Capitolo 6

Il calcolo sulle varietà differenziali

In questo capitolo svilupperemo la teoria delle forme differenziali sulle varietà e della loro integrazione. Il teorema fondamentale alla base del calcolo sulle varietà è il teorema di Stokes. Il capitolo termina con il teorema di de Rham che è il ponte tra la geometria differenziale e la topologia algebrica. Questo teorema, da una parte mette in evidenza la natura topologica delle ostruzioni a risolvere sistemi di equazioni differenziali e dall'altra dà la possibilità di esprimere le classi di coomologia singolare in termini di forme differenziali.

1 Le partizioni dell'unità

Sia X una varietà differenziale. D'ora in poi assumeremo che X sia uno spazio topologico a *base numerabile*. Il lettore verificherà che tutti gli esempi dati fino ad ora verificano questo assioma. Poichè si può sempre assumere che gli aperti della base siano contenuti in dischi parametrici, si può anche assumere che essi siano a chiusura compatta. Dati due ricoprimenti aperti $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ e $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ di uno spazio topologico X si dice che $\mathcal{V}$ *è un raffinamento di* e si scrive $\mathcal{V} > \mathcal{U}$ se esiste una applicazione $\alpha : I \in A$ tale che $V_i \subset U_{\alpha(i)}$, per ogni $i \in I$. Incominciamo col dimostrare il seguente lemma di topologia generale.

Lemma 1.1 *Sia X una varietà e $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ un ricoprimento aperto. Allora esiste un raffinamento $\mathcal{V} > \mathcal{U}$, dove $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento numerabile, localmente finito (i.e. $\forall\, x \in X$ esiste un intorno A di x che incontra solo un numero finito di V_i) e costituito da aperti a chiusura compatta.*

Dim. Incominciamo col costruire un ricoprimento numerabile di X costituito da aperti $A_i,\ i = 1, 2, \dots$ a chiusura compatta e tali che $\overline{A_i} \subset A_{i+1}$. Gli aperti "invadono" X:

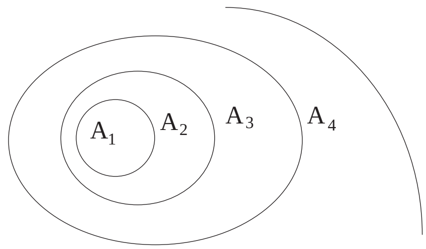

Figura 1

Per costruire gli A_i si procede così. Sia $B_1, B_2, \dots$ una base numerabile di X con $\overline{B_i}$ compatto. Poniamo $A_1 = B_1$. Supponiamo induttivamente che $A_k = B_1 \cup \dots \cup B_{i_k}$. Sia i_{k+1} il più piccolo intero, maggiore di i_k, tale che $\overline{A_k} \subset B_1 \cup \dots \cup B_{i_{k+1}}$ e poniamo $A_{k+1} = B_1 \cup \dots \cup B_{i_{k+1}}$. Gli aperti A_i soddisfano le condizioni richieste. Ora $\overline{A_i} - A_{i-1}$ è un compatto contenuto in $A_{i+1} - \overline{A_{i-2}}$

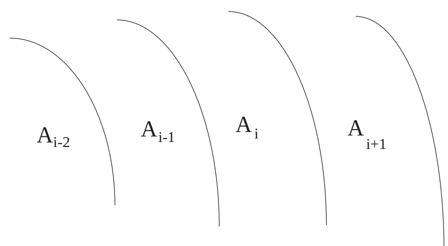

Figura 2

Scegliamo un sottoricoprimento finito del ricoprimento $\{U_\alpha \cap A_3\}$ del compatto $\overline{A_2}$. Per $i \geq 3$ scegliamo in sottoricoprimento finito del ricoprimento $\{U_\alpha \cap (A_{i+1} \setminus \overline{A_{i-2}})\}$ del compatto $\overline{A_i} - A_{i-1}$. Gli aperti così ottenuti formano il ricoprimento $\{V_i\}$ desiderato.
Definiamo ora le partizioni dell'unità.

Definizione 1.2 . *Sia X una varietà differenziale. Una partizione dell'unità su X è una collezione di funzioni $\rho_i \in C^\infty(X)$, $i \in I$ tali che:*

1) *per ogni $i \in I$, supp ρ_i ha chiusura compatta,*

2) *la collezione di aperti $\{\text{supp } \rho_i\}_{i \in I}$ è localmente finita,*

3) $\Sigma \rho_i(x) = 1$, $\forall\, x \in X$, *e* $\rho_i(x) \geq 0$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, i \in I$.

Le partizioni dell'unità sono molto utili. Dato un oggetto globale, per esempio una forma differenziale ω, definita su tutta X, noi potremo esprimerla come somma di forme ω_i a supporto compatto.

$$\omega = 1 \cdot \omega = \left(\sum_{i \in I} \rho_i \right) \omega = \sum_{i \in I} (\rho_i \omega) \ , \quad \omega_i = \rho_i \omega \ .$$

Questo sarà usato, per esempio, nel definire l'integrazione delle forme differenziali. Dimostriamo l'esistenza delle partizioni dell'unità.

Proposizione 1.3 . *Sia X una varietà differenziale, e $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di X. Allora esiste una partizione dell'unità numerabile $\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, tale che $\mathcal{U} < \{supp\ \rho_i\}$*

Dim. Innanzitutto sia χ una funzione C^∞ con supporto nell'intervallo $(-1,1)$ e identicamente uguale a 1 nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

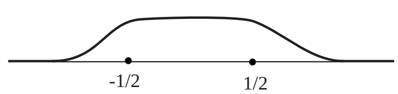

Figura 3

A partire da questa funzione è facile costruirne un'altra C^∞ in $\mathbb{R}^n$, con supporto nell'ipercubo $\{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -1 \le x_i \le 1\}$ e identicamente uguale a 1 nell' ipercubo $\left\{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} \le x_i \le \frac{1}{2}\right\}$. La denoteremo ancora con χ. Consideriamo il ricoprimento numerabile $\{A_i\}$ costruito nel lemma precedente. Poniamo $A_0 = A_{-1} = \emptyset$. Dato $x \in X$ sia i_x il più piccolo intero per cui $x \in A_{i_x+1} \setminus \overline{A_{i_x}}$. Scegliamo un indice α_x tale che $x \in U_{\alpha_x}$ e una carta locale (U_x, φ_x) intorno a x con le seguenti proprietà:

$$U_x \subset U_{\alpha_x} \cap (A_{i_x+2} - \overline{A}_{i_x})$$

$$\varphi_x(U_x) \supset \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -1 \le x_i \le 1\}.$$

Denotiamo con $W_x \subset U_x$ il supporto della funzione $\chi \cdot \varphi_x$. Infine, per ogni i, scegliamo un insieme finito di punti $x \in X$ tali che i corrispondenti W_x ricoprano $\overline{A}_i \setminus A_{i-1}$.

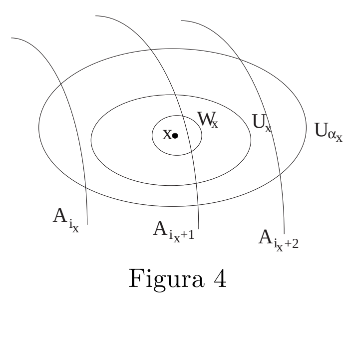

Figura 4

Ordiniamo le corrispondenti funzioni $\sigma_i = \chi \cdot \varphi_i$, dove $i = 1, 2, \ldots$. Otteniamo così che l'insieme $\{\text{supp } \sigma_i\}$ è un ricoprimento aperto localmente finito di X che raffina il ricoprimento $\mathcal{U}$. La locale finitezza permette di definire la funzione

$$\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \ , \quad (\sigma_i \geq 0 \text{ in } \ X) \ .$$

Poiché $\{ \text{ supp } \sigma_i\}$ è un ricoprimento, σ è una funzione *positiva* su X e dunque possiamo concludere la dimostrazione della proposizione ponendo $\rho_i = \sigma_i/\sigma$.

Le partizioni dell'unità sono uno strumento tipico della geometria differenziale. Il teorema di continuazione analitica vieta l'esistenza di partizioni dell'unità analitiche. In ambito analitico il comportamento locale determina quello globale, in geometria differenziale ciò non accade. Un utile corollario dell'esistenza delle partizioni dell'unità è il seguente:

Corollario (1.4). *Sia A un aperto in una varietà differenziale X. Sia B un chiuso contenuto in A. Allora esiste una funzione C^∞ , $f : X \to \mathbb{R}$ tale che*

1) $0 \leq f(x) \leq 1, \, \forall \, x \in X$,

2) $f(x) \equiv 1$ *su* B,

3) *supp* $f \subset A$.

Dim. Basta prendere una partizione dell'unità $\{\rho_i\}$ costruita a partire dal ricoprimento $\{A, X \setminus B\}$, e porre $f = \sum_{i:\ \text{supp } (\rho_i) \subset A} \rho_i$.

Esercizio.

1. Costruire esplicitamente una funzione C^∞ con supporto nell'intervallo $(-1, 1)$ e identicamente uguale a 1 nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2} \, , \frac{1}{2}\right)$.

2 Lo spazio tangente

Consideriamo una ipersuperficie M in $\mathbb{R}^d$

$$M = \{(x_1, \ldots , x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \ F(x_1, \ldots , x_d) = 0\} \ ,$$

dove F è una funzione C^∞ in $\mathbb{R}^d$ tale che per ogni punto $p \in M$ esista un i con $\partial F/\partial x_i \, (p) \neq 0$. Come è noto dalla geometria elementare, l'*iperpiano tangente a M nel punto* $p = (y_1 \ldots y_n)$ è l'iperpiano di $\mathbb{R}^n$ definito dall'equazione

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x_i} \, (p)(x_i - y_i) = 0 \ .$$

Similmente, se M è una sottovarietà immersa di $\mathbb{R}^d$ definita da m equazioni $F_i(x_1, \ldots, x_d) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, lo spazio $(d-m)$-dimensionale tangente a M in un punto $p = (y_1 \ldots y_d)$, è definito dalle equazioni lineari

$$\sum \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p)(x_i - y_i) = 0 \ , \quad j = 1, \ldots, m \, .$$

Denoteremo col simbolo $T_p(M)$ la giacitura dello spazio tangente a M in p. Dunque

$$T_p(M) = \left\{ v \mid v \in \mathbb{R}^d, \ \Sigma \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) v_i = 0 \right\} \ .$$

Data ora una qualsiasi varietà M, non necessariamente immersa in $\mathbb{R}^d$, e un suo punto p, noi vogliamo definire lo spazio tangente in p. Ritorniamo all'esempio della sottovarietà $M \subset \mathbb{R}^d$ definita dalle $F_j = 0$. Fissiamo un intorno U di p in M e consideriamo le funzioni C^∞ in U, che d'ora in poi denoteremo con il simbolo $\mathcal{E}^0(U)$. Poiché M è una sottovarietà immersa di $\mathbb{R}^d$, si può scegliere U così piccolo che ogni funzione $f \in \mathcal{E}^0(U)$ è la restrizione a U di una funzione $\tilde{f}$ definita in un intorno $\tilde{U}$ di p in $\mathbb{R}^n$.

