} : \bar{M} \rightarrow \Delta$  tale che  $\bar{f}(p) = 0$*

*Dim.* Si ha  $\pi_1(\dot{\Delta}, \frac{1}{2}) \cong \mathbb{Z}$ . sappiamo che, a meno di equivalenza, i rivestimenti di grado  $n$  di  $\dot{\Delta}$  corrispondono ai sottogruppi di indice  $n$  di  $\mathbb{Z}$ , a meno di coniugio. Poichè  $n\mathbb{Z}$  è l'unico sottogruppo di indice  $n$  di  $\mathbb{Z}$ , si ha che, a meno di equivalenza, l'unico rivestimento di grado  $n$  di  $\dot{\Delta}$  è dato da

$$\begin{array}{ccc} \zeta_n : \dot{\Delta} & \longrightarrow & \dot{\Delta} \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

Per quello che abbiamo appena detto, vi deve essere un omeomorfismo  $\varphi : M \rightarrow \dot{\Delta}$  che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & \dot{\Delta} \\ f \downarrow & & \nearrow \zeta_n \\ \dot{\Delta} & & \end{array} \quad (1.16)$$

Sia  $f$  che  $\zeta_n$  sono rivestimenti topologici analitici. In quanto tali sono ambedue isomorfismi analitici locali. Ne segue che anche  $\varphi$  è un isomorfismo analitico locale. Ma  $\varphi$  è un omeomorfismo e quindi  $\varphi$  non può che essere un isomorfismo analitico. Il resto del Lemma è banale.

Q.E.D.

E' da osservare che senza l'ipotesi di analiticità di  $f$  il Lemma precedente sarebbe falso. In effetti si può facilmente vedere che, prendendo come  $M$  un anello, si possono soddisfare tutte le ipotesi del Lemma (tranne, per l'appunto, l'analiticità di  $f$ ). Dimostreremo che un anello non è analiticamente equivalente a un disco puntato.

**Lemma 2** *Sia  $M$  una varietà complessa di dimensione  $n$ . Sia  $f : \widetilde{M} \rightarrow M$  un rivestimento topologico. Allora esiste su  $\widetilde{M}$  un'unica struttura di varietà complessa di dimensione  $n$  che rende  $f$  analitica.*

*Dim.* Sia  $p \in \widetilde{M}$ . Sia  $q = f(p)$ . Sia  $(U, \varphi)$  una carta locale intorno a  $q$ . Si supponga che l'aperto  $U$  sia ben rivestito da  $f$  e sia  $V$  la componente connessa di  $f^{-1}(U)$  contenete  $p$ . Si consideri l'omeomorfismo composto  $\psi = \varphi f|_V$ . È immediato verificare che si può ricoprire  $\widetilde{M}$  con carte locali del tipo  $(V, \psi)$  e che in questo modo si equipaggia  $\widetilde{M}$  di una struttura di varietà complessa di dimensione  $n$  che rende  $f$  analitica. In effetti se  $(V, \psi)$  e  $(V', \psi')$  sono carte locali del tipo sopra descritto, si ha che

$$\psi' \psi^{-1} = \varphi f|_V (\varphi' f|_{V'})^{-1} = \varphi' \varphi^{-1},$$

$$\varphi f \psi^{-1} = 1_{\varphi(U)}.$$

La prima eguaglianza ci dice che  $\{(V, \psi)\}$  è un atlante per una struttura di varietà complessa di dimensione  $n$ . La seconda che  $f$  è analitica. L'asserzione concernente l'unicità discende dal fatto che, se  $f$  è analitica, allora  $\psi = \varphi f|_V$  è un omeomorfismo analitico e dunque  $\{(V, \psi)\}$  è un atlante per la struttura complessa di  $\widetilde{M}$ . Q.E.D.

*Dim.*(del Teorema 1.2) Per il Lemma 1.4, lo spazio  $S_0$  ha una struttura di superficie di Riemann per cui  $f_0$  è una applicazione analitica. Sia  $b \in B$  e consideriamo un piccolo disco parametrico  $U$  intorno a  $b$ , in modo tale che  $U \cap B = \{b\}$ . Poniamo  $\dot{U} = U \setminus \{b\}$ . Per costruzione  $\dot{U} \subset f_0(S_0)$ . Sia

$$f^{-1}(\dot{U}) = \dot{U}_1 \cup \dots \cup \dot{U}_k$$

la decomposizione di  $f^{-1}(\dot{U})$  in componenti connesse. Si ha quindi che

$$f|_{\dot{U}_i} : \dot{U}_i \longrightarrow \dot{U}$$

è un rivestimento finito e analitico del disco puntato  $\dot{U}$ . Per il Lemma 1.3, ogni  $\dot{U}_i$  è analiticamente equivalente a un disco puntato e dunque, sempre per quel Lemma, si può "tappare" la puntura aggiungendo un punto. Facciamo questa operazione per tutti gli  $\dot{U}_i$  e per tutti i  $b \in B$ . Si ottiene una superficie di Riemann

$$S = S_0 \cup \{p_1, \dots, p_N\},$$

e una applicazione analitica suriettiva

$$f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

che estende  $f_0$ . Rimane solo da verificare che  $S$  è compatta. Per costruzione, ogni punto  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  possiede un intorno  $U$  tale che  $f^{-1}(U)$  è unione disgiunta di  $k$  dischi  $U_1, \dots, U_k$  (il numero  $k$  dipende da  $z$ ). Se dunque  $\{q_n\}$  è una successione in  $S$  esisterà, per la compattezza di  $\widehat{\mathbb{C}}$ , una sottosuccessione di  $\{f(q_n)\}$  convergente a un punto  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ , e ci sarà quindi un indice  $i$  e una sottosuccessione di  $\{q_n\}$  i cui elementi appartengono tutti a  $U_i$ . Essendo  $\overline{U_i}$  compatto passando, se necessario, a una ulteriore sottosuccessione si trova in  $S$  il limite desiderato.

L'asserzione di unicità discende dall'analogia asserzione contenuta nel Lemma 1.3.

Q. E. D.

In definitiva abbiamo dimostrato che vi è una corrispondenza biunivoca tra i seguenti due insiemi.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Applicazioni analitiche di grado } n \\ f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \text{ tali che } f(R_f) \subset B \end{array}} \quad (1.17)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Rivestimenti topologici connessi di grado } n \\ f_0 : S_0 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus B \end{array}} \quad (1.18)$$

Esattamente come nella teoria dei rivestimenti topologici, si definiscono *equivalenti* due applicazioni analitiche  $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  e  $f' : S' \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  se esiste un isomorfismo analitico  $\varphi : S \rightarrow S'$  tale che  $f = f'\varphi$ . Vogliamo classificare, a meno di equivalenza, tutti i possibili rivestimenti ramificati di  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Useremo la seguente notazione. Siano  $G$  e  $H$  due gruppi, diciamo che  $\alpha, \beta \in \text{Hom}(G, H)$  sono equivalenti se sono coniugati da un automorfismo interno di  $H$ , cioè se esiste  $h \in H$  tale che per ogni  $g \in G$  si ha

$$\beta(g) = h\alpha(g)h^{-1}. \quad (1.19)$$

Indichiamo con  $\text{Hom}^{ext}(G, H)$  l'insieme quoziente  $\text{Hom}(G, H)$  per la relazione di equivalenza appena introdotta. Gli elementi di questo insieme quoziente prendono il nome di *omomorfismi esterni*. Indichiamo con  $\mathcal{S}_n$  il gruppo di permutazioni su  $n$  elementi che pensiamo essere i numeri  $\{1, \dots, n\}$ . Un sottogruppo  $G \subseteq \mathcal{S}_n$  si dice *transitivo* se opera transitivamente su  $\{1, \dots, n\}$ .

Dimostriamo che vi è una corrispondenza biunivoca tra i seguenti insiemi.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Insieme delle classi di equivalenza di applicazioni analitiche} \\ \text{di grado } n, \quad f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \text{ tali che } f(R_f) \subset B \end{array}} \quad (1.20)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Insieme delle classi di equivalenza di rivestimenti topologici,} \\ \text{connessi di grado } n, \quad f_0 : S_0 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus B \end{array}} \quad (1.21)$$



Sottoinsieme di $Hom^{ext}(\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus B, z), \mathcal{S}_n)$ i cui elementi corrispondono a omomorfismi $\Phi : \pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus B, z) \rightarrow \mathcal{S}_n$ aventi per immagini sottogruppi transitivi di $\mathcal{S}_n$	(1.22)
--	--------

*Dim.* Abbiamo già dimostrato che vi è una corrispondenza biunivoca tra 1.20 e 1.21. Dimostriamo che vi è una corrispondenza biunivoca tra 1.21 e 1.22. Sia  $f_0 : S_0 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus B$  un rivestimento di ordine  $n$ . Sia  $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus B$  e sia

$$\alpha : \{1, \dots, n\} \rightarrow f_0^{-1}(z)$$

una enumerazione dei punti della fibra. Per ogni  $[\gamma] \in \pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus B, z)$  posto  $\tilde{\gamma}_k$  il sollevamento con punto iniziale  $\alpha(k)$  definiamo

$$\Phi(f_0)(\gamma)(k) = \alpha^{-1}(\tilde{\gamma}_k \cdot (1)) \quad (1.23)$$

Si ha che

$$\Phi(f_0) : \pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus B, z) \rightarrow \mathcal{S}_n \quad (1.24)$$