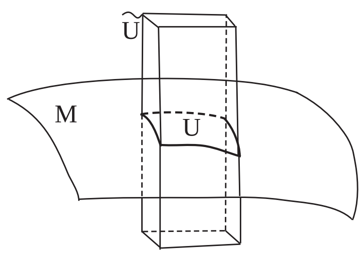

Figura 5

Ad ogni vettore $v \in T_p(M)$ noi possiamo associare un operatore lineare

$$D_v : \mathcal{E}^0(U) \to \mathbb{R}$$

definito nel modo seguente:

$$D_v(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p) v_i$$

Per verificare che la definizione è ben posta consideriamo una qualsiasi curva (cammino) C^∞

$$\gamma : I = [-1, 1] \to M \subset \mathbb{R}^d$$

poniamo $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t))$. Supponiamo che $\gamma(0) = p$ e che $v = \gamma'(0) = (x_1'(0), \ldots, x_d'(0))$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f\gamma)\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(\tilde{f}\gamma)\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p) x_i'(0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p) v_i \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ciò mostra che il lato destro non dipende dalla scelta di γ e il lato sinistro non dipende dalla scelta di $\tilde{f}$, cosicché ambo i lati danno una buona definizione di $D_v(f)$. L'operatore lineare D_v soddisfa ovviamente la *regola di Leibniz*:

$$D_v(f \cdot g) = D_v(f)g(p) + f(p)D_v(g) \ . \tag{2.2}$$

Un operatore lineare $D : \mathcal{E}^0(U) \to \mathbb{R}$ che soddisfa la regola di Leibniz (2.2) prende il nome di *derivazione nel punto p*. Si è quindi definita una applicazione lineare

$$\begin{aligned} \phi : \qquad & T_p(M) \to \{\text{Derivazioni in } p : \mathcal{E}^0(U) \to \mathbb{R}\} \\ & p + v \mapsto D_v \ . \end{aligned} \tag{2.3}$$

L'applicazione ϕ risulta essere un isomorfismo. Che ϕ sia iniettiva è ovvio. Supponiamo $D_v = 0$. Per ogni i consideriamo la funzione x_i in V. Si ha $0 = D_v(x_i) = v_i$ e quindi deve essere $v = 0$. Rimandiamo a tra poco, in un contesto piú generale, la dimostrazione della suriettività di ϕ, che per il momento assumiamo. Dunque, tramite l'isomorfismo ϕ lo spazio tangente in p a $M \subset \mathbb{R}^d$ può essere identificato con lo spazio delle derivazioni in p di $\mathcal{E}^0(U)$, dove U è un intorno sufficientemente piccolo di p. Questo spazio è completamente indipendente dalla immersione di M in $\mathbb{R}^d$. Lo si può dunque definire per una varietà differenziale qualsiasi. L'unica cosa che dà un po' fastidio è l'apparente dipendenza della definizione dalla scelta dell'aperto U. Sbarazziamoci di questa dipendenza.
Sia M una varietà differenziale. Sia $p \in M$. Si introduce una relazione di equivalenza $\sim$ tra gli elementi di $\mathcal{E}^0(M)$, ponendo

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists \text{ intorno } \ U \ \text{ di } \ p \ \ \text{t.c. } \ f|_U = g|_U \ .$$

Ovviamente $\sim$ è una relazione di equivalenza e si pone

$$\mathcal{E}^0_p(M) = \mathcal{E}^0(M)/\sim \ .$$

Gli elementi di $\mathcal{E}^0_p(M)$ si dicono *germi di funzioni C^∞ in p*. Se $f \in \mathcal{E}^0(M)$ si denota con $[f]$ la sua classe in $\mathcal{E}^0_p(M)$. Si vede subito che $\mathcal{E}^0_p(M)$ è una $\mathbb{R}$–algebra in modo naturale

$$\begin{gathered} a[f] + b[g] = [af + bg] \\ [f][g] = [fg] \ . \end{gathered}$$

Definizione 2.1 *Una derivazione in p di $\mathcal{E}^0_p(M)$ è una applicazione lineare*

$$D : \mathcal{E}^0_p(M) \to \mathbb{R}$$

tale che valga la regola di Leibniz:

$$D([f][g]) = f(p)D([f]) + g(p)D([g]) \ .$$

Le derivazioni in p formano un spazio vettoriale reale:

$$(aD + bD')[f] = aD([f]) + bD'([f]) \ .$$

Siamo ora in grado di dare la definizione di spazio tangente in un punto per una varietà qualsiasi.

Definizione 2.2 *Sia M una varietà differenziale e p un punto di M. Lo spazio tangente a M in p è lo spazio vettoriale reale delle derivazioni in p di $\mathcal{E}^0_p(M)$. Lo si denota dal simbolo $T_p(M)$.*

Facciamo ora alcune osservazioni elementari.

A) Innanzitutto, è immediato dimostrare che se $[c]$ è il germe di una funzione costante, e D un vettore tangente in p, allora $D([c]) = 0$, (per linearità basta dimostrare che $D([1]) = 0$, e per questo basta scrivere $[1] = [1][1]$ e usare la regola di Leibniz)

B) Notiamo poi che se D è una derivazione di $\mathcal{E}^0(U)$ allora il numero $D(f)$ dipende solo dal germe di f in p. Per questo basta far vedere che, se h è una funzione C^∞ identicamente nulla in un intorno $V \subset U$ di p, allora $D(h) = 0$. Ora, se ψ è una funzione C^∞ identicamente uguale a 1 intorno a p, e con il supporto contenuto in V, si ha $\psi h = 0 \in \mathcal{E}^0(U)$ e dunque $D(\psi h) = 0$. Ne segue che $0 = D(\psi h) = \psi(p)D(h) + h(p)D(\psi) = D(h)$, come si voleva.

C) È anche utile notare che vi è un isomorfismo canonico:

$$\alpha \ : \ T_p(M) = \{\text{Derivazioni in } p \text{ di } \mathcal{E}^0_p(M)\} \to \{\text{Derivazioni in } p \text{ di } \mathcal{E}^0(U)\}.$$

Per definire α, si considera la proiezione naturale

$$\begin{aligned} \sigma \ : \ \mathcal{E}^0(U) &\to \mathcal{E}^0_p(M) \\ f &\mapsto [f] \end{aligned}$$

e si pone $\alpha(D) = D \circ \sigma$. L'inversa di α è così definita:

$$\alpha^{-1}(D')([g]) = D'(\rho g) \, ,$$

dove $g \in \mathcal{E}^0(W)$ e ρ è una funzione identicamente uguale a 1 in un intorno di p e con il supporto contenuto in W (cosicché $\rho g \in \mathcal{E}^0(U)$ e $[\rho g] = [g]$). L' osservazione fatta precedentemente ci assicura che la definizione è ben posta.

D) È infine importante osservare che se $U \subseteq M$ è un aperto e $p \in U$ allora l'inclusione $U \hookrightarrow M$ induce un isomorfismo canonico, detto *restrizione*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^0_p(M) &\to \mathcal{E}^0_p(U) \\ [f] &\to [f|_U] \ . \end{aligned}$$

L'iniettività è ovvia, la suriettività anche, perché, data una funzione $f \in \mathcal{E}^0(U)$, la si può moltiplicare per una opportuna funzione ρ che sia C^∞ in M, abbia supporto in U, e sia identicamente uguale a 1 intorno a p, cosicché la funzione

$$\tilde{f} = \begin{cases} \rho f, & \text{in } U, \\ 0, & \text{in } M \smallsetminus U, \end{cases}$$

è tale che $[\tilde{f}|_U] = [f]$.

Dall'esistenza di un isomorfismo canonico tra $\mathcal{E}^0_p(M)$ e $\mathcal{E}^0_p(U)$ segue l'esistenza di un isomorfismo canonico tra $T_p(M)$ e $T_p(U)$. Dunque, *se U è un aperto di M contenente p*, noi faremo sempre l'identificazione

$$T_p(M) = T_p(U) \ .$$

Abbiamo associato, a ogni coppia (M, p) dove M è una varietà differenziabile e $p \in M$, uno spazio vettoriale $T_p(M)$. Vogliamo ora verificare che questa associazione soddisfa delle ovvie proprietà funtoriali. Siano M e N varietà differenziali. Se $F : M \to N$ è una applicazione C^∞ , si ha un omomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre

$$\begin{aligned} F^* : \mathcal{E}^0(N) &\to \mathcal{E}^0(M) \\ f &\mapsto F^* f \overset{Def}{=} fF \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che se $G : L \to M$ è una applicazione C^∞ , allora

$$\begin{aligned} (FG)^* &= G^* F^* \\ (1_M)^* &= 1_{\mathcal{E}^0(M)} \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sia ora p un punto di M. Definiamo

$$\begin{aligned} F^*_p : \mathcal{E}^0_{F(p)}(N) &\to \mathcal{E}^0_p(M) \\ [f] &\mapsto F^*_p([f]) = [fF] \ . \end{aligned}$$

L'applicazione F^*_p è ben definita ed è un omomorfismo di $\mathbb{R}$–algebra che soddisfa le ovvie proprietà funtoriali analoghe alle (2.4) e relative alle applicazioni di varietà differenziali puntate. Si può ora definire *un omomorfismo lineare $F_{*,p}$ tra spazi tangenti* (intesi ormai come spazi di derivazioni) ponendo:

$$\begin{aligned} F_{*,p} : T_p(M) &\to T_{F(p)}(N) \\ D &\mapsto F_{*,p}(D) \end{aligned}$$

dove, per definizione

$$F_{*,p}(D)([f]) \overset{Def}{=} D([fF]) = D(F^*_p[f]) \ , \quad \forall\, [f] \in \mathcal{E}^0_{F(p)}(N) \ .$$

Di nuovo si verificano facilmente le proprietà funtoriali

$$(FG)_{*,p} = F_{*,G(p)} \circ G_{*,p} \ ; \quad (1_M)_{*,p} = 1_{T_p(M)} \tag{2.5}$$

dove $p \in L$, F e G sono applicazioni C^∞

$$L \xrightarrow{G} M \xrightarrow{F} N \ .$$

Facendo uso di questa proprietà funtoriale, calcoleremo lo spazio tangente $T_p(M)$ per una varietà M di dimensione n, in un suo punto p. Scegliamo una carta locale (U, φ) intorno a p con $\varphi(p) = q = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Si ha un isomorfismo di spazi vettoriali

$$T_p(M) = T_p(U) \xrightarrow{\varphi_{*,p}} T_q(\varphi(U)) = T_q(\mathbb{R}^n)$$

Dunque è sufficiente calcolare lo spazio tangente $T_q(\mathbb{R}^n)$.

Lo spazio tangente a un punto di $\mathbb{R}^n$.

Siano $x_1, \ldots, x_n$ coordiante in $\mathbb{R}^n$. Definiamo i vettori tangenti

$$\frac{\partial}{\partial x_1}|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_q \in T_q(\mathbb{R}^n)$$

ponendo

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_q([f]) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \ldots, 0) \quad , \quad [f] \in \mathcal{E}_q^0(\mathbb{R}^n)$$

Che si siano così definiti dei vettori tangenti in q a M è immediato, essendo $\frac{\partial}{\partial x_1}|_q$ un operatore lineare che soddisfa la regola di Leibniz. Vogliamo mostrare che $\frac{\partial}{\partial x_1}|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_q$ formano una base per $T_q(\mathbb{R}^n)$. Mostriamo che sono linearmente indipendenti. Si supponga che

$$D = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_q = 0 \quad , \quad a_i \in \mathbb{R} \ .$$

Allora

$$0 = D(x_j) = a_j \ .$$

Per vedere che i vettori $\frac{\partial}{\partial x_i}|_q$ generano $T_q(\mathbb{R}^n)$ scriviamo una funzione $f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^n)$ con l'aiuto della formula di Taylor

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(q) + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i h_i(x_1, \ldots, x_n) \,,$$

dove $h_i(0, \ldots, 0) = 0$. Sia ora $D \in T_p(M)$. Per la linearità e per la formula di Leibniz si ha

$$\begin{aligned} D([f]) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)\ D(x_i) + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\ D(h_i) + h_i\ D(x_i) \right]_{(0,\ldots,0)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)\ D(x_i) \ . \end{aligned}$$

Dunque

$$D = \sum_{i=1}^{n} D(x_i)\ \frac{\partial}{\partial x_i}|_q \ ,$$

come si voleva. In conclusione

$$T_p(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x_i}|_q \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x_n}|_q \ ,$$

e quindi i vettori

$$(\varphi^{-1})_{*,q}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_q\right)$$

costituiscono una base per $T_p(M)$. Noi li denoteremo per semplicità con i simboli $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ e perciò scriviamo

$$T_p(M) \cong \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x_i}|_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x_n}|_p \ .$$

Ritorniamo all' isomorfismo ϕ definito in (2.3), che abbiamo dimostrato essere iniettivo. Possiamo ora concludere che esso è anche suriettivo, perché abbiamo appena dimostrato che lo spazio vettoriale delle derivazioni in p di $\mathcal{E}^0(U)$ ha la dimensione di M; ne segue che la definizione di spazio tangente coincide, nel caso di una varietà immersa con quella geometrica data in termini di intersezione di iperpiani tangenti.

Terminiamo la sezione osservando che lo spazio tangente in un punto p di una varietà M può definirsi in termini di curve passanti per p:

$$T_p(M) = \left\{\gamma_{*,0}\left(\frac{\partial}{\partial t}|_0\right)\ \middle|\ \gamma : (-1,1) \to M \text{ curva } C^\infty \text{ e } \gamma(0) = p\right\}. \qquad (2.6)$$

Esercizi

1. Sia M una varietà differenziabile, verificare che $\mathcal{E}^0_p(M)$ non è un dominio di integrità.

2. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una traslazione, verificare che $T_{*,p} = id_{\mathbb{R}^n}$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$.

3. Sia $F : M \to N$ un'applicazione costante, verificare che, per ogni $p \in M$, $F_{*,p} = 0$

4. Sia M una varietà differenziabile e D una derivazione nel punto p di $\mathcal{E}^0_p(M)$, dimostrare che esiste una curva differenziabile $\gamma : (-1,+1) \to M$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma_{*,p}(\frac{d}{dt}) = D$.

3 Campi vettoriali

Intuitivamente, un campo vettoriale X su di una varietà M è una collezione di vettori tangenti $X = \{X_p \in T_p(M)\}$, uno per ogni punto p di M, che varia in modo C^∞ con p. Il metodo più rapido per introdurre questo concetto è quello di ricorrere alla seguente definizione generale.

Definizione 3.1 . *Sia k un campo e A una k-algebra. Una derivazione di A è una applicazione k-lineare*

$$D : A \to A$$

che soddisfa la regola di Leibniz

$$D(fg) = f\ D(g) + g\ D(f)\ .$$

Le derivazioni di A posseggono una naturale struttura di A-modulo

$$(fD + gD')(h) = f\ D(h) + g\ D'(h) \quad , \quad f, g, h \in A\ .$$

Si denota questo A-modulo col simbolo $\mathrm{Der}(A)$.

Definizione 3.2 *Sia M una varietà differenziale, i campi vettoriali in M sono gli elementi dello $\mathcal{E}^0(M)$-modulo delle derivazioni di $\mathcal{E}^0(M)$, e si pone*

$$\mathcal{V}(M) = \mathrm{Der}\left(\mathcal{E}^0(M)\right)\ .$$

Se $F : M \to N$ è un *diffeomorfismo*, allora vi è un *isomorfismo* di $\mathcal{E}^0(M)$-moduli

$$F_* : \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(\mathcal{N})$$

definito da

$$(F_*X)(g) = X(gF) \circ F^{-1}\ . \tag{3.1}$$

Che F_* sia un isomorfismo segue dalle proprietà funtoriali

$$(1_M)_* = 1_{V(M)} \quad , \quad (FG)_* = F_*G_*\ , \tag{3.2}$$

dove $G : P \to M$ è un diffeomorfismo. La prima delle (3.2) è ovvia, per la seconda si ha:

$$\begin{aligned} (FG)_*X(g) &= X(gFG)G^{-1}F^{-1} \\ &= [(G_*X)(gF)]F^{-1} \\ &= F_*G_*X(g) \end{aligned}$$

Il fatto che F_* sia un isomorfismo ci fa capire che i campi vettoriali definiti su una carta di M sono come i campi vettoriali su $\mathbb{R}^n$. Prima di descrivere questi, dobbiamo capire come si fa a restringere un campo vettoriale a una carta. Per fare ci dimostriamo un utile risultato.

Lemma 3.3 *Sia X un campo vettoriale su una varietà M. Siano f e g due funzioni C^∞ su M che coincidono nell'intorno di un punto $p \in M$. Allora*

$$X(f)(p) = X(g)(p)\,.$$

Dim. Per linearità basta dimostrare che, se $h \in \mathcal{E}^0(M)$ è identicamente nulla in un intorno U di p, allora $X(h)(p) = 0$. Sia ρ una funzione C^∞ in M, non-negativa con il supporto contenuto in U, e identicamente uguale a 1 in un intorno di p. Allora $\rho h \equiv 0$ e quindi

$$0 = X(\rho h)(p) = \left(h\ X(\rho) + \rho\ X(h)\right)(p) = X(h)(p)\ .$$

Q. E. D.

Dal lemma segue che un campo vettoriale $X \in \mathcal{V}(M)$ dà luogo a un vettore tangente X_p, per ogni p in M. Si può cioè definire un omomorfismo $\mathbb{R}$-lineare

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(M) & \to & T_p(M) \\ X & \mapsto & X_p\ , \end{array}$$

per ogni $p \in M$ ponendo

$$X_p([f]) = X(\rho f)(p) \tag{3.3}$$

dove f è una funzione C^∞ in un intorno U di p e ρ una funzione a supporto contenuto in U e identicamente eguale a 1 in un piccolo intorno di p. Che ciò abbia senso discende, per l'appunto, dal lemma precedente.

Lo stesso Lemma ci permette di definire la *restrizione* di un campo vettoriale a un aperto U di M. Più precisamente definiamo un omomorfismo di restrizione

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(M) & \to & \mathcal{V}(U) \\ X & \mapsto & X|_U \end{array}$$

Data $f \in \mathcal{E}^0(U)$ e $p \in U$ dobbiamo dire chi è $X|_U(f)(p)$. Prendiamo un piccolo intorno W di p, la cui chiusura sia contenuta in U, e costruiamo una funzione $\rho \in \mathcal{E}^0(M)$, che abbia supporto in U, e che sia identicamente uguale a 1 in W. Definiamo

$$X|_U(f)(p) = X(\rho f)(p)\ .$$

Il lato di destra ha senso perché ρf è una funzione C^∞ in M. Che la definizione sia ben posta è una conseguenza immediata del lemma (3.3). Il morfismo restrizione gode di una fondamentale proprietà che si suole riassumere dicendo che *i campi vettoriali formano un fascio.*

Lemma 3.4 *Siano U e V due aperti di M.*
a) Siano X e $Y \in \mathcal{V}(U \cup V)$, allora $X = Y \Leftrightarrow X|_U = Y|_U$ e $X|_V = Y|_V$.
b) Siano $X_U \in \mathcal{V}(U)$ e $X_V \in \mathcal{V}(V)$, si supponga che

$$X_U|_{U\cap V} = X_V|_{U\cap V}$$

allora esiste un unico $X \in \mathcal{V}(U \cup V)$ tale che $X|_U = X_U$ e $X|_V = X_V$.

Dim. Per linearità la a) si dimostra facendo vedere che $X = 0 \Leftrightarrow X|_U = X|_V = 0$. Una implicazione è ovvia. Supponiamo che $X|_U = X|_V = 0$, se $p \in U$, allora $X(f)(p) = X(\rho f)(p) = X|_U(\rho f)(p) = 0$ e analogamente per $p \in V$ Per dimostrare la b) basta porre $X(f)(p) = X_U(f|_U)(p)$, se $p \in U$, e $X(f)(p) = X_V(f|_V)(p)$, se $p \in V$.

Il lemma ci dice in particolare che, per conoscere un campo vettoriale, basta conoscerlo su ogni carta locale, e che viceversa una famiglia di campi vettoriali, ognuno definito su di una carta locale, da luogo a un campo vettoriale globalmente definito sulla varietà, purchè questi campi coincidano quando ristretti alle mutue intersezioni delle carte. E' quindi innanzi tutto necessario capire come si scrive un campo vettoriale su di una carta locale (U, φ). Vorremmo poterci ridurre a studiare i campi vettoriali sugli aperti di $\mathbb{R}^n$. Ora una proprietà di facile verifica è la seguente. Sia $F : M \to N$ un diffeomorfismo. Dato un aperto U di M, allora

$$(F|_U)_*(X|_U) = F_*(X)|_{F(U)} \ . \tag{3.4}$$

Una conseguenza di ciò è che, data una carta locale (U, φ) su di una varietà M l'applicazione φ_* stabilisce un isomorfismo tra $\mathcal{V}(U)$ e $\mathcal{V}(\varphi(U))$, e dunque, per capire come sono fatti i campi vettoriali in U, basta capire come sono fatti in un aperto A di $\mathbb{R}^n$, il che ci accingiamo a fare.

Campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$.