è un omomorfismo di gruppi. Poiché  $S_0$  è connesso, l'immagine di  $\Phi$  è un sottogruppo transitivo di  $\mathcal{S}_n$ . Inoltre è immediato verificare che cambiando l'enumerazione o applicando una trasformazione di rivestimento si ottiene un morfismo equivalente, quindi l'applicazione  $\Phi$  è ben definita. Per mostrare che  $\Phi$  è biettiva costruiremo, in modo esplicito, l'inversa di  $\Phi$ . Sia dunque

$$\phi : \pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus B, z) \rightarrow \mathcal{S}_n \quad (1.25)$$

un omomorfismo la cui immagine è un sottogruppo transitivo di  $\mathcal{S}_n$ , poniamo

$$H(\phi) = \{[\gamma] \in \pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus B, z) \mid \phi([\gamma])(1) = 1\}.$$

$H(\phi)$  è un sottogruppo di  $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus B, z)$ . Poiché  $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus B, z)$  (o meglio, la sua immagine tramite  $\phi$ ) agisce transitivamente su  $\{1, \dots, n\}$ , l'indice del sottogruppo  $H(\phi)$  è uguale a  $n$ . Dunque a  $H(\phi)$  corrisponde un rivestimento di ordine  $n$  di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B$  che indichiamo con

$$f_0(\phi) : S_0 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus B.$$

È un esercizio verificare che l'applicazione che manda la classe di equivalenza di  $\phi$  nella classe di equivalenza di  $f_0(\phi)$  è ben posta ed è l'inversa di  $\Phi$ .

Q.E.D.

Ricordiamo che il primo gruppo di omotopia di  $\mathbb{C} \setminus B$  è il gruppo libero su  $b = |B|$  elementi  $\gamma_1, \dots, \gamma_b$  (i cicli intorno alle punture), modulo la relazione  $\gamma_1 \cdots \gamma_b = 1$ . Diremo che due  $b$ -uple  $(\sigma_1, \dots, \sigma_b)$  e  $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_b)$  di elementi di  $\mathcal{S}_n$

sono equivalenti se esiste un elemento  $\tau \in \mathcal{S}_n$  tale che  $\sigma'_i = \tau^{-1}\sigma_i\tau$ ,  $i = 1, \dots, b$ . Ciò detto, si vede subito che l'insieme 1.22 può anche descriversi nel modo seguente

Classi di equivalenza di $b$ -uple $(\sigma_1, \dots, \sigma_b)$ di elementi di $\mathcal{S}_n$ che generano un sottogruppo transitivo e tali che $\sigma_1 \cdots \sigma_b = 1$ .	(1.26)
--	--------

Il teorema che abbiamo dimostrato ci consente di costruire, a partire da  $\widehat{\mathbb{C}}$ , delle nuove superfici di Riemann compatte che vengono automaticamente equipaggiate di una funzione meromorfa non costante: la  $f$  stessa. In seguito vedremo che tutte le superfici di Riemann compatte si ottengono come rivestimenti ramificati di  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Per questo basterà, ovviamente, dimostrare che su ogni superficie di Riemann compatta esiste una funzione meromorfa non costante.

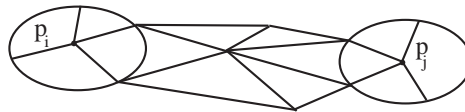
Terminiamo questa sezione dimostrando una formula molto importante: la *formula di Hurwitz*. Consideriamo una applicazione meromorfa (rivestimento ramificato)

$$f : S \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} .$$

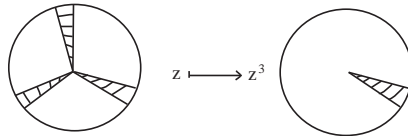
Sia  $n$  il grado di  $f$ . Vogliamo dimostrare che

$$2n + 2g - 2 = \sum_{p \in S} (e_p(f) - 1) . \tag{1.27}$$

Per fare ciò consideriamo in  $\widehat{\mathbb{C}}$  i punti di *diramazione* di  $f$ , e cioè le immagini dei punti di ramificazione. Siano essi  $p_1, \dots, p_s$ . Scegliamo piccoli dischi  $\Delta_1, \dots, \Delta_s$  tali che  $\Delta_i$  abbia centro in  $p_i$  e  $\overline{\Delta_i} \cap \overline{\Delta_j} = \emptyset$   $i \neq j$ . Triangoliamo ogni disco  $\overline{\Delta_i}$  in modo che il centro sia vertice della triangolazione e completiamo queste triangolazioni a una triangolazione di  $\widehat{\mathbb{C}}$ :



Denotiamo con  $T$  questa triangolazione. Si verifica facilmente che  $\widetilde{T} = f^{-1}(T)$  è anche una triangolazione.



Se indichiamo con  $v, l, t$  (risp.  $\tilde{v}, \tilde{l}, \tilde{t}$ ) i vertici i lati e i triangoli di  $T$  (risp.  $\tilde{T}$ ) si ha

$$\begin{aligned}\tilde{l} &= nl, & \tilde{t} &= nt \\ \tilde{v} &= nv - \sum_{p \in S} (e_p(f) - 1)\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}2 - 2g = \chi(S) &= \tilde{v} - \tilde{l} + \tilde{t} = nv - nl - nt - \sum_{p \in S} (e_p(f) - 1) \\ &= n\chi(\hat{\mathbb{C}}) - \sum_{p \in S} (e_p(f) - 1) \\ &= 2n - \sum_{p \in S} (e_p(f) - 1)\end{aligned}$$

come volevamo.

Un interessante conseguenza della formula di Hurwitz è il fatto che, in una superficie di Riemann compatta di genere  $g$ , ogni differenziale meromorfo ha grado  $2g - 2$ :

$$\omega \in \Omega^1(S)_{\text{mero}} \implies \deg(\omega) = 2g - 2 \quad (1.28)$$

Per dimostrare questo fatto assumeremo un risultato che verrà dimostrato nel prossimo capitolo e cioè che su ogni superficie di Riemann compatta esiste una funzione meromorfa non costante. Sia  $f$  una tale funzione. Poichè abbiamo già dimostrato (Corollario ( )) che, per ogni  $\omega \in \Omega^1(S)_{\text{mero}}$  si ha

$$\deg(\omega) = \deg(df)$$

basterà dimostrare che

$$\deg(df) = 2g - 2. \quad (1.29)$$

Possiamo supporre che tutti i poli di  $f$  siano semplici, altrimenti sostituiremo  $f$  con la funzione  $1/(f - a)$  dove  $a \in \mathbb{C}$  non è punto di diramazione per  $f$ . D'altro canto, se tutti i poli di  $f$  sono semplici essi non sono punti di ramificazione e dunque

$$\sum_{p \in S} (e_p(f) - 1) = \deg(df)_0.$$

I poli di  $df$  cadono tra i poli di  $f$ . Se  $f$  ha in  $P$  un polo semplice  $df$  vi ha un polo doppio. Quindi

$$(df)_\infty = 2n.$$

Si applica ora la formula di Hurwitz e si ottiene

$$\begin{aligned}\deg(df) &= \deg(df)_0 - \deg(df)_\infty \\ &= 2n - \sum_{p \in S} (e_p(f) - 1) \\ &= 2g - 2,\end{aligned}$$

come si voleva. Un'utile applicazione della formula (1.29) è la seguente

**Corollario 1** . *Sia*

$$C = \{[X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid F(X_0, X_1, X_2) = 0\}$$

*una curva piana non-singolare di grado  $d$ . Sia  $g$  il suo genere. Allora*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} .$$

*Dim.* Noi sappiamo che  $C$  è una superficie di Riemann compatta. Ancora non sappiamo che è connessa, ma lo dimostreremo nella sezione 3 (Esercizio 11). Per ora lo assumiamo. Sappiamo anche che i differenziali

$$\omega = \frac{\varphi(x, y)}{(\partial F/\partial y)} dx$$

dove  $\varphi(x, y)$  è di grado minore o uguale a  $d-3$  sono olomorfi. Consideriamo il caso in cui  $\varphi = 1$ :

$$\omega = \frac{dx}{(\partial F/\partial y)} .$$

Poché  $x$  e  $y$  sono olomorfe in  $C \cap U_0$  e poiché in  $C \cap U_0$

$$\frac{dx}{(\partial F/\partial y)} = \frac{dy}{(\partial F/\partial x)} ,$$

$\omega$  non può avere zeri in  $C \cap U_0$ . Non rimane che esaminare  $\omega$  sulla retta all'infinito  $X_0 = 0$ . Usiamo le notazioni della fine del § 7, Cap. 5. All'infinito, nelle due carte che ricoprono la retta  $X_0 = 0$  si ha: in  $U_1$

$$\omega = \frac{-u^{d-3} du}{(\partial F/\partial v)}$$

e in  $U_2$

$$\omega = \frac{\xi^{d-3} d\xi}{(\partial F/\partial \eta)}$$

In definitiva gli zeri di  $\omega$  coincidono con gli zeri della funzione meromorfa

$$f = \begin{cases} u & \text{in } U_1 \\ \xi & \text{in } U_2 \end{cases} \quad \xi = u/v \text{ in } U_1 \cap U_2 \quad (1.30)$$

Dal momento che si può sempre assumere che  $C$  non passi per il punto  $[0, 0, 1]$  si ha che

$$(\omega)_0 = (d-3)(u)_0 .$$

D'altro canto, essendo  $d$  il grado di  $F$ , si ha

$$\deg(u)_0 = d .$$

In definitiva

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= \deg(\omega)_0 \\ &= d(d - 3), \end{aligned}$$

e il corollario è dimostrato.

### Esercizi

1. Sia  $p : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  l'applicazione definita da

$$p(z) = (1/3)z^3 + z, \quad p(\infty) = \infty.$$

Trovare i punti di ramificazione di  $p$ .

2. Trovare zeri e poli (con relativi ordini) e punti di ramificazione (con relativi indici) della funzione  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  definita da:

$$f(z) = z^3 + z^2, \quad \text{per } z \in \mathbb{C}, \quad f(\infty) = \infty$$

3. Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  l'applicazione analitica definita da

$$f(z) = \frac{1}{2z^2} + z.$$

Estendere  $f$  ad una applicazione analitica  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Calcolare gli zeri, i poli e i punti di ramificazione

4. Si consideri la funzione meromorfa

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

come applicazione di  $\widehat{\mathbb{C}}$  in sé. Si dimostri che, come tale,  $f$  è bianalitica e che stabilisce un'applicazione bianalitica tra il semipiano superiore  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}$  e il disco unitario.

5. Descrivere tutte le applicazioni bianalitiche di  $\widehat{\mathbb{C}}$  in sé.

6. Sia  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  l'applicazione analitica definita da

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}.$$

Determinare gli zeri, i poli e i punti di ramificazione di  $f$ . Trovare una carta  $\phi$  intorno a  $-1$  e una  $\psi$  intorno a  $f(-1)$ , tali che  $\psi f \phi^{-1}(\zeta) = \zeta^n$  per qualche  $n > 0$ .

7. Sia  $\mathbb{H}$  il semipiano superiore,  $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$  con  $\deg q(z) \geq \deg p(z) + 2$  e  $q(z)$  privo di zeri reali, verificare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \sum_{z_0 \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}_{z_0} \frac{p(z)}{q(z)} dz.$$

8. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)} dx$$

9. Sia  $S$  una superficie di Riemann compatta e  $\omega, \phi \in \Omega^1(S)$  tali che

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \phi$$

per ogni cammino regolare  $\gamma$ , dimostrare  $\omega = \phi$ .

10. Sia  $f : S' \rightarrow S$  un'applicazione analitica non costante tra superfici di Riemann compatte. Indichiamo con  $R_f$  l'insieme di ramificazione di  $f$ , cioè l'insieme dei punti di  $S'$  in cui  $f$  non è un omeomorfismo locale. Dimostrare che

- i) Per ogni  $q \in S$ ,  $f^{-1}(q)$  è un insieme finito
- ii)  $B = f(R_f)$  è un insieme finito
- iii) Posto  $A = f^{-1}(B)$ ,  $f_0 : S' \setminus A \rightarrow S \setminus B$  è un rivestimento finito
- iv) Per ogni  $q \in S$  si ha

$$\sum_{p \in f^{-1}(q)} e_p(f) = n,$$

dove  $n$  è il grado del rivestimento (In questo esercizio e nei successivi, si assuma l'esistenza di funzioni meromorfe non costanti sulle superfici di Riemann compatte).

11. Sia  $S$  una superficie di Riemann compatta. Sia  $B$  un insieme finito. Sia  $q \in S \setminus B$  e sia  $n$  un intero positivo. Dimostrare che vi è una corrispondenza biunivoca tra i seguenti insiemi

- i) L'insieme dei rivestimenti ramificati di ordine  $n$ ,  $f : S' \rightarrow S$ , a meno di isomorfismi analitici, tali che  $f(R_f) \subset B$ .
- ii) L'insieme delle classi di equivalenza dei rivestimenti di ordine  $n$  di  $S \setminus B$ .
- iii) Il sottoinsieme di  $\operatorname{Hom}^{\text{ext}}(\pi_1(S \setminus B, z), \mathcal{S}_n)$ , i cui elementi sono rappresentati da omomorfismi che hanno come immagini sottogruppi transitivi di  $\mathcal{S}_n$ .

12. Sia  $f : S' \rightarrow S$  un'applicazione analitica non costante tra superfici di Riemann compatte di grado  $n$ , dimostrare la formula di Hurwitz

$$2g(S') - 2 = n(2g(S) - 2) + \sum_{p \in S'} (e_p(f) - 1)$$

13. Sia  $f : S' \rightarrow S$  un'applicazione analitica non costante tra superfici di Riemann compatte, dimostrare che  $g(S') \geq g(S)$  e quindi se  $S' \simeq \widehat{\mathbb{C}}$ , allora anche  $S$  lo è (Teorema di Lüroth).

14. Sia  $f : S' \rightarrow S$  un'applicazione analitica non costante tra superfici di Riemann compatte, assumiamo che  $g(S') = g(S)$ , dimostrare che

- i)  $f$  ha ramificazione  $\iff g = 0$
- ii) se  $g(S') = g(S) \geq 2$   $f$  è un isomorfismo
- iii) se  $g(S') = g(S) = 1$ ,  $f$  può avere ogni grado. Esibire esplicitamente tali  $f$ .

15. Siano  $X, Y, Z$  coordinate omogenee in  $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ . Sia

$$C = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid X^4 + XY^3 + Z^4 = 0\}.$$

Si consideri su  $C$  la funzione meromorfa  $f = X/Z$

- i) Calcolare poli e zeri di  $f$  con i loro ordini.
- ii) Calcolare i punti di ramificazione di  $f$  con i loro indici, e calcolare il genere di  $C$ .
- iii) Trovare su  $C$  tre differenziali olomorfi linearmente indipendenti.

16. Siano  $X, Y, Z$  coordinate omogenee in  $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ . Sia

$$C = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid X^4 + Y^4 + Z^4 = 0\}.$$

Si considerino su  $C$  le funzioni meromorfe  $f = (Y - Z)/X$  e  $h = X/Z$

- i) Calcolare poli e zeri di  $f$  e di  $h$ .
- ii) Calcolare i punti di ramificazione di  $h$  con i loro indici, e calcolare il genere di  $C$ .
- iii) Trovare su  $C$  tre differenziali olomorfi linearmente indipendenti.

17. Siano  $X, Y, Z$  coordinate omogenee in  $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ . Sia

$$C = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid X^4 + Y^4 + Z^4 = 0\}.$$

Sia  $i : C \rightarrow C$  l'involuzione definita da  $i([X, Y, Z]) = [-X, Y, Z]$ . Calcolare il genere di  $C/i$ .

## 1.2 Applicazioni di Superfici di Riemann in $\mathbb{P}^n$

Nella precedente sezione abbiamo studiato le funzioni meromorfe  $f$  su di una superficie di Riemann compatta  $C$  riguardandole come applicazioni analitiche

$f : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1$ . Vogliamo ora studiare le  $n$ -ple di funzioni meromorfe. Siano  $f^1, \dots, f^n$  funzioni meromorfe su  $C$ . Ha senso considerare l'applicazione analitica

$$\begin{aligned} \Phi : S \setminus \{\text{poli di } f\} &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ p &\mapsto \Phi(p) = [1, f^1(p), \dots, f^n(p)] \end{aligned} \quad (2.31)$$

Mostriamo che  $\Phi$  si estende in modo naturale a una applicazione di  $S$  in  $\mathbb{P}^n$  (estensione che continueremo a denotare con il simbolo  $\Phi$ ). Sia  $p$  un polo di una delle funzioni  $f^1, \dots, f^n$ . Sia  $(U, \varphi)$  una coordinata locale intorno a  $p$  con  $\varphi(p) = 0$ . Scriviamo

$$f^i(\varphi^{-1}(z)) = z^{\nu_i} h^i(z),$$

dove  $h^i$  è olomorfa in  $\varphi(U)$  e  $h^i(0) \neq 0$ . Sia

$$-N = \nu_j = \min_{i=1, \dots, n} \{\nu_i\}.$$

Per ipotesi  $N > 0$ . Poniamo  $q = \varphi^{-1}(z)$ . Per  $q \neq p$  si ha  $z \neq 0$  e quindi

$$\begin{aligned} \Phi(q) &= [1, z^{\nu_1} h^1(z), \dots, z^{-N} h^i(z), \dots, z^{\nu_n} h^n(z)] \\ &= [z^N, z^{N-\nu_1} h^1(z), \dots, h^i(z), \dots, z^{N-\nu_n} h^n(z)] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Le funzioni  $k^i(z) = z^{N-\nu_i} h^i(z)$  sono olomorfe in  $\varphi(U)$  e dunque si può definire

$$\Phi(p) = [0, k^1(0), \dots, k^n(0)].$$

Questa è l'estensione desiderata. Vogliamo ora dimostrare che ogni applicazione analitica di una superficie di Riemann in  $\mathbb{P}^n$  si ottiene in questo modo.