Siano $x_1, \ldots, x_n$ coordinate in $\mathbb{R}^n$. È intanto chiaro che le derivazioni

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

sono campi vettoriali in ($\mathbb{R}^n$ e dunque a maggior ragione in) A. Vogliamo mostrare che $\mathcal{V}(A)$ è il *modulo libero*, su $\mathcal{E}^0(A)$, generato da $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}$. In simboli

$$\mathcal{V}(A) = \mathcal{E}^0(A)\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}^0(A)\frac{\partial}{\partial x_n} \ . \tag{3.5}$$

Vogliamo cioè mostrare che ogni campo vettoriale $X \in \mathcal{V}(A)$ si scrive in modo unico come

$$X = a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

dove le $a_i(x)$ sono funzioni C^∞ in A. È intanto chiaro che i campi vettoriali $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sono indipendenti. Se fosse

$$X = \sum a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \ , \quad (x = (x_1, \ldots, x_n)) \ ,$$

si avrebbe $0 = X(x_j) = \sum a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = a_j(x)$. Sia ora $X \in \mathcal{V}(A)$. Data comunque $f \in \mathcal{E}^0(A)$ e un punto $y = (y_1, \ldots, y_n)$ noi possiamo scrivere, in un intorno V di y

$$f(x) = f(y) + \sum_{j=1}^{n}(x_i - y_i)h_i(x) \tag{3.6}$$

con le h_i funzioni C^∞ in V tali che

$$h_i(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \ .$$

Ora applichiamo la derivazione X ai due lati della (3.6), ricordandoci la regola di Leibniz (che, tra l'altro, implica che la derivazione di una costante è la funzione nulla). Si ha

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)h_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)X(h_i) \ .$$

Ne segue che

$$X(f)(y) = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \ .$$

Questa relazione vale per ogni $f \in \mathcal{E}^0(A)$, e per ogni $y \in A$. Dunque

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Essendo $X(x_i) \in \mathcal{E}^0(A)$ l'osservazione (3.2) è dimostrata.

Dunque un campo vettoriale è un *vettore tangente che si muove in modo* C^∞ .

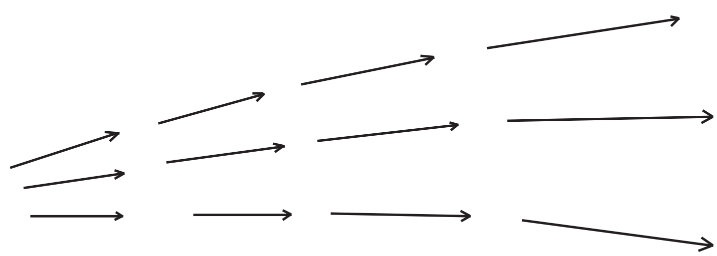

Figura 6

Dal momento che su di una varietà un cambiamento di carte del tipo $\psi\varphi^{-1}$ è una applicazione C^∞ tra aperti di $\mathbb{R}^n$, dobbiamo studiare la seguente situazione. Sia

$$F : A \to B$$

un diffeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$ dato da

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$$

e siano $y_1, \dots, y_n$ coordinate del codominio. Dato in A un campo vettoriale

$$X = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

scriviamo

$$F_*X = \sum g_j \frac{\partial}{\partial y_i} \ .$$

Vogliamo capire chi sono le g_j. Intanto si ha, per definizione,

$$F_*X = \sum (f_i \circ F^{-1}) F_*(\frac{\partial}{\partial x_i}) \ .$$

Per calcolare $F_*(\frac{\partial}{\partial x_i})$ si procede così. Per ogni $f = f(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{E}^0(B)$ si ha

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \circ F\right) \circ F^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \circ F^{-1}\right) \ .$$

Dunque

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \circ F^{-1}\right) \frac{\partial}{\partial y_j} \ ,$$

e quindi

$$F_*X = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right) \circ F^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} \ ,$$

ovvero

$$g_j = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right) \circ F^{-1} \ .$$

In altri termini, se denotiamo con J_F la matrice jacobiana di F

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \ , \tag{3.7}$$

noi possiamo dire che l'isomorfismo F_* porta il vettore colonna ${}^t(f_1, \dots f_n)$, delle coordinate di X nella base $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, nel vettore colonna

$$(J_F \, {}^t(f_1, \dots, f_n)) \circ F^{-1} \ ,$$

delle coordinate di F_*X nella base $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$. Nel seguito ometteremo, quasi sempre, l'indicazione esplicita alla composizione con F^{-1}, considerandola sottointesa.

Il caso generale

Ritornando alla varietà M e alla carta locale (U, φ), per quello che abbiamo appena dimostrato, si ha che i campi vettoriali $\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_1}), \dots, \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_n})$ sono generatori liberi dello $\mathcal{E}^0(U)$-modulo $\mathcal{V}(U)$. Quasi sempre scriveremo $\frac{\partial}{\partial x_i}$ al posto di $\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i})$ cosicché abbiamo

$$\mathcal{V}(U) = \mathcal{E}^0(U) \frac{\partial}{\partial x_1} \oplus, \dots, \oplus \mathcal{E}^0(U) \frac{\partial}{\partial x_n} \ .$$

A questo punto possiamo dare una descrizione di un qualsiasi campo vettoriale $X \in \mathcal{V}(M)$. Leggeremo il campo X in ogni carta locale, e confronteremo le letture ottenute in due diverse carte. Ricopriamo dunque M con carte locali $\{(U,\varphi)\}$. Dato un campo vettoriale $X \in \mathcal{V}(M)$ possiamo considerare le varie restrizioni $X|_U$ di X agli aperti U. Poniamo per semplicità $X|_U = X_U$. In $U \cap V$, che supponiamo non vuoto, si ha banalmente

$$X_U|_{U\cap V} = X_V|_{U\cap V} \; . \tag{3.8}$$

Scriviamo esplicitamente questa uguaglianza. Siano $x_1,\dots,x_n$ le coordinate in $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ e $y_1,\dots,y_n$ quelle di $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$. In $\varphi(U \cap V)$, scriveremo l'applicazione $\psi\varphi^{-1}$, ponendo

$$y_i = y_i(x_1,\dots,x_n) \; .$$

Noi sappiamo che

$$\begin{aligned} \varphi_* X_U &= \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad f_i \in \mathcal{E}^0\left(\varphi(U)\right) && (3.9)\\ \psi_* X_V &= \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial}{\partial y_j} \qquad g_j \in \mathcal{E}^0\left(\psi(V)\right) \; . && (3.10) \end{aligned}$$

Quindi, in virtù della (3.4), la (3.8) si traduce nella relazione

$$\sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial}{\partial y_j} = (\psi\varphi^{-1})_* (\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \; . \tag{3.11}$$

Per quello che abbiamo appena spiegato nel caso di $\mathbb{R}^n$, se denotiamo con J_{UV} la matrice jacobiana di $\psi\varphi^{-1}$, la (3.11), e quindi la (3.8), si traduce nella seguente condizione

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = J_{UV} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} , \tag{3.12}$$

dove come al solito le funzioni della colonna di destra si intendono composte con $\circ\varphi\psi^{-1}$. D'ora in poi noi scriveremo le (3.9) e (3.10) senza più far riferimento alle carte ponendo:

$$\begin{aligned} X_U &= \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad f_i \in \mathcal{E}^0\left(U\right) && (3.13)\\ X_V &= \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial}{\partial y_j} \qquad g_j \in \mathcal{E}^0\left(V\right) \; . \end{aligned}$$

Ripercorriamo ora il cammino inverso. Supponiamo di aver dato per ogni aperto $\varphi(U)$ un campo vettoriale $\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Definiamo

$$X_U = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.14}$$

Supponiamo poi che, non appena $U \cap V \neq \emptyset$, valga, in $\varphi(U \cap V)$, la condizione (3.12). Poichè questa è equivalente alla (3.11), si ha:

$$X_U|_{(U \cap V)} = X_V|_{(U \cap V)} . \tag{3.15}$$

Possiamo allora usare il Lemma (3.3) e definire univocamente un campo vettoriale $X \in \mathcal{V}(M)$ tale che X

$$X|_U = X_U$$

Riassumiamo tutte queste considerazioni nel seguente

Teorema 3.5 . *Sia M una varietà differenziabile. Sia $\{(U, \varphi)\}$ un ricoprimento di M con carte locali. Il dato di un campo vettoriale su M è equivalente al dato di un campo vettoriale*

$$\sum f_i^U \frac{\partial}{\partial x_i^U} \in \mathcal{V}(U)$$

per ogni carta (U, φ), soggetto alla condizione di compatibilità

$$\begin{pmatrix} f_1^V \\ \vdots \\ f_n^V \end{pmatrix} = J_{UV} \begin{pmatrix} f_1^U \\ \vdots \\ f_n^U \end{pmatrix} , \tag{3.16}$$

dove (V, ψ) è un'altra carta locale, e J_{UV} è la matrice jacobiana del diffeomorfismo $\psi\varphi^{-1}$. Precisamente, da questi dati si costruisce un campo vettoriale X ponendo

$$X_U = \sum f_i^U \frac{\partial}{\partial x_i^U} \in \mathcal{V}(U) \tag{3.17}$$

e definendo, per ogni $f \in \mathcal{E}^0(M)$ e $p \in M$

$$X(f)(p) = X_U(\rho f)(p)$$

dove (U, φ) è tale che $p \in U$, e ρ è una funzione C^∞ a supporto contenuto in U e identicamente uguale a 1 in un piccolo intorno di p. Risulta allora

$$X|_U = X_U .$$

Viceversa, dato $X \in \mathcal{V}(M)$, posto $X_U = X|_U$, e definite le f_i^U tramite la (3.17), risultano verificate le condizioni (3.16).

Abbiamo svolto le precedenti considerazioni con un certo dettaglio perché in geometria differenziale i procedimenti sopra descritti sono molto frequenti. Per definire un oggetto globale (campo vettoriale, forma differenziale, metrica Riemanniana ecc.) prima lo si guarda localmente in una carta dove si possono usare coordinate e poi lo si ricostruisce tramite opportune leggi di attaccamento, come appunto la (3.16).
Terminiamo questa sezione con la seguente osservazione. I campi vettoriali su M formano in modo naturale un modulo sull'anello $\mathcal{E}^0(M)$ delle funzioni C^∞ che abbiamo denotato con $\mathcal{V}(M)$. Esso è dunque anche uno spazio vettoriale reale. Ora, è importante notare che questo spazio vettoriale possiede una ulteriore struttura, quella di *algebra di Lie*. Si definisce infatti una operazione detta *parentesi di Lie*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V}(M)\times\mathcal{V}(M) & \to & \mathcal{V}(M) \\ (X,Y) & \mapsto & [X,Y] \end{array}$$

ponendo

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)\ .$$

La verifica che $[X,Y]$ sia un campo vettoriale, e cioè una derivazione di $\mathcal{E}^0(M)$ è facile e la lasciamo come esercizio. Ed è anche immediato verificare che la parentesi di Lie soddisfa le identità che definiscono una struttura di algebra di Lie e cioè

$$\begin{aligned} &[X,Y] = -[Y,X]\,, \\ &[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Esercizi

1. Sia M una varietà differenziabile, dimostrare che $\mathcal{V}(M)$ ha una struttura di algebra di Lie. Verificare che le identità (3.18) sono soddisfatte.