**Proposizione 2** *Sia  $S$  una superficie di Riemann. I seguenti dati sono equivalenti*

A) *Un insieme di  $n$  funzioni meromorfe  $f^1, \dots, f^n$ .*

B) *Una applicazione analitica  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{P}^n$ .*

C) *Un ricoprimento aperto  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  di  $S$ . Per ogni  $\alpha \in A$ , un insieme di  $n$  funzioni olomorfe  $s_\alpha^0, \dots, s_\alpha^n \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ . Per ogni coppia  $\alpha, \beta \in A$  delle funzioni olomorfe e mai nulle  $\xi_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ , tali che  $s_\beta = \xi_{\alpha\beta} s_\alpha$ , in  $U_\alpha \cap U_\beta$ .*

*Dim.* Abbiamo già visto che A)  $\Rightarrow$  B).

B)  $\Rightarrow$  C). Sia  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{P}^n$  una applicazione analitica. Siano  $X^0, \dots, X^n$  coordinate omogenee in  $\mathbb{P}^n$ . Sia  $V_\alpha = \{[X^0, \dots, X^n] \in \mathbb{P}^n \mid X^\alpha \neq 0\}$  e si ponga  $U_\alpha = \Phi^{-1}(V_\alpha)$ . Si ha

$$\begin{aligned} \Phi : U_\alpha &\longrightarrow V_\alpha \\ p &\mapsto [h_\alpha^1, \dots, 1, \dots, h_\alpha^n] \end{aligned} \quad (2.33)$$

dove le  $h_\alpha$  sono olomorfe in  $\Phi^{-1}(V_\alpha)$  e dove 1 sta all' $\alpha$ -esimo posto. Basta allora porre  $(s_\alpha^0, \dots, s_\alpha^n) = (h_\alpha^1, \dots, 1, \dots, h_\alpha^n)$  e osservare che l'esistenza delle  $\xi_{\alpha\beta}$  discende dal fatto che  $\Phi$  è ben definita.



C)  $\Rightarrow$  A). Si pone  $f_\alpha^i = s_\alpha^i / s_\alpha^0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dunque  $f_\alpha^i$  è una funzione meromorfa in  $U_\alpha$ . Il fatto che  $s_\beta = \xi_{\alpha\beta} s_\alpha$ , in  $U_\alpha \cap U_\beta$ , ci dice che  $f_\alpha^i = f_\beta^i$  in  $U_\alpha \cap U_\beta$ . Dunque, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , le funzioni  $f_\alpha^i$  definiscono una funzione meromorfa globale  $f^i$ .

**Notazione 1** Consideriamo le coordinate proiettive omogenee  $X^0, \dots, X^n$  in  $\mathbb{P}^n$  e consideriamo le coordinate affini  $x^i = X^i / X^0$  per  $i = 1, \dots, n$ . Mantenendo le notazioni della precedente proposizione, scriveremo

$$f^i = \Phi^*(x^i).$$

La notazione è giustificata dal fatto che, quando  $p$  non è un polo per  $f^i$ , allora

$$f^i(p) = x^i \circ \Phi(p).$$

Nel Capitolo 3 abbiamo studiato la desingularizzazione di una curva algebrica piana. Il risultato raggiunto era il seguente. Si parte da una curva algebrica piana  $\Gamma$  e cioè dal luogo degli zeri di un polinomio omogeneo  $F(X, Y, Z)$  (che ora supponiamo irriducibile)

$$\Gamma = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2 : F(X, Y, Z) = 0\}.$$

Dopo successivi scoppamenti, la trasformata propria di  $\Gamma$  è una superficie di Riemann compatta  $C$  (che, come vedremo in seguito, è anche connessa). Denotando con  $\sigma$  la composizione di questi scoppamenti l'applicazione analitica

$$\sigma : C \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

ha dunque le seguenti proprietà:

a)  $\sigma(C) = \Gamma$ .

b) Posto  $\sigma^{-1}(\Gamma_{sing}) = \{p_1, \dots, p_N\}$ , allora  $\sigma : C \setminus \{p_1, \dots, p_N\} \rightarrow \Gamma \setminus \Gamma_{sing}$  è un isomorfismo.

**Notazione 2** Spesso negli esempi e negli esercizi useremo la seguente notazione. Si denotano con  $X, Y, e Z$  coordinate omogenee in  $\mathbb{P}^2$ . Si pone

$$U_Z = \{[X, Y, Z] : Z \neq 0\}, \quad \text{con coordinate } x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z},$$

$$U_Y = \{[X, Y, Z] : Y \neq 0\}, \quad \text{con coordinate } u = \frac{X}{Y}, \quad v = \frac{Z}{Y},$$

$$U_X = \{[X, Y, Z] : X \neq 0\}, \quad \text{con coordinate } s = \frac{Y}{X}, \quad t = \frac{Z}{X}.$$

Inoltre, se  $\sigma : C \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{P}^2$  è la desingularizzazione di una curva algebrica piana  $\Gamma$ , a volte, ove questo non generi confusione, denoteremo le funzioni meromorfe  $\sigma^*(x), \sigma^*(y), \sigma^*(u), \dots \in \mathcal{M}(C)$  semplicemente con i simboli  $x, y, u, \dots$

**Esempio 1** (*Curve iperellittiche*) Studiamo la curva algebrica piana

$$\Gamma = \{[X, Y, Z] : Y^2 Z^{2N-2} = \prod_{i=1}^{2N} (X - e_i Z)\}$$

dove gli  $e_i$  sono numeri complessi distinti e  $N$  è un intero positivo. La curva  $\Gamma$  ha come unico punto singolare il punto  $p_\infty = [0, 1, 0]$ . L'equazione di  $\Gamma$  nell'intorno  $U_Y$  di  $p_\infty$  è

$$v^{2N-2} = \prod_{i=1}^{2N} (u - e_i v).$$

Scoppiamo  $N$ -volte  $U_Y$  nel punto  $p_\infty = (0, 0)$  e precisamente facciamo:

uno scoppiamento del tipo  $(u, v) \mapsto (u, uv)$ ,

$N-2$  scoppiamenti del tipo  $(u, v) \mapsto (uv, v)$ ,

uno scoppiamento del tipo  $(u, v) \mapsto (u, uv)$ .

Denotiamo con  $\sigma$  la composizione di questi scoppiamenti. La trasformata propria  $C$  di  $\Gamma$ , secondo  $\sigma$ , è la curva

$$v^2 = \prod_{i=1}^{2N} (1 - e_i uv),$$

e si ha  $\sigma^{-1}(p_\infty) = \{p, q\}$ , dove  $p = (0, 1)$  e  $q = (0, -1)$ . La funzione  $u$  può essere presa come coordinata locale intorno a  $p$  e a  $q$ , e dunque intorno a  $p$ , (risp.  $q$ ) si ha

$$v = 1 + au + bu^2 + \dots, \quad (v = -1 + au + bu^2 + \dots)$$

Si verifica inoltre che

$$\sigma^*(x) = \sigma^*\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{uv}, \quad \sigma^*(y) = \sigma^*\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{u^N v^{N-1}} \quad (2.34)$$

In particolare, se ne deduce che  $\sigma^*(x)$  ha in  $p$  e  $q$  dei poli semplici. Considerando  $f = \sigma^*(x)$  come rivestimento ramificato di  $\widehat{\mathbb{C}}$ , si vede che esso ha grado uguale a 2:

$$f^{-1}(x) = \left( x, \pm \sqrt{\prod_{i=1}^{2N} (x - e_i)} \right), \quad (2.35)$$

$$f^{-1}(\infty) = \{p, q\}.$$

Inoltre i punti di ramificazione di  $\sigma$  sono i punti  $r_i = (e_i, 0)$ . Dalla formula di Hurwitz segue che il genere  $g$  di  $C$  soddisfa:

$$2 \cdot 2 + 2g - 2 = 2N$$

e quindi  $g = N - 1$ . Consideriamo ora le forme meromorfe

$$\omega_i = \frac{x^i}{y} dx, \quad i = 0, \dots, N - 2.$$

(Qui scriviamo  $x$  invece di  $\sigma^*(x)$  e  $y$  invece di  $\sigma^*(y)$ ). Dimostriamo che queste  $g$  forme sono *olomorfe*. Sia  $F(x, y) = y^2 - \prod_{i=1}^{2N} (x - e_i)$ . Ricordiamo che  $(F_x, F_y) \neq (0, 0)$ . Poiché

$$\omega_i = 2 \frac{x^i}{F_y} dx = -2 \frac{x^i}{F_x} dy,$$

le forme  $\omega_i$  sono olomorfe in  $U_Z$ . Tenendo conto di 2.34, in un intorno di  $p$  o di  $q$  si ha

$$\omega_i = u^{N-i-2} v^{N-i-3} d(uv).$$

Dunque, essendo  $i \leq N - 2$ ,  $\omega_i$  è olomorfa. Le forme olomorfe  $\omega_i$  sono linearmente indipendenti. Infatti, se fosse  $\sum a_i \omega_i = 0$ , allora sarebbe anche  $\sum a_i x^i = 0$ . Ma questo è impossibile perché  $x^i$  ha un polo di ordine  $i$  in  $p_\infty$ .

## 2.3 Superfici di Riemann compatte e curve algebriche piane

In questa sezione vogliamo mostrare che ogni superficie di Riemann può ottenersi come desingularizzazione di una curva algebrica piana. Il primo teorema che vogliamo dimostrare è il seguente

**Teorema 2** *Sia  $C$  una superficie di Riemann compatta. Siano  $f$  e  $g$  due funzioni meromorfe. Allora esiste un polinomio  $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$  tale che  $F(f, g) \equiv 0$ .*

*Dim.* Sia  $n$  il grado di  $f$  e poniamo

$$A = \{\text{poli di } g\} \cup \{\text{punti di ramificazione di } f\} \quad (3.36)$$

Sia  $B = f(A)$ . Per ogni punto  $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus B$  scriviamo

$$f^{-1}(z) = \{p_{1,z}, \dots, p_{n,z}\} \quad (3.37)$$

Anche se non ha alcun senso ordinare i punti di  $f^{-1}(z)$  al variare di  $z$  in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B$ , ha però buon senso scegliere, *per ogni fissato  $z$* , un ordinamento di  $f^{-1}(z)$ : questo è ciò che intendiamo scrivendo la (3.37). Consideriamo ora le funzioni

simmetriche elementari:

$$\begin{aligned}\sigma_1(c_1, \dots, c_n) &= -(c_1 + \dots + c_n) , \\ \sigma_2(c_1, \dots, c_n) &= \sum_{i < j} c_i c_j , \\ &\vdots \\ \sigma_k(c_1, \dots, c_n) &= (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1} \dots c_{i_k} , \\ &\vdots \\ \sigma_n(c_1, \dots, c_n) &= (-1)^n c_1 \dots c_n .\end{aligned}$$

Esse sono definite dall'eguaglianza

$$\prod_{i=1}^n (y - c_i) = y^n + \sigma_1 y^{n-1} + \dots + \sigma_n , \quad (3.38)$$

e godono della proprietà di simmetria

$$\sigma_k(c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(n)}) = \sigma_k(c_1, \dots, c_n) , \quad \forall \pi \in \mathcal{S}_n .$$

Ne segue che la scrittura

$$r_k(z) = \sigma_k(g(p_{1,z}), \dots, g(p_{n,z}))$$

non dipende dal particolare ordinamento scelto per i punti di  $f^{-1}(z)$ . Inoltre non essendo, per nostra scelta, alcuno dei punti  $p_{i,z}$  un polo di  $g$ , si ha che, per ogni  $k$ ,  $r_k(z)$  è una funzione olomorfa in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B$ . Vogliamo mostrare che  $r_k(z)$  è una funzione razionale i.e.

$$r_k(z) \in \mathbb{C}(z) .$$

Per fare questo basta far vedere che  $r_k(z)$  ha al più dei poli nei punti di  $B$ , o, ciò che è lo stesso, mostrare che, per ogni punto  $b \in B$ , si ha

$$\lim_{z \rightarrow b} (z - b)^N r_k(z) = 0 \quad (3.39)$$

per qualche  $N \geq 0$ . Supponiamo che

$$f^{-1}(b) = \{q_1, \dots, q_\nu\}$$

e poniamo

$$e_i = e_{q_i}(f) ,$$

con il che si ha

$$n = \text{grado}(f) = \sum_{i=1}^{\nu} e_i .$$

Possiamo scegliere carte locali  $(U, \varphi)$  intorno al punto  $b$  e  $(U_i, \varphi_i)$  intorno a  $q_i$  tali che, per  $i \in \{1, \dots, \nu\}$ ,

1.  $\varphi(U) = \varphi_i(U) = \Delta = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1 \right\}$ ,
2.  $\varphi(b) = \varphi_i(q_i) = 0$ ,
3.  $f^{-1}(U) = \cup_{i=1}^{\nu} U_i, \quad U_i \cap U_j = \emptyset, \quad i \neq j$ ,
4.  $\varphi f \varphi_i^{-1}(\zeta) = \zeta^{e_i}$ ,
5.  $g \varphi_i^{-1}(\zeta) = \zeta^{n_i} h_i(\zeta)$ .

dove  $n_i \in \mathbb{Z}$ ,  $h_i$  è olomorfa e  $h_i(0) \neq 0$ . Naturalmente come  $\varphi$  possiamo scegliere la carta definita da  $\varphi(z) = z - b$ . Supponiamo ora di voler far tendere  $z$  a  $b$  in  $U$  il che corrisponde a far tendere  $\zeta$  a 0 in  $\varphi(U)$ . I punti  $p_{1,z}, \dots, p_{n,z}$  di  $f^{-1}(z)$  si distribuiscono in  $U_1, \dots, U_\nu$ , e precisamente  $e_1$  punti in  $U_1$ ,  $e_2$  in  $U_2$  e così via. Fissiamo  $V = U_i$ , poniamo  $\psi = \varphi_i$ ,  $e = e_i$ ,  $n = n_i$ ,  $h = h_i$ . Siano  $p_{1,z} = p_{1,z}^i, \dots, p_{e,z} = p_{e,z}^i$  i punti di  $f^{-1}(z)$  che stanno in  $U_i = V$ . Vogliamo studiare il comportamento di

$$r_k(z) = \sigma_k(\dots, g(p_{1,z}), \dots, g(p_{e,z}), \dots)$$

al tendere di  $z$  a  $b$ . Togliendo al disco  $\Delta$  una semiretta  $l$ , possiamo scrivere

$$p_{j,z} = \psi^{-1} \left( \varepsilon^j \sqrt[e]{\zeta} \right)$$

dove  $\varepsilon$  è una radice primitiva  $e$ -esima di 1. Dunque

$$r_k(\varphi^{-1}(\zeta)) = \sigma_k(\dots, \underbrace{g\psi^{-1}(\varepsilon^j \sqrt[e]{\zeta}), \dots, g\psi^{-1}(\varepsilon^e \sqrt[e]{\zeta})}_{\text{in } V=U_i}, \dots)$$

Ne segue che

$$\lim_{z \rightarrow b} (z - b)^N r_k(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta^N r_k(\varphi^{-1}(\zeta)) = 0$$

se  $N$  è sufficientemente grande e se  $\zeta$  non appartiene alla semiretta  $l$  che avevamo tolto. D'altro canto quella semiretta era del tutto arbitraria e la (3.39) è dimostrata. Poniamo ora

$$G(x, y) = y^n + r_1(x)y^{n-1} + \dots + r_n(x). \quad (3.40)$$

È questo un polinomio a coefficienti funzioni razionali, i.e.

$$G(x, y) \in \mathbb{C}(x)[y].$$

Moltiplicando  $G(x, y)$  per il minimo comune multiplo  $Q(x)$  dei denominatori di  $r_1(x), \dots, r_n(x)$  si ottiene un polinomio

$$F(x, y) = Q(x)G(x, y) \in \mathbb{C}[x, y].$$

Vogliamo mostrare che

$$F(f, g) \equiv 0. \quad (3.41)$$

Essendo  $f$  e  $g$  funzioni meromorfe su  $S$  anche  $F(f, g)$  lo è, e per dimostrare la (3.41) basta dimostrare che  $F(f, g) \equiv 0$  in un aperto di  $C$ . Prendiamo come aperto  $C \setminus D$ , dove  $D = f^{-1}(B)$ . Sia dunque  $p \in C \setminus D$ . Se  $z = f(p)$  si ha che

$$p \in f^{-1}(z) = \{p_{1,z}, \dots, p_{n,z}\}$$

Assumiamo che  $p = p_{1,z}$ . Quindi

$$\begin{aligned} F(f(p), g(p)) &= Q(f(p))G(f(p), g(p)) = Q(z)G(z, g(p)) \\ &= Q(z) \prod_{i=1}^n (g(p) - g(p_{i,z})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

come si voleva.

Q.E.D.

Vogliamo ora dimostrare il teorema che avevamo preannunciato.

**Teorema 3** *Ogni superficie di Riemann compatta si può ottenere come desingularizzazione di una curva algebrica piana definita da un polinomio irriducibile.*

La dimostrazione di questo teorema si basa su un fondamentale teorema di esistenza che dimostreremo nel Capitolo 12. Una conseguenza di quel teorema sarà il seguente Lemma che, per ora, asumiamo.

**Lemma 3** *Sia  $C$  una superficie di Riemann compatta. Esistono su  $C$  due funzioni meromorfe non costanti  $f$  e  $g$  che godono della seguente proprietà. Sia  $n$  il grado di  $f$  allora esiste un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  tale che*

1.  $f^{-1}(z_0) = \{p_1, \dots, p_n\}$ ,  $p_i \neq p_j$  per  $i \neq j$ ,
2. nessuno dei  $p_i$  è un polo di  $g$ ,
3.  $g(p_i) \neq g(p_j)$ , per  $i \neq j$ .