2. Verificare che dare un campo vettoriale su S^n equivale a dare un' applicazione C^∞ , $\phi : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tale che, per ogni $x \in S^n$, $\phi(x)$ è perpendicolare a x

3. Data un' azione C^∞ del gruppo $\mathbb{R}$ su una varietà differenziabile M (i.e. un'applicazione C^∞

$$\alpha : \mathbb{R}\times M \to M$$

che soddisfa $\alpha(0,p) = p$, $\alpha(t,\alpha(s,p) = \alpha(t+s,p)$ per ogni $p \in M$ e $s,t \in \mathbb{R}$), verificare che α induce un campo vettoriale su M.
4. Dare esempi di campi vettoriali su un toro n-dimensionale.

4 Forme differenziali

Sia M una varietà differenziabile. Introdurremo in questa sezione il modulo delle *k-forme differenziali* che denoteremo col simbolo $\mathcal{E}^k(M)$. Per definizione,

$\mathcal{E}^k(M)$ è il modulo sull'anello $\mathcal{E}^0(M)$ delle funzioni C^∞ su M, i cui elementi sono le applicazioni $\mathcal{E}^0(M)$-multilineari alterne di $\mathcal{V}(M)$ in $\mathcal{E}^0(M)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^k(M) &= A_k(\mathcal{V}(M)) \\ &= \{\omega : \underbrace{\mathcal{V}(M) \times \cdots \times \mathcal{V}(M)}_{k-\text{volte}} \to \mathcal{E}^0(M) \mid \omega, \mathcal{E}^0(M) - \text{multilineare e alterna}\} .\end{aligned}$$

In particolare,

$$\mathcal{E}^1(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^0(M)}\big(\mathcal{V}(M), \mathcal{E}^0(M)\big) .$$

Un primo esempio di forma differenziale è data dal *differenziale*

$$df \in \mathcal{E}^1(M)$$

di una funzione $f \in \mathcal{E}^0(M)$. La 1-forma df è definita da

$$df(X) = X(f) .$$

La linearità di df è ovvia:

$$\begin{aligned} df(gX + hY) &= (gX + hY)(f) \\ &= g\ X(f) + h\ Y(f) \\ &= g\ df(X) + h\ df(Y) ,\end{aligned}$$

dove $g, h \in \mathcal{E}^0(M)$, $X, Y \in \mathcal{V}(M)$. Dimostriamo subito un lemma analogo al lemma (3.3).

Lemma (4.1). *Sia ω una k- forma differenziale in M. Siano $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}(M)$ e si supponga che in un intorno U di un punto p un qualche X_i svanisca:*

$$X_i|_U = 0 .$$

Allora

$$\omega(X_1, \ldots, X_k)(p) = 0 .$$

Dim. Sia ρ una funzione C^∞ in M avente supporto in U e identicamente uguale a 1 in un intorno di p. Da un lato si ha $\rho X_i = 0$, mentre dall'altro, per multilinearità, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(X_1, \ldots, \rho X_i, \ldots, X_k)(p) \\ &= \rho(p)\omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k)(p) \\ &= \omega(X_1, \ldots, X_k)(p) .\end{aligned}$$

Q. E. D.

A questo punto, come nel caso di campi vettoriali, possiamo parlare di restrizioni. Sia $U \subseteq M$ un aperto, vogliamo definire una applicazione $\mathbb{R}$-lineare

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^k(M) & \to & \mathcal{E}^k(U) \\ \omega & \mapsto & \omega|_U \ . \end{array}$$

Se $X_1, \ldots, X_k$ sono campi vettoriali in U definiamo, per ogni $p \in U$,

$$\omega|_U(X_1, \ldots, X_k)(p) = \omega(\rho X_1, \ldots, \rho X_k)(p) \ ,$$

dove, come al solito, ρ è una funzione C^∞ con supporto in U e identicamente uguale a 1 in un intorno di p. Il lemma (4.1) ci assicura che la definizione è ben posta. Come i campi vettoriali, anche le k-forme differenziali formano un fascio. Vale cioè per esse il risultato analogo del Lemma (3.4), che enunciamo lasciandone la dimostrazione come esercizio.

Lemma 4.1 . *Siano U e V due aperti di M.*
a) Siano ω e $\omega' \in \mathcal{E}^k(U \cup V)$, allora $\omega = \omega' \Leftrightarrow \omega|_U = \omega'|_U$ e $\omega|_V = \omega'|_V$.
b) Siano $\omega_U \in \mathcal{E}^k(U)$ e $\omega_V \in \mathcal{E}^k(V)$, si supponga che

$$\omega_U|_{U\cap V} = \omega_V|_{U\cap V}$$

allora esiste un unico $\omega \in \mathcal{E}^k(U \cup V)$ tale che $\omega|_U = \omega_U$ e $\omega|_V = \omega_V$.

Dunque, come nel caso dei campi vettoriali, una k- forma differenziale è completamente determinata da dati locali e da condizioni di attaccamento. È perciò necessario capire come è fatta una k- forma differenziale in una carta locale, e poichè tramite la carta locale vogliamo ridurci al caso di $\mathbb{R}^n$, si tratta intanto di capire come si comportano le k- forme differenziali in presenza di un diffeomorfismo. Supponiamo quindi che

$$F : M \to N$$

sia un *diffeomorfismo*. Definiamo un omomorfismo $\mathbb{R}$-lineare

$$F^* : \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M)$$

ponendo, per $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}(M)$ e $k > 0$

$$F^*\omega(X_1, \ldots, X_k) = \omega(F_*X_1, \ldots, F_*X_k) \circ F \tag{4.1}$$

e per $f \in \mathcal{E}^0(N)$

$$F^*f = f \circ F \ . \tag{4.2}$$

Dalle proprietà funtoriali di F_* seguono immediatamente quelle di F^*:

$$(1_M)^* = 1_{\mathcal{E}^k(M)} \quad , \quad (FG)^* = G^*F^* \ , \tag{4.3}$$

dove $G : P \to M$ è un diffeomorfismo. Queste proprietà implicano che l'omomorfismo F^* è in effetti un isomorfismo. È anche utile osservare che se $f \in \mathcal{E}^0(N)$ e $\omega \in \mathcal{E}^k(N)$allora

$$\begin{aligned} F^* df &= dF^* f\,, \\ F^*(f\omega) &= F^* f F^* \omega\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

La seconda asserzione segue immediatamente dalle definizioni. Per quanto riguarda la prima, dato $X \in \mathcal{V}(M)$, si ha:

$$\begin{aligned} F^* df(X) &= df(F_* X) \circ F \\ &= F_* X(f) \circ F \\ &= X(f \circ F) \circ F^{-1} \circ F \\ &= X(F^* f) \\ &= d(F^* f)(X)\ . \end{aligned}$$

Si può osservare che la seconda delle (4.4) ci dice che identificando $\mathcal{E}^0(M)$ con $\mathcal{E}^0(N)$ tramite F^*, si può riguardare l'isomorfismo F^* tra $\mathcal{E}^k(N)$ e $\mathcal{E}^k(M)$ come un isomorfismo di $\mathcal{E}^0(N)$-moduli. In analogia con la (3.4), e mantenendo le stesse notazioni introdotte in quella occasione, si ha

$$(F^*\omega)|_U = (F|_U)^*(\omega|_{F(U)})\,. \tag{4.5}$$

Consideriamo ora una carta locale (U, φ) di M. Posto $A = \varphi(U)$, per quello che abbiamo appena detto, si ha un isomorfismo

$$\varphi^* : \mathcal{E}^k(A) \to \mathcal{E}^k(U)\ .$$

Dobbiamo ora cercare di capire chi è $\mathcal{E}^k(A)$ quando A è un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Forme differenziali in $\mathbb{R}^n$.

L'osservazione fondamentale, dimostrata nella sezione precedente, è che $\mathcal{V}(A)$ è un $\mathcal{E}^0(A)$-modulo libero finitamente generato di rango n

$$\mathcal{V}(A) = \mathcal{E}^0(A)\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}^0(A)\frac{\partial}{\partial x_n}\ .$$

Di conseguenza anche

$$\mathcal{E}^1(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^0(A)}\left(\mathcal{V}(A), \mathcal{E}^0(A)\right)\ ,$$

è un $\mathcal{E}^0(A)$-modulo libero, finitamente generato di rango n. È inoltre immediato verificare che gli elementi

$$dx_1, \dots, dx_n \in \mathcal{E}^1(A)$$

formano *la base duale di* $\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}$. Infatti, per definizione,

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) = \delta_{ij} \ .$$

Dunque

$$\mathcal{E}^1(A) = \mathcal{E}^0(A)dx_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}^0(A)dx_n \ ,$$

e cioè ogni 1-forma differenziale in $A \subset \mathbb{R}^n$ si scrive, in modo unico come

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n)dx_i \, ,$$

con le f_i funzioni in C^∞ in A. È questo un buon momento per dimostrare che, se $f \in \mathcal{E}^0(A)$, allora

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \ . \tag{4.6}$$

Infatti per ogni $X \in \mathcal{V}(A)$, si ha

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i} \ ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} df(X) &= X(f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i(X) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right)(X) \end{aligned}$$

e la (4.6) è dimostrata. Occupiamoci ora delle k-forme differenziali per $k \geq 1$.

Per definizione si ha

$$\mathcal{E}^k(A) = A_k\left(\mathcal{V}(A)\right) \ ,$$

ed essendo $\mathcal{V}(A)$ un $\mathcal{E}^0(A)$-modulo libero finitamente generato, si ha un isomorfismo canonico

$$\begin{aligned} A_k\left(\mathcal{V}(A)\right) &\cong \bigwedge\nolimits^k (\mathrm{Hom}\left(\mathcal{V}(A), \mathcal{E}^0(A)\right) \\ &= \bigwedge\nolimits^k \mathcal{E}^1(A) \ . \end{aligned}$$

Dunque, sempre per i teoremi generali di algebra multilineare, si ha che, ponendo

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ ,$$

vi è un isomorfismo

$$\mathcal{E}^k(A) \cong \bigoplus_I \mathcal{E}^0(A) dx_I \ ,$$

dove, come al solito $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots\}$ e $i_1 < \cdots < i_k$. Dunque, ogni k-forma differenziale in A si può scrivere in modo unico come

$$\omega = \sum_I f_I dx_I \ , \tag{4.7}$$

con le f_I funzioni C^∞ in A. Naturalmente, quando vogliamo interpretare ω come un elemento di $A_k(\mathcal{V}(A))$, dobbiamo usare esplicitamente l' isomorfismo tra $A_k(\mathcal{V}(A))$ e $\bigwedge^k \mathcal{E}^1(A)$. Dunque se $X_1, \dots, X_k$ sono campi vettoriali in A, e se ω è data dalla (4.7) si ha

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \dots, X_k) &= \sum f_I \ dx_I(X_1, \dots, X_k) \\ &= \sum f_I \ \det\left(dx_{i_s}(X_t)\right)_{\substack{t=1,\dots,k \\ s=1,\dots,k}} \\ &= \sum f_I \ \det\left(X_t(x_{i_s})\right)_{\substack{t=1,\dots,k \\ s=1,\dots,k}} \end{aligned}$$