*Dim.* (del Teorema 3.2) Siano  $f$ ,  $g$  e  $z_0$  come nel Lemma precedente. Manteniamo anche le notazioni introdotte nella dimostrazione del Teorema 3.1. Sia  $G(x, y)$  il polinomio 3.40. Si ha

$$\begin{aligned} G(z_0, y) &= y^n + r_1(z_0)y^{n-1} + \dots + r_n(z_0) \\ &= \prod_{i=1}^n (y - g(p_{i,z_0})) . \end{aligned}$$

L' insieme degli  $z \in \mathbb{C}$  tali che il sistema

$$\begin{aligned} G(z, y) &= 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(z, y) &= 0 \end{aligned}$$

ammette soluzioni in  $y$ , si ottiene eliminando  $y$  dalle due equazioni algebriche appena scritte, e dunque  $o$  è costituito da un numero finito di punti  $o$  è tutto  $\mathbb{C}$  (basta considerare il risultante di  $G$  e di  $G_y$  come polinomi nella variabile  $y$ ). Abbiamo appena visto che non è tutto  $\mathbb{C}$ , poiché per  $z = z_0$  vi sono  $n$ -radici distinte di  $G(z_0, y) = 0$ . Ne segue che, al di fuori di un insieme finito,  $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ , l'equazione  $G(z, y) = 0$  ha  $n$ -radici distinte. Quindi, se  $\Gamma$  è la curva  $F(x, y) = 0$ , togliendo a  $\Gamma$  un insieme finito di punti  $V$  si ottiene un rivestimento  $n$ -plo

$$x : \Gamma \setminus V \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus D$$

Se indichiamo con  $\Phi : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  l'applicazione definita da  $f$  e  $g$  e se poniamo  $W = \Phi^{-1}(V)$ , otteniamo un diagramma commutativo di rivestimenti (si osservi che  $\Phi : C \rightarrow \Gamma$  è suriettiva)

$$\begin{array}{ccc} C \setminus W & \xrightarrow{\Phi} & \Gamma \setminus V \\ & \searrow f & \swarrow x \\ & & \widehat{\mathbb{C}} \setminus D \end{array} \quad (3.42)$$

Essendo sia  $f$  che  $x$  due rivestimenti  $n$ -pli se ne deduce che  $\Phi$  è un isomorfismo. Denotiamo con  $C'$  la desingularizzazione di  $\Gamma$ . Abbiamo dimostrato che vi è un isomorfismo tra  $C$  privata di un numero finito di punti e  $C'$  privata di un numero finito di punti. Questo isomorfismo si estende banalmente a un isomorfismo tra  $C$  e  $C'$ . Dimostriamo infine che  $F$  è un polinomio irriducibile. Se non lo fosse, allora  $C'$  e dunque  $C$ , sarebbe sconnessa contro il supposto. Q.E.D.

Possiamo ora dimostrare un teorema che avevamo annunciato nel Capitolo 3.

**Corollario 2** *Sia  $F[X, Y, Z] \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$  un polinomio irriducibile. Sia  $\Gamma \in \mathbb{P}^2$  la curva piana di equazione  $F = 0$  e sia  $C$  la sua desingularizzazione. Allora  $C$  è connessa.*

*Dim.* Sia  $C_1$  una componente connessa di  $C$ . Per il Teorema 3.2,  $C_1$  è la desingularizzazione di una curva piana  $\Gamma_1$  di equazione  $F_1 = 0$ , con  $F_1$  irriducibile. Ne segue che  $F$  si annulla su  $\Gamma_1$ . Poiché sia  $F$  che  $F_1$  sono irriducibili, il teorema degli zeri di Hilbert implica che  $F = cF_1$ , con  $c$  costante complessa non nulla. Q.E.D.

Concludiamo questa sezione studiando il campo delle funzioni meromorfe su un toro complesso  $C = \mathbb{C}/\Lambda$  dove  $\Lambda$  è un reticolo in  $\mathbb{C}$ . La funzione  $\wp(z)$  di Weierstrass relativa al reticolo  $\Lambda$  è definita da

$$\wp_{\Lambda}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Per dimostrare la convergenza di questa serie abbiamo bisogno del seguente

**Lemma 4** *Per ogni reticolo  $\Lambda$  la serie*

$$E_\sigma(\Lambda) = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^\sigma}$$

*converge assolutamente per  $\sigma > 2$*

*Dim.* Indichiamo con  $\Lambda_r$  i punti  $\Lambda$  che sono sul parallelogramma

$$P_r = \{x\omega_1 \pm r\omega_2, \pm r\omega_1 + y\omega_2, |x|, |y| \leq r\}$$

con  $\omega_1$  e  $\omega_2$  base di  $\Lambda$ . Sia  $a$  la più breve distanza di  $P_1$  dall'origine. Allora per ogni  $\omega \in \Lambda_r$  abbiamo

$$|\omega| \geq ra \quad \text{e quindi} \quad \frac{1}{|\omega|} \leq \frac{1}{ra}.$$

Inoltre, poiché su ogni parallelogramma  $P_r$  ci sono esattamente  $8r$  punti del reticolo, abbiamo che

$$\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^\sigma} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\omega \in \Lambda_r} \frac{1}{|\omega|^\sigma} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{8r}{(ar)^\sigma} \leq \frac{8}{a^\sigma} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{\sigma-1}}$$

che chiaramente converge per  $\sigma > 2$ .

Q.E.D.

Osserviamo che per  $k$  intero positivo dispari si ha  $E_k = 0$ . Nel caso  $k$  pari  $E_k$  è detta la serie di Eisenstein di peso  $k$  associata a  $\Lambda$ .

**Corollario 3** *In ogni sottoinsieme compatto  $K$  di  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  la funzione  $\wp_\Lambda(z)$  converge assolutamente e uniformemente.*

*Dim.* Si ha

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{2\omega z - z^2}{\omega^2(z-\omega)^2} = \frac{\omega z + z(\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2} = \frac{z}{\omega(z-\omega)^2} + \frac{z}{\omega^2(z-\omega)}.$$

Poiché  $K$  è limitato, esiste un intero positivo  $N$  (dipendente da  $K$ ) tale che per ogni  $z \in K$  e  $|\omega| > N$

$$|z - \omega| \geq \frac{1}{2} |\omega|.$$

In questo caso si ha

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{6|z|}{|\omega|^3}.$$

I termini esclusi sono un numero finito, quindi la serie converge.

Q.E.D.



La funzione  $\wp_\Lambda(z)$  è una funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$  con poli nel reticolo  $\Lambda$ . Vogliamo studiarne la periodicità. Consideriamo la sua derivata

$$\wp'_\Lambda(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

Ovviamente  $\wp'_\Lambda(z)$  è una funzione periodica di periodo  $\Lambda$ . Quindi si ha

$$\wp_\Lambda(z + \omega) - \wp_\Lambda(z) = c_\omega \in \mathbb{C}, \quad \forall \omega \in \Lambda.$$

Inoltre, poiché la funzione  $\wp_\Lambda(z)$  è pari, ponendo  $z = -\frac{\omega}{2}$  abbiamo che

$$0 = \wp_\Lambda\left(\frac{\omega}{2}\right) - \wp_\Lambda\left(-\frac{\omega}{2}\right) = c_\omega. \quad (3.43)$$

Dunque la funzione  $\wp_\Lambda(z)$  può essere considerata come una funzione meromorfa sul toro  $C = \mathbb{C}/\Lambda$ . Come tale ha un polo doppio nell'origine  $0 \in C$  e nessun'altra singolarità. Ne segue che  $\wp_\Lambda$  è un rivestimento ramificato  $\wp_\Lambda : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  di grado 2. Per ogni  $p \in C$  si ha:  $\wp_\Lambda^{-1}\wp_\Lambda(p) = \{p, -p\}$ . I punti di ramificazione di questo rivestimento sono il punto 0 (il polo doppio) e i punti  $\frac{\omega_1}{2}$ ,  $\frac{\omega_2}{2}$  e  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  e cioè i punti per cui  $p = -p$ .

Vogliamo ora studiare l'applicazione  $\Phi : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  definita dalle due funzioni meromorfe  $f = \wp_\Lambda$  e  $g = \wp'_\Lambda$  e vogliamo determinare l'equazione della curva algebrica piana  $\Gamma$  immagine di  $C$  tramite  $\Phi$ . Sia  $p \in \mathbb{C}/\Lambda$  un punto diverso da  $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , (un punto cioè per cui  $p \neq -p$ ) allora è ovvio che le funzioni  $f$  e  $g$  e il punto  $p$  soddisfano le proprietà elencate nel Lemma 3.3. Infatti  $\wp'_\Lambda(z)$  è una funzione dispari che ha i suoi zeri (semplici) nei punti  $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  e dunque  $\wp'_\Lambda(p) \neq \wp'_\Lambda(-p)$ . Quindi in questo caso l'applicazione analitica

$$\Phi : C = \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$$

definita da

$$\Phi(z) = \begin{cases} [\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z), 1] & \text{se } z \neq O_\Lambda \\ [0, 1, 0] & \text{se } z = O_\Lambda. \end{cases} \quad (3.44)$$

è una desingularizzazione di  $\Gamma$ . Vogliamo calcolare l'equazione di  $\Gamma$ .

**Teorema 4** *La funzione  $\wp_\Lambda(z)$  soddisfa l'equazione differenziale*

$$\wp'_\Lambda(z)^2 = 4\wp_\Lambda^3(z) - g_2\wp_\Lambda(z) - g_3$$

dove  $g_2 = 60E_4(\Lambda)$  e  $g_3 = 140E_6(\Lambda)$  con  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ . In particolare l'equazione di  $\Gamma$  è

$$Y^2Z - 4X^3 + g_2XZ^2 + g_3Z^3 = 0.$$

Inoltre  $\Gamma$  è non singolare e  $\Phi : C \rightarrow \Gamma$  è un isomorfismo.

*Dim.* Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor dei fattori  $\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$  intorno all'origine. Per fare ciò ricordiamo che per  $|u| < 1$  si ha

$$\frac{1}{(1-u)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nu^{n-1}.$$

Allora poiché  $|z/\omega| < 1$  per ogni  $\omega \in \Lambda$  si ha

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = 1/\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{z}{\omega}\right)^{n-1}$$

e quindi

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{j=3}^{\infty} (j-1) \frac{z^{j-2}}{\omega^j}.$$

Poiché  $\wp_{\Lambda}(z) - \frac{1}{z^2}$  converge assolutamente, possiamo scambiare l'ordine delle somme e scrivere

$$\wp_{\Lambda}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=3}^{\infty} (j-1) E_j(\Lambda) z^{j-2}.$$

Consideriamo i primi termini dello sviluppo

$$\begin{aligned} \wp_{\Lambda}(z) &= \frac{1}{z^2} + 3E_4 z^2 + 5E_6 z^4 + \dots \\ \wp'_{\Lambda}(z) &= -\frac{2}{z^3} + 6E_4 z + 20E_6 z^3 + \dots \end{aligned}$$

allora abbiamo anche che

$$\begin{aligned} \wp_{\Lambda}(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + 9E_4 \frac{1}{z^2} + 15E_6 + \dots \\ \wp'_{\Lambda}(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - 24E_4 \frac{1}{z^2} - 80E_6 + \dots \end{aligned}$$

Sia

$$h(z) = \wp'_{\Lambda}(z)^2 - 4\wp_{\Lambda}^3(z) + g_2\wp_{\Lambda}(z) + g_3. \quad (3.45)$$

Si verifica immediatamente che  $h$  non ha poli in  $\mathbb{C}/\Lambda$  e che  $h(0) = 0$ . Quindi  $h \equiv 0$ . Abbiamo dimostrato che il polinomio

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

è il polinomio cercato. Dobbiamo verificare che  $\Delta \neq 0$ . Un conto elementare ci dice che

$$\Delta = (e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_3 - e_2)^2$$

con  $e_1, e_2, e_3$  radici del polinomio  $P(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ . Quindi  $\Delta \neq 0$  se e solo se  $P(x)$  ha 3 radici distinte. Poiché la funzione  $\wp'_{\Lambda}(z)$  ha 3 zeri distinti abbiamo che  $P(x)$  ha zeri nei punti

$$e_1 = \wp_{\Lambda}\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp_{\Lambda}\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp_{\Lambda}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right),$$

che sono necessariamente distinti. Verifichiamo che la curva  $\Gamma$  è non singolare. Poiché  $P(x)$  ha 3 radici distinte,  $\Gamma$  non ha punti singolari in  $U_Z$ . Nel punto all'infinito  $p_\infty = [0, 1, 0]$  si ha che  $\frac{\partial G}{\partial Z}(p_\infty) \neq 0$ , dove  $G(X, Y, Z) = Y^2Z - 4X^3 + g_2XZ^2 + g_3Z^3$ . Quindi  $\Phi$  è un isomorfismo. Q.E.D.

Osserviamo che un differenziale olomorfo (l'unico a meno di una costante moltiplicativa) su  $C$  è dato da

$$\omega = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} .$$

Osserviamo inoltre che l'applicazione analitica

$$A : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}/H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathbb{C}/\Lambda = C$$

definita da

$$(x, y) \mapsto \int_{p_\infty}^{(x,y)} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

è ben definita ed è l'inversa di  $\Phi$ :

$$AF(z) = \int_{\Phi(0)}^{\Phi(z)} \frac{dx}{y} = \int_0^z \frac{d\Phi^*(x)}{\Phi^*(y)} = \int_0^z \frac{d\wp}{\wp'} = z .$$

### Esercizi

1. Calcolare il genere della curva proiettiva, la cui equazione affine è data da  $x^3 = y^5 - 1$ , realizzandola come rivestimento ramificato dell'asse  $x$ .
2. Sia  $C$  la superficie di Riemann della curva piana  $\Gamma$  di equazione

$$XYZ^3 + X^5 + Y^5 = 0 .$$

Mostrare che  $C$  può realizzarsi come rivestimento triplo di  $\widehat{C}$  e calcolarne il genere.

3. Sia  $C$  la desingularizzazione della curva piana  $\Gamma$  di equazione

$$Y^2Z^{2N-1} = \prod_{i=1}^{2N+1} (X - a_iZ)$$

con  $a_i \neq a_j$  se  $i \neq j$ . Mostrare che  $C$  può realizzarsi come rivestimento doppio di  $\widehat{C}$  e calcolarne il genere

4. La funzione  $\wp_\Lambda(z)$  è meromorfa in  $\widehat{C}$ ?
5. Per ogni toro  $C = \mathbb{C}/\Lambda$  verificare che le funzioni  $f = \wp_\Lambda(z)$  e  $g = \wp_\Lambda''(z)$  non soddisfano le condizioni del Lemma 3.3. Cosa si può dire dell'applicazione  $F : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  definita da  $f$  e  $g$ ?

6. Dimostrare che ogni toro  $\mathbb{C}/\Lambda$  è analiticamente isomorfo a un toro definito da un reticolo  $\Lambda_\tau$  avente una base formata da 1 e  $\tau = x + iy$  con  $y > 0$ . Denotiamo con  $T(\tau)$  il toro definito dal reticolo  $\Lambda_\tau$ . Verificare che  $T(\tau)$  e  $T(\rho)$  sono isomorfi se e solo se

$$\rho = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  e  $ad - bc = 1$ .

7. (Classificazione dei tori complessi) Sia

$$\mathcal{M} = \{\tau \in \mathbb{C} | y > 0, -1/2 < x \leq 1/2, |\tau| > 1\} \cup \{\tau \in \mathbb{C} | y > 0, 0 \leq x \leq 1/2, |\tau| = 1\}.$$

Dimostrare che ogni toro complesso è isomorfo a uno e uno solo  $T(\tau)$  con  $\tau \in \mathcal{M}$

8. Verificare che se  $T(\tau)$  e  $T(\rho)$  sono isomorfi, allora per ogni intero positivo  $k$  si ha

$$E_k(\rho) = (c\tau + d)^k E_k(\tau).$$

Viceversa, verificare che se  $E_k(\rho) = (c\tau + d)^k E_k(\tau)$  per  $k = 4, 6$ , allora  $T(\tau)$  e  $T(\rho)$  sono isomorfi.

9. Sia

$$\Phi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^3\mathbb{C}$$

definita da

$$\Phi(z) = \begin{cases} [\wp(z), \wp'(z), \wp''(z), 1] & \text{se } z \neq O_\Lambda \\ [0, 0, 1, 0] & \text{se } z = O_\Lambda. \end{cases} \quad (3.46)$$

Verificare che  $\Phi$  è iniettiva e che  $Im\Phi$  è l'intersezione di 2 quadriche in  $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ .

10. Sia  $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$  una cubica piana non singolare immagine di un toro complesso  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Sia  $P_0 = [0, 1, 0]$ , trasportiamo la struttura di gruppo di  $\mathbb{C}/\Lambda$  su  $\Gamma$  mandando 0 in  $P_0$ ; verificare che è uguale a 0 la somma di 3 punti allineati. (Sugg: Usare il risultato dell'esercizio 1 Cap 6 § 2 e il fatto che la retta di equazione  $Z = 0$  interseca la curva  $\mathcal{C}$  in  $P_0$  con molteplicità 3)

11. Sia  $\Gamma \in \mathbb{P}^2$  una curva algebrica non singolare. Dimostrare che  $\Gamma$  è connessa.

### 3.4 Il campo delle funzioni meromorfe di una superficie di Riemann compatta

In questa sezione studiamo il legame tra il campo delle funzioni meromorfe di una superficie di Riemann e il campo delle funzioni razionali della curva proiettiva

piana immagine della superficie di Riemann tramite l' applicazione analitica di desingularizzazione

$$\begin{aligned} \Phi : C &\longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{P}^2 \\ p &\mapsto [1, f(p), g(p)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove  $f, g \in \mathcal{M}(C)$ . Sia

$$F(X, Y, Z) = 0$$

l'equazione di  $\Gamma$ . Il polinomio  $F$  è irriducibile. Scriviamo  $F(x, y) = F(x, y, 1)$ . Il campo dei quozienti dell'anello  $\mathbb{C}[x, y]/(F(x, y))$  è il campo  $\mathbb{C}(x)[y]/(F(x, y))$ . Questo campo prende il nome di *campo delle funzioni razionali di  $\Gamma$*  e lo indica col simbolo  $\mathbb{C}(\Gamma)$ .

Ricordiamo che, date due curve piane irriducibili  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  di equazioni  $F = 0$  e  $G = 0$ , rispettivamente, una *applicazione razionale*

$$\xi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$$

è una applicazione definita, in un opportuno aperto di Zariski di  $\Gamma$ , da

$$(x, y) \mapsto (r(x, y), s(x, y)),$$

dove  $r(x, y)$  e  $s(x, y) \in \mathbb{C}(x, y)$  sono funzioni razionali. In questo caso si ha

$$F(x, y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad G(r(x, y), s(x, y)) \equiv 0$$

e si può definire un omomorfismo (necessariamente iniettivo) di campi

$$\xi^* : \mathbb{C}(\Gamma') \longrightarrow \mathbb{C}(\Gamma)$$

ponendo  $\xi^*(x) = r(x, y)$  e  $\xi^*(y) = s(x, y)$ . Dalle definizioni segue che

$$(1_\Gamma)^* = 1_{\mathbb{C}(\Gamma)}, \quad (\xi\eta)^* = \eta^*\xi^*.$$

Dunque abbiamo assegnato, in modo functoriale, ad ogni curva piana irriducibile  $\Gamma$ , un campo  $\mathbb{C}(\Gamma)$ , che è estensione di  $\mathbb{C}$  finitamente generata e di grado di trascendenza 1 e ad ogni applicazione razionale tra due curve un omomorfismo tra i corrispondenti campi.