Supponiamo ora che

$$F : A \to B$$

sia un diffeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$, e consideriamo l' isomorfismo indotto

$$F^* : \mathcal{E}^k(B) \to \mathcal{E}^k(A) \ .$$

Siano $x_1, \dots, x_n$ coordinate in A, e $y_1, \dots, y_n$ coordinate in B e sia

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)) \ . \tag{4.8}$$

Sia

$$\omega = \sum \ f_I \ dy_I \in \mathcal{E}^k(B) \ , \tag{4.9}$$

vogliamo calcolare $F^*\omega$. Procediamo per gradi. Osserviamo innanzi tutto che per la (4.4) si ha

$$F^* \ dy_i = dF_i \ .$$

Consideriamo prima il caso di una 1-forma differenziale

$$\omega = \sum \ f_i \ dy_i \, .$$

Sempre per le (4.4), si ha

$$F^*\omega = \sum \ f_i \circ F \ dF_i \ , \tag{4.10}$$

e ricordando la (4.6) si ottiene

$$F^*\omega = \sum_{ij} f_i \circ F \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\ dx_j \ . \tag{4.11}$$

Se J_F è la matrice jacobiana di F possiamo concludere che l'isomorfismo F^* porta il vettore colonna ${}^t(f_1, \dots, f_n)$ delle coordinate di ω nella base $dy_1, \dots, dy_n$ nel vettore colonna

$$({}^tJ_F){}^t(f_1 \circ F, \dots, f_n \circ F)$$

delle coordinate di $F^*\omega$ nella base $dx_1, \dots, dx_n$. La generalizzazione al caso delle k-forme è pressoché immediata. In totale analogia con la (4.4) e la (4.11), si dimostra che

$$\begin{aligned} & F^*(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) = \\ = \ & dF_{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_{i_k} \\ = \ & \left(\sum_{j_1=1}^{n} \frac{\partial F_{i_1}}{\partial x_{j_1}}\ dx_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^{n} \frac{\partial F_{i_k}}{\partial x_{j_k}}\ dx_{j_k} \right) \\ = \ & \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \frac{\partial(F_{i_1}, \dots, F_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge\ dx_{j_k} \end{aligned}$$

e si conclude che l' isomorfismo

$$F^* : \mathcal{E}^k(B) \to \mathcal{E}^k(A)$$

porta il vettore colonna ${}^t(\dots, f_I, \dots)$ delle coordinate di $\omega = \sum\ f_I\ dy_I$ nella base $\{dy_I\}$ nel vettore colonna

$$\overset{k}{\wedge}\ ({}^tJ_F)(\dots, f_I \circ F, \dots)$$

delle coordinate di $F^*\omega$ nella base $\{dx_I\}$, dove $\overset{k}{\wedge}\ ({}^tJ_F)$ indica la matrice $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$ avente nel posto (I, J) il minore di righe I e colonne J della matrice ${}^tJ_F$. D'ora in poi, nei simboli, non faremo più riferimento alla composizione con F.

Il caso generale

Siamo ora in grado di dare una descrizione delle k-forme differenziali in termini di dati locali, così come abbiamo fatto per i campi vettoriali.

Teorema 4.2 . *Sia M una varietà differenziale. Sia $\{(U, \varphi)\}$ un ricoprimento di M con carte locali. Il dato di una k-forma differenziale $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ è equivalente al dato di una k-forma differenziale*

$$\sum\ f_I^U\ dx_I^U \in \mathcal{E}^k(U)$$

soggetto alle seguenti condizioni di compatibilità

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ f_I^U \\ \vdots \end{pmatrix} = \overset{k}{\wedge} ({}^t J_{UV}) \begin{pmatrix} \vdots \\ g_I^V \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

dove $\overset{k}{\wedge} ({}^t J_{UV})$ *indica la matrice* $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$ *avente nel posto* (I, J) *il minore di righe* I *e colonne* J *della matrice* ${}^t J_{UV}$*.*

Dim. Sia ω una k-forma differenziale. Si ponga

$$\omega_U = \omega|_U \ , \omega_V = \omega|_V \, .$$

Esistono funzioni $f_I \in \mathcal{E}^0(\varphi(U))$ e $g_I \in \mathcal{E}^0(\psi(U))$ tali che

$$\omega_U = \sum f_I dx_I \ , \quad \omega_V = \sum g_I dy_I . \tag{4.13}$$

La condizione

$$F\omega_U|_{U \cap V} = \omega_V|_{U \cap V}$$

si traduce nella relazione

$$\sum f_I dx_I = \sum g_I dy_I$$

valida in $U \cap V$. Questo relazione, come si è visto con una analisi locale, è equivalente alla (4.12). Viceversa date le f_I e le g_I soddisfacenti la (4.12) e definite le $\omega_U \in \mathcal{E}^k(U)$, si ha che

$$\omega_U|_{U \cap V} = \omega_V|_{U \cap V} \, .$$

Il lemma (4.1) ci assicura che esiste un' unica forma $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ tale che $\omega|_U = \omega_U$ e $\omega|_V = \omega_V$. Il teorema è dimostrato.

Dimostriamo ora un Lemma che sarà usato nel seguito.

Lemma 4.3 *Sia* $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ *e sia* $p \in M$*. Allora esiste un intorno* V *di* p *e una forma differenziale definita globalmente su* M *del tipo*

$$\tilde{\omega} = \sum h_I \ d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k} \ , \tag{4.14}$$

dove le $h_I = h_{i_1,\ldots,i_k}$ *e le* φ_i *sono funzioni* C^∞ *su* M*, in modo che*

$$\omega|_V = \tilde{\omega}|_V \ .$$

Dim. Sia (U, φ) una carta locale intorno a p. Scriviamo

$$\omega|_U = \sum f_I \, dx_I$$

Consideriamo una funzione $\lambda \in \mathcal{E}^0(M)$ con supporto in U e identicamente eguale a 1 in un intorno V di p. Definiamo $h_I, \ \varphi_i \in \mathcal{E}^0(M)$ ponendo

$$h_I = \lambda f_I \quad , \quad \varphi_i = \lambda x_i \, .$$

Si può quindi definire una forma globale ponendo $\tilde{\omega} \in \mathcal{E}^k(M)$

$$\tilde{\omega} = \sum h_I \, d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k} \, ,$$

e per costruzione si ha

$$\omega|_V = \tilde{\omega}|_V \ .$$

Q. E. D.

Corollario 4.4 . *Sia $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ e $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}(M)$. Si supponga che per qualche i si abbia $X_{i,p} = 0$. Allora $\omega(X_1, \ldots, X_k)(p) = 0$.*

Dim. Per linearità e per il lemma precedente basta dimostrare l'asserto nel caso in cui

$$\omega = f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_h$$

con $f, g_i \in \mathcal{E}^0(M)$. Si ha

$$\omega(X_1, \ldots, X_k)(p) = f(p) \, \det(X_s(g_t))(p) \ .$$

A questo punto basta notare che (cf. (3.3))

$$X_i(g_j)(p) = X_{i,p}(g_j) \ .$$

Q. E. D.

Questo corollario suggerisce la seguente definizione. Sia $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ e sia $p \in M$. Si denoti con $\omega(p)$ l'elemento di $\bigwedge^k \left(T_p^*(M)\right) \cong \left(\bigwedge^k T_p(M)\right)^*$ definito per linearità a partire dalla seguente relazione

$$\omega(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(X_1, \ldots, X_k)(p) \tag{4.15}$$

dove $v_i \in T_p(M)$ e X_i è un campo vettoriale in M tale che $X_{i,p} = v_i$. Il corollario precedente ci assicura che questa è una buona definizione. Si è così stabilito un omomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^k(M) & \to & \bigwedge^k T_p^*(M) \\ \omega & \longmapsto & \omega(p) \end{array} \tag{4.16}$$

che mostra come una k-forma differenziale possa pensarsi come il dato di un vettore $\omega(p)$ nella potenza k-esima del duale dello spazio tangente in ogni punto p di M e che varia in modo C^∞ con p. Chiudiamo la sezione parlando del prodotto esterno di forme.

Prodotto esterno.

Per i risultati dell'algebra multilineare del Capitolo 2, date due forme differenziali $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ e $\varphi \in \mathcal{E}^h(M)$, resta definita una forma

$$\omega \wedge \varphi \in \mathcal{E}^{h+k}(M)$$

ponendo

$$\begin{aligned} &\omega \wedge \varphi(X_1, \dots, X_{h+k}) = \\ &= \sum_{\sigma \in P} \varepsilon(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \cdot \psi(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+h)})\,. \end{aligned} \tag{4.17}$$

dove P è il sottoinsieme $P \subset S_{h+k}$ delle permutazioni σ tali che

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(h)\,, \qquad \sigma(h+1) < \cdots < \sigma(h+k)\,.$$

Ricordiamo l'origine della formula (4.17). Per il Lemma (4.3) e per linearità si può supporre che

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_h\,, \\ \varphi &= \omega_{h+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{h+k}\,, \end{aligned}$$

D'altro canto noi sappiamo che data una matrice A che sia $(h+k) \times (h+k)$, e fissato un multiindice $I = (i_1, \dots, i_h)$, si ha

$$det(A) = \sum_J \epsilon(J) A_{I,J} A_{I^c,J^c}$$

dove $A_{I,J}$ è il determinante del minore di A avente le righe indicizzate da I e le colonne indicizzate da J, dove I^c denota il complementare di I in $\{1, \dots, h+k\}$ e dove $\epsilon(J)$, è il segno della permutazione $\{J, J^c\}$. Ora se $A = (\omega_{i,j})$ e $I = \{1, \dots, h\}$, la formula appena data per il determinannte di A non è altro che la (4.17).