Viceversa è chiaro che ogni campo che sia estensione di  $\mathbb{C}$  finitamente generata e di grado di trascendenza 1 è del tipo  $\mathbb{C}(x)[y]/(F(x, y))$ , per qualche polinomio irriducibile  $F(x, y)$  e dunque è del tipo  $\mathbb{C}(\Gamma)$ . È anche chiaro che, partendo da un omomorfismo di campi  $\varphi : \mathbb{C}(\Gamma') \rightarrow \mathbb{C}(\Gamma)$ , si ricostruisce una applicazione razionale  $\xi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  tale che  $\xi^* = \varphi$ . Due curve  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  si dicono *birazionalmente equivalenti* se esistono applicazioni razionali  $\xi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  e  $\eta : \Gamma' \rightarrow \Gamma$  che sono l'una l'inversa dell'altra (negli aperti di Zariski dove ha senso considerarle). Da ciò che abbiamo detto discende che l'essere due curve piane irriducibili birazionalmente equivalenti equivale all'essere isomorfi i rispettivi campi di funzioni razionali.

Ritorniamo all'applicazione di desingularizzazione  $\Phi : C \rightarrow \Gamma$ . L'applicazione  $\Phi$  induce un omomorfismo di campi

$$\Phi^* : \mathbb{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{M}(C)$$

dove  $\Phi^*r(x, y) = r(f, g)$ .

**Teorema 5** *L'omomorfismo  $\Phi^* : \mathbb{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{M}(C)$  è un isomorfismo.*

*Dim.* Data comunque una funzione meromorfa  $h \in \mathcal{M}(C)$  dobbiamo dimostrare che può essere espressa come una funzione razionale in  $f$  e  $g$ . Riprendiamo le notazioni introdotte nella dimostrazione del Teorema 3.1. Per ogni  $z \in \mathbb{C} \setminus B$ , consideriamo la funzione

$$t(z, w) = \sum_{i=1}^n h(p_{i,z}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (w - g(p_{j,z})) .$$

In questa espressione il coefficiente di  $w^k$  è una funzione simmetrica dei punti  $p_{1,z}, \dots, p_{n,z}$  e quindi è una ben determinata funzione  $t_k(z)$ . Esattamente come nella dimostrazione del Teorema 3.1, si dimostra che  $t_k(z)$  è olomorfa in  $\widehat{\mathbb{C}} - B$  e può estendersi meromorficamente a  $\widehat{\mathbb{C}}$ , quindi  $t(z, w) \in \mathbb{C}[w](z)$ . Un semplice calcolo mostra che, se valgono per  $f$  e  $g$  le ipotesi del Lemma 3.2, si ha

$$h(p_j) = \left. \frac{t(z, w)}{\frac{\partial G(z, w)}{\partial w}} \right|_{w=g(p_j)} .$$

Allora, posto  $r(z, w) = t(z, w) / \frac{\partial G(z, w)}{\partial w}$ , si ha che l'identità

$$h = r(f, g)$$

è valida in  $C \setminus f^{-1}(B)$  e quindi, per continuazione analitica, su tutta  $C$ .

Q.E.D.

Siamo finalmente in grado di dimostrare l'equivalenza tra la teoria delle superfici di Riemann compatte e la teoria delle curve algebriche. Per chiudere la catena manca un solo anello: la relazione tra la nozione di applicazione analitica e quella di applicazione razionale.

**Teorema 6** *Siano  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  due curve algebriche piane (proiettive) irriducibili. Siano*

$$\Phi : C \rightarrow \Gamma, \quad \Phi' : C' \rightarrow \Gamma'$$

*de desingularizzazioni. Allora, data un'applicazione razionale non costante  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  esiste un'unica applicazione analitica  $\chi : C \rightarrow C'$  tale che  $\psi\Phi = \Phi'\chi$ . Viceversa data un'applicazione analitica  $\chi : C \rightarrow C'$  esiste un'unica applicazione razionale  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  tale che  $\psi\Phi = \Phi'\chi$ . In particolare:*

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ è birazionalmente equivalente a } \Gamma' &\Leftrightarrow \mathcal{M}(C) \text{ è isomorfo a } \mathcal{M}(C') \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow C \text{ è analiticamente equivalente a } C'. \end{aligned}$$

*Dim.* Sia  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  un'applicazione razionale non costante. Possiamo supporre  $\psi$  sia definita all'infuori di un insieme finito  $B \subset \Gamma$  di  $\Gamma$ . Sia

$$\Phi : C \rightarrow \mathbb{P}^2$$

definita da  $\Phi(p) = [1, f(p), g(p)]$  dove  $f$  e  $g \in \mathcal{M}(C)$ . Sia

$$\psi(x, y) = (r(x, y), s(x, y)),$$

con  $r(x, y)$  e  $s(x, y) \in \mathbb{C}(x, y)$ . Le funzioni meromorfe

$$h = r(f, g), \quad k = s(f, g) \in \mathcal{M}(C)$$

definiscono una applicazione analitica  $\Psi : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  che coincide con  $\psi \circ \Phi$  su  $C \setminus \Phi^{-1}(B)$ . Naturalmente si ha che  $\Psi(C) = \Gamma'$ . Siano  $D = \Psi^{-1}(\Gamma'_{sing}) \subset C$  e  $D' = \Phi'^{-1}(\Gamma'_{sing}) \subset C'$ , allora

$$\Phi'^{-1}\Psi : C \setminus D \longrightarrow C' \setminus D'$$

è analitica. Sia  $p \in D$  e sia  $A$  un disco parametrico in  $\mathbb{P}^2$  di centro  $\Psi(p)$ . Sia  $V = A \cap \Gamma'$ . Ricordando che  $\Phi'$  è una desingularizzazione, possiamo supporre che  $\Phi'^{-1}(\Psi(p)) = \{q_1, \dots, q_\nu\}$  e che esistano  $\nu$  intorni disgiunti  $V_1, \dots, V_\nu$  di centri  $q_1, \dots, q_\nu$ , rispettivamente, tali che

$$\Phi' : \bigcup_{i=1}^{\nu} (V_i \setminus \{q_i\}) \rightarrow V \setminus \{\Psi(p)\}$$

sia un isomorfismo. Ne segue che gli aperti  $\dot{V}_i = \Phi'(V_i \setminus \{q_i\})$  sono le componenti connesse di  $V \setminus \{\Psi(p)\}$ . Per la continuità di  $\Psi$ , deve esistere un disco parametrico  $U$  intorno a  $p \in C$  e un indice  $i(p) \in \{1, \dots, \nu\}$  tale che  $\Psi(U \setminus \{p\}) \subset \dot{V}_{i(p)}$ . Ponendo

$$\chi(p) = \begin{cases} \Phi^{-1}\Psi(p) & \text{se } p \in C \setminus D \\ q_{i(p)} & \text{se } p \in D \end{cases} \quad (4.2)$$

si ottiene una applicazione analitica  $\chi : C \rightarrow C'$  che coincide con  $\Phi'^{-1} \circ \psi \circ \Phi$  in  $C \setminus D \cup \Phi^{-1}(B)$ . L'unicità di  $\chi$  discende dal principio di continuazione analitica.

Viceversa supponiamo di avere  $\chi : C \rightarrow C'$  e consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(C') & \xrightarrow{\chi^*} & \mathcal{M}(C) \\ \downarrow \Phi'^* & & \downarrow \Phi^* \\ \mathbb{C}(\Gamma') & & \mathbb{C}(\Gamma) \end{array} \quad (4.3)$$

poiché  $\Phi^*$  e  $\Phi'^*$  sono isomorfismi abbiamo un monomorfismo di campi  $\Phi'^{-1}\chi^*\Phi'^*$  che induce un'applicazione razionale  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  tale che  $\psi\Phi = \Phi'\chi$ .

Q.E.D.

Possiamo concludere dicendo che sono funtorialmente equivalenti le seguenti categorie:

- a) Superficie di Riemann compatte e applicazioni analitiche,
- b) Curve (piane) proiettive irriducibili e applicazioni razionali,
- c) Estensioni algebriche finite di  $\mathbb{C}(x)$  e omomorfismi.

### Esercizi

1. Sia  $C$  la desingularizzazione della curva piana proiettiva  $\Gamma$  la cui equazione

$$Y^4 - X^3Z = 0.$$

Calcolare il genere di  $C$  e il campo delle funzioni meromorfe di  $C$

2. Mostrare che la desingularizzazione  $C$  della curva piana  $\Gamma$  di equazione

$$X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 = 0.$$

è di genere 0 e trovare un isomorfismo esplicito tra  $C$  e  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

3. Descrivere il campo  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ .

4. Sia  $PGL(1, \mathbb{C}) \cong GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ . Verificare che ogni  $\sigma \in PGL(1, \mathbb{C})$  induce un automorfismo di  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Dimostrare che  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \cong \text{Aut}(\mathbb{C}(x))$ . Viceversa, dimostrare che ogni automorfismo di  $\mathbb{C}(x)$  è indotto da un elemento di  $PGL(1, \mathbb{C})$ .