È anche ovvio, e lo si vede localmente, che $\mathcal{E}^k(M) = 0$ per $k > \dim M$. Dunque il modulo

$$\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \mathcal{E}^k(M)$$

ha, tramite il prodotto $\wedge$, una struttura di $\mathcal{E}^0(M)$-algebra di rango finito. A partire dalla definizione di prodotto $\wedge$ è facile verificare la seguente formula

$$\omega \wedge \varphi = (-1)^{kh} \varphi \wedge \omega \quad \omega \in \mathcal{E}^k(M),\ \varphi \in \mathcal{E}^h(M)\ . \tag{4.18}$$

Sempre dalla definizione segue che se $F : M \to N$ è un diffeomorfismo allora per $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ e $\varphi \in \mathcal{E}^h(M)$ si ha

$$F^*(\omega \wedge \varphi) = F^*\omega \wedge F^*\varphi \ , \tag{4.19}$$

mentre se $U \subset M$ è un aperto si ha

$$(\omega \wedge \varphi)|_U = \omega|_U \wedge \varphi|_U \ . \tag{4.20}$$

Da queste relazioni, o dalla definizione stessa, si deduce che se

$$\omega = f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k \ , \quad \omega' = f' dg'_1 \wedge \cdots \wedge dg'_h,$$

allora

$$\omega \wedge \omega' = f f' dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k \wedge dg'_1 \wedge \cdots \wedge dg'_h \ .$$

Esercizi

1. Sia $\alpha \in \mathcal{E}^k(M)$, è sempre vero che

$$\alpha \wedge \alpha \equiv 0 \quad ?$$

2. Dimostrare il Lemma (4.1).
3 dare esempi di k-forme differenziali su un toro n-dimensionale.

5 Differenziazione

Introduciamo l'operatore di differenziazione

$$d : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k+1}(M) \ .$$

Dimostreremo il seguente

Teorema 5.1 *Sia M una varietà differenziale allora esiste un unico operatore $\mathbb{R}$-lineare*

$$d : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k+1}(M) \ .$$

tale che

i) *per $k = 0$ coincide con l'operatore già definito, e cioè $df(X) = X(f)$, $\forall f \in \mathcal{E}^0(M)$, e $\forall X \in \mathcal{V}(M)$,*

ii) *$d^2 = 0$,*

iii) *se $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ e $\varphi \in \mathcal{E}^h(M)$*

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi \ .$$

Dim. Incominciamo col dimostrare l'unicità dell'operatore d, assumendo di averlo costruito per M e per gli aperti $U \subset M$. Sia dunque d' un altro operatore soddisfacente le proprietà richieste. Osserviamo intanto che se ω e $\tilde{\omega}$ sono forme differenziali aventi la stessa restrizione su un aperto V di M, allora $(d'\omega)|_V = (d'\tilde{\omega})|_V$. Infatti per ogni punto p di V, si può trovare un intorno Wp e una funzione $\rho \in \mathcal{E}^0(M)$ con supporto in V e identicamente eguale a 1 in W e scrivere

$$0 = d'\rho(\omega - \tilde{\omega}) = d'\rho \wedge (\omega - \tilde{\omega}) + \rho d'(\omega - \tilde{\omega}) \ ,$$

il che implica

$$(d'\omega)|_W = (d'\tilde{\omega})|_W \ .$$

Prendiamo ora una forma differenziale ω. Per il lemma (4.3), dato un qualsiasi punto $p \in M$ esiste un intorno V di p e una forma differenziale $\tilde{\omega} \in \mathcal{E}^k(M)$, somma di k-forme differenziali del tipo

$$h \ dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k \quad , \quad h, g_i \in \mathcal{E}^0(M)$$

e tale che

$$\omega|_V = \tilde{\omega}|_V \ .$$

Per quello che abbiamo appena dimostrato, si ha che $(d'\omega)|_V = (d'\tilde{\omega})|_V$. D'altro canto usando le proprietà i), ii) e iii) si ha

$$\begin{aligned}
& d'(h \ dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) = \\
= \quad & d'h \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k + hd'(d'g_1 \wedge \cdots \wedge d'g_k) \\
= \quad & dh \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k + h \sum (-1)^i (d'g_1 \wedge \cdots \wedge {d'}^2 g_i \wedge \cdots \wedge d'g_k) \\
= \quad & dh \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k \ .
\end{aligned}$$

Dunque la definizione di d' è forzata sulle k-forme differenziali del tipo $h \ dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$. Per linearità è forzata su $\tilde{\omega}$, che di forme di questo tipo è somma. Quindi è forzata la definizione di $(d'\omega)|_V$ e di conseguenza anche quella di $d'\omega$. L'unicità è dimostrata. Non solo, abbiamo anche una definizione dell'operatore d per un aperto A di $\mathbb{R}^n$. Se $\omega = \sum \ f_I \ dx_I \in \mathcal{E}^k(A)$

$$d\omega = \sum \ df_I \wedge dx_I \ .$$

Verifichiamo che valgono per questo operatore in $\mathcal{E}^k(A)$, le proprietà i), ii) e iii). Intanto il fatto che $d\omega \in \mathcal{E}^{k+1}(A)$ è ovvio, come sono ovvie la $\mathbb{R}$–linearità di d, e la validità di i). Per la ii), vista la linearità, basta dimostrare che

$$d^2(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = 0 \ .$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
d^2(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) &= d\left(\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\right) \\
&= \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&= 0 \ ,
\end{aligned}$$

dove l'ultima eguaglianza segue dal fatto che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = 0 \ .$$

Non rimane che dimostrare la iii). Di nuovo per linearità, basta dimostrare che

$$d(f dx_I \wedge g dx_J) = d(f dx_I) \wedge g dx_J + (-1)^k f dx_I \wedge d(g dx_J)$$

dove $|I| = k$. Naturalmente possiamo assumere che $I \cap J = \phi$, essendo altrimenti l'uguaglianza banalmente verificata. Si ha:

$$\begin{aligned}
d(f dx_I \wedge g dx_J) &= d(fg dx_I \wedge dx_J) \\
&= \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g + \frac{\partial g}{\partial x_i} f\right) dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= d(f dx_I) \wedge g dx_J + f \left(\sum \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= d(f dx_I) \wedge g dx_J + (-1)^k f dx_I \wedge d(g dx_J) \ ,
\end{aligned}$$

come si voleva.

Procedendo nella dimostrazione del Teorema, osserviamo che se $F : A \to B$ è un diffeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$ allora

$$F^* d\nu = dF^* \nu \quad , \quad \nu \in \mathcal{E}^k(B) \ . \tag{5.1}$$

(Avevamo dimostrato questa eguaglianza in (4.4) solo per $k = 0$.) Per linearità basta dimostrarla nel caso in cui $\nu = f \ dx_I$. Si ha

$$\begin{aligned}
F^* d(f \ dx_I) &= F^*(df \wedge dx_I) \\
&= F^* df \wedge F^* dx_I \\
&= d(F^* f) \wedge d(F^* x_I) \\
&= d(F^*(f) F^*(dx_I)) \\
&= d(F^*(f dx_I)) \ .
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora l'esistenza dell'operatore d su di una qualsiasi varietà differenziabile M. Sia $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, sia (U, φ) una carta locale e sia $\omega|_U = \varphi^* \mu$, con $\mu \in \mathcal{E}^k(\varphi(U))$ si definisca

$$(d\omega)_U = \varphi^* d\mu = \varphi^* d\varphi^{*-1}(\omega|_U) \ .$$

Per vedere che la definizione è ben posta, si supponga che in un'altra carta locale (V, ψ), si abbia $\omega|_V = \psi^* \nu$. Bisogna allora dimostrare che in $U \cap V$

$$\varphi^* d\mu = \psi^* d\nu \ .$$

Ponendo $F = \psi\varphi^{-1}$, si ha $\mu = F^*\nu$ in $\varphi(U \cap V)$ e la conclusione discende dalla (5.2). Per verificare che l'operatore così definito soddisfa le proprietà richieste basta farlo in ogni carta locale. Questa verifica si fa usando le (4.5), (4.19), (4.20) e il fatto che l'operatore d in $\mathbb{R}^n$ soddisfa le proprietà richieste.

Q.E.D.

6 Funtorialità

Nel § 4, a partire da un diffeomorfismo $F : M \to N$, abbiamo definito degli isomorfismi $F_* : \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(\mathcal{N})$ e $F^* : \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M)$. Mentre non è possibile fare di più per quello che riguarda i campi vettoriali, è possibile invece definire un operatore F^* tra k-forme anche quando F *non* è un diffeomorfismo. Dimostreremo il seguente:

Teorema 6.1 *Sia $F : M \to N$ una applicazione C^∞. Allora, per ogni $k \geq 0$, esiste un unico omomorfismo*

$$F^* : \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M)$$

soddisfacente le seguenti proprietà:

i) $F^* f = f \circ F$, *per* $f \in \mathcal{E}^0(M)$,

ii) $F^*(\omega \wedge \omega') = F^*\omega \wedge F^*\omega'$, $\omega \in \mathcal{E}^k(N), \omega' \in \mathcal{E}^h(N)$,

iii) $F^* d = dF^*$,

iv) *se U è aperto in M, e V un aperto di N contenete $F(U)$, allora*

$$(F^*\omega)|_U = (F|_U)^*(\omega|_V)$$

dove si considera $F|_U$ come applicazione da U a V. Inoltre un tale omomorfismo è funtoriale nel senso che

v) $(1_M)^* = 1_{\mathcal{E}^k(M)}$,

vi) $(GF)^* = F^*G^*$, *per* $G : N \to P$, *applicazione* C^∞.

Dim. Incominciamo col dimostrare l'unicità. Ritorniamo all'osservazione (4.3) e alla notazione allora introdotta. Usando due volte la iv), si ottiene

$$(F^*\omega)|_U = (F^*\tilde{\omega})|_U \ . \tag{6.1}$$

D'altro canto $\tilde{\omega}$ è combinazione lineare di termini del tipo

$$\mu = h\ dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$$

con $h, g_i \in \mathcal{E}^0(N)$, e in virtù della i), della iv) e della v) la definizione di $F^*\mu$ è forzata:

$$\begin{aligned} F^*\mu &= F^*(h\, dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) \\ &= F^*hF^*dg_1 \wedge \cdots \wedge F^*dg_k) \\ &= h \circ Fd(g_1 \circ F) \wedge \cdots \wedge d(g_k \circ F)\ . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dunque, per linearità, anche la definizione di $F^*\omega|_U$ è forzata, e quindi anche quella di $F^*\omega$. Dimostriamo ora l'esistenza di F^*. Localmente la definizione di F^* è forzata dalla (6.1) e dalla (6.2). Definiamo

$$(F^*(\omega))_U = (F^*(\tilde{\omega}))|_U$$

Per verificare che in questo modo si definisce una k-forma differenziale in M bisogna intanto verificare che la definizione data è indipendente dall' $\tilde{\omega}$ scelto. Sia $F(p)$ un punto fissato dell'aperto $V \subseteq N$ in cui ω e $\tilde{\omega}$ coincidono. Vogliamo mostrare che, dati campi vettoriali $X_1, \ldots, X_k$ in M, $F^*\tilde{\omega}(X_1, \ldots, X_k)(p)$ può calcolarsi nel modo seguente. Si scelgono campi vettoriali $Y_1, \ldots, Y_k$ in N tali che, nel punto p valga l'eguaglianza, $F_{*,p}(X_{i,p}) = Y_{i,F(p)}$ e si osserva che allora

$$\begin{aligned} F^*\tilde{\omega}(X_1, \ldots, X_k)(p) &= \tilde{\omega}(Y_1, \ldots, Y_k)\,(F(p)) \\ &= \omega(Y_1, \ldots, Y_k)\,(F(p)) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Ciò mostrerà l'indipendenza della definizione di $F^*\omega|_W$ dalla particolare $\tilde{\omega}$ scelta. L'indipendenza della scelta degli Y_i discende invece da corollario (4.4). Per linearità possiamo ridurre la dimostrazione della (6.3) al caso in cui

$$\tilde{\omega} = h\, dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k \quad \text{con } h, g_i \in \mathcal{E}^0(N)$$

si ha:

$$\begin{aligned} F^*\tilde{\omega}(X_1, \ldots, X_k)(p) &= hF(p)\ \det(X_{i,p}(g_jF)) \\ &= hF(p)\ \det(F_{*,p}X_{i,p}(g_j)) \\ &= hF(p)\ \det\big(Y_{i,F(p)}(g_j)\big) \\ &= \tilde{\omega}(Y_1, \ldots, Y_k)\,(F(p)) \\ &= \omega(Y_1, \ldots, Y_k)\,(F(p))\ . \end{aligned}$$

Questa osservazione implica anche che $(F^*\omega)_U$ e $(F^*\omega)_V$ coincidono in $U \cap V$. Dunque, sempre per il lemma (4.1), $F^*\omega$ è una ben definita k-forma differenziale in M. Dimostriamo che F^* soddisfa le proprietà richieste. La i) e la iv) sono implicite nella definizione. Valendo la iv) le rimanenti si possono dimostrare localmente. La linearità segue subito e dunque ci può limitare e dimostrare le altre proprietà per forme del tipo $h\, dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k,\ h, f_i \in \mathcal{E}^0(N)$. A questo punto la ii) e la iii) sono del tutto ovvie. Non rimane che la vi) che segue dalle precedenti non appena si osservi che per $f \in \mathcal{E}^0(N)$

$$\begin{aligned}(GF)^* df &= df GF \\ &= F^* df G \\ &= G^* F^* df \ .\end{aligned}$$

Q.E.D.

Vale la pena osservare che la definizione di F^* data nel caso di un diffeomorfismo nel § 4 coincide in quella data nella dimostrazione del teorema, come segue dalla (6.3).

Esercizi

1. Sia

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

la proiezione canonica e $\alpha \in \mathcal{E}^k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$; trovare le condizioni necessarie e sufficienti affinché esista $\beta \in \mathcal{E}^k(P^n(\mathbb{R}))$ con

$$\alpha = \pi^* \beta.$$

2. Sia $n \geq 4$,

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

la proiezione canonica e

$$\omega = dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 / r^4,$$

dimostrare che esiste $\beta \in \mathcal{E}^4(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ tale che $\omega = \pi^* \beta$.

3. Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \backslash \Lambda$ la proiezione; verificare che esistono delle forme differenziali $\phi \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^2 \backslash \Lambda)$ tali che $\pi^* \phi = df$ per qualche $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{\in})$, ma $\phi \notin dE^0(\mathbb{R}^2 \backslash \Lambda)$.

7 Alcuni esempi

Incominciamo col dare alcuni esempi di campi vettoriali.

Ipersuperfici.

Riprendiamo l'esempio dato all'inizio del capitolo. Fissiamo una ipersuperficie in $\mathbb{R}^n$

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | F(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

dove F è una funzione C^∞. Vogliamo vedere che *se*

$$X = \sum a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

è un campo vettoriale in $\mathbb{R}^n$, tale che $X(F) = 0$, allora la restrizione di X a M è un campo vettoriale su M.

Dal momento che, per un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, si ha $X(F)_{|U} = (X_{|U})(F_{|U})$, la questione è locale e si può assumere che (U, φ) sia una carta locale in $\mathbb{R}^n$ per cui cui l'ipersuperficie $F = 0$ si trasforma nell' iperpiano $x_n = 0$. Ciò vuol dire che $\varphi^*(x_n) = F$. Ora i campi tangenti a $x_n = 0$ sono del tipo

$$Y = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ovvero quelli per cui $Y(x_n) = 0$. Dunque un campo vettoriale X in $\mathbb{R}^n$ tangente a $U \cap M$ deve soddisfare la condizione $\varphi_*(X)(x_n) = 0$. Ma

$$\varphi_*(X)(x_n) = X(\varphi^*(x_n)) = X(F)$$

e la nostra asserzione è dimostrata.

Sfere.

Siamo ora in grado di dare esempi di campi vettoriali su una sfera

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0\}\ .$$

Se $n = 2k - 1$, poniamo

$$X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_{2k} \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} - x_{2k-1} \frac{\partial}{\partial x_{2k}}\ . \tag{7.1}$$

Chiaramente si ha $X(\sum_{i=1}^{2k} x_i^2 - 1) = 0$ e quindi X è un campo vettoriale su S^{2k-1}. È interessante notare che X è un *campo vettoriale non nullo*, che cioè $X_p \neq 0$ per ogni $p \in S^{2k-1}$. Se si prende lo stesso campo vettoriale X come campo vettoriale in $\mathbb{R}^{2k+1}$, vale ancora la proprietà $X(\sum\limits_{i=1}^{2k+1} x_i^2 - 1) = 0$, e dunque X è un campo vettoriale su S^{2k} che è ovunque non–nullo tranne che nei due poli $P_\pm = (0, \ldots, 0, \pm 1) \in S^{2k}$:

Figura 7

Gruppi di Lie.

Passiamo ora a un altra serie di esempi. Consideriamo i gruppi classici introdotti nella sezione 18 del Capitolo 2. Vogliamo calcolarne gli spazi tangenti. In ciò che segue useremo consistentemente l'identificazione $V = T_v(V)$ tra lo spazio tangente in un punto v di uno spazio vettoriale V e lo spazio stesso, ottenuta pensando a un vettore w di V come come alla derivazione D_w in v nella direzione di w:

$$D_w(f) = \frac{d}{dt} f(v + tw)|_{t=0}$$

I gruppi classici sono tutti definiti come sottovarietà aperte o chiuse dello spazio vettoriale $M_n(k)$ delle matrici $n \times n$ su un campo k che è, a seconda dei casi, il campo dei numeri reali o quello di numeri complessi. Sia G uno tra questi gruppi classici, g un suo punto e denotiamo con l_g il diffeomorfismo di G in G dato dalla moltiplicazione a sinistra per g. Poichè $T_g(G) = (l_g)_* T_I(G)$, dove I è la matrice identità, possiamo limitarci a calcolare lo spazio tangente a G nell'identità . Questo spazio, a sua volta, è un sottospazio dello spazio tangente $T_I(M_n(k))$ che, come abbiamo convenuto, identifichiamo con $M_n(k)$ stesso. Il caso di $GL(n, k)$ che è un aperto di $M_n(k)$ è molto semplice:

$$T_I(GL(n, k)) = T_I(M_n(k)) = M_n(k)$$

Gli altri gruppi classici sono dei chiusi in $M_n(k)$ definiti da un certo numero di equazioni $F_i = 0$. I corrispondenti spazi tangenti sono definiti in $T_I(M_n(k)) = M_n(k)$ dalle equazioni $v(F_i) = 0$. Per esplicitare queste equazioni osserviamo che, dato $D_A \in T_I(M_n(k)))$:

$$D_A(det(X)) = \frac{d}{dt}(1 + t(tr(A)) + O(t^2))|_{t=0} = tr(A)\,,$$

$$D_A({}^tXX) = \frac{d}{dt}({}^t(I + tA)(I + tA))|_{t=0} = {}^tA + A\,,$$

$$D_A({}^tXJX) = \frac{d}{dt}({}^t(I + tA)J(I + tA))|_{t=0} = {}^tAJ + JA\,,$$

da ciò si deduce che

$$\begin{aligned}
T_I(SL(n, k)) &= \{X \in M_n(k) \mid tr(X) = 0\}\,,\\
T_I(O(n)) = T_I(SO(n)) &= \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}\,,\\
T_I(U(n)) &= \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X + {}^t\overline{X} = 0\,,\ \}\,,\\
T_I(SU(n)) &= \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X + {}^t\overline{X} = 0\,,\ tr(X) = 0\}\,,\\
T_I(Sp(2n, k)) &= \{X \in M_n(k) \mid {}^tXJ + JX = 0\}\,.
\end{aligned}$$

È interessante osservare che in generale lo spazio tangente nell'identità a un gruppo di Lie G ha una struttura naturale di algebra di Lie. In effetti $T_e(G)$ può identificarsi con l'algebra di Lie $L(G)$ dei campi vettoriali invarianti su G :

$$L(G) = \{X \in \mathcal{V}(G) \mid (l_g)_* X = X \ , \forall g \in G\}.$$

La struttura di algebra di Lie su $L(G)$ è data dalla parentesi di Lie. L'isomorfismo tra $T_e(G)$ e $L(G)$ si stabilisce nel modo seguente. Se $v \in T_e(G)$ è un vettore tangente si definisce un campo vettoriale invariante X su G ponendo, per ogni $f \in \mathcal{E}^0(G)$

$$X(f)(g) = (l_g)_* v(f)$$

Il campo vettoriale così definito prende il nome di *campo vettoriale invariante* determinato da v. Viceversa, ad ogni campo invariante X si associa il vettore tangente X_e.

Grassmanniane.

Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e sia W un sottospazio k-dimensionale di V. Vogliamo mostrare che vi è un isomorfismo canonico

$$T_{[W]}(Gr(k, V)) = Hom(W, V/W). \tag{7.2}$$

Per vedere ciò, fissiamo una base $e_1, \ldots, e_k$ di W, completiamola a una base $e_1, \ldots, e_n$ di V e denotiamo con $\overline{e_{k+1}}, \ldots, \overline{e_n}$ la corrispondente base di V/W. La scelta di una tale base consente le identificazioni:

$$\begin{aligned} T_{[W]}(Gr(k, V)) &= T_0(M_{k,\,n-k}(\mathbb{C})) = M_{k,\,n-k}(\mathbb{C})\,, \\ Hom(W, V/W) &= M_{k,\,n-k}(\mathbb{C})\,. \end{aligned}$$

Passando a una nuova base $e'_1, \ldots, e'_n$, ma sempre insistendo che i vettori $e'_1, \ldots, e'_k$ costituiscano una base di W, la suddette identificazione differiscono, *entrambe*, dalle nuove per l'automorfismo

$$\begin{aligned} M_{k,\,n-k}(\mathbb{C}) &\to M_{k,\,n-k}(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto AXB^{-1}\,, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

è la matrice del cambiamento di base. Questo dimostra che l'isomorfismo tra lo spazio tangente in $[W]$ a $Gr(k, V)$ e $Hom(W, V/W)$ è canonico.
Un'altra maniera per dimostrare (7.2) è la seguente. Come abbiamo visto alla fine della sezione 18 del Capitolo 2, Il gruppo $GL(V)$ agisce transitivamente su $Gr(k, V)$. Fissato un punto $[W]$ di $Gr(k, V)$ c'è una applicazione C^∞

$$\begin{aligned} \pi \ : \ GL(V) &\to Gr(k, V) \\ g &\mapsto [gW] \end{aligned}$$

In opportune coordinate l'applicazione π è data da

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto (A^{-1}B)$$

Per calcolare

$$\pi_{*,e} \ : T_e(GL(V)) \to T_{[W]}Gr(k,V)$$

osserviamo che

$$\begin{aligned} \pi_{*,e}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\pi\left(I + t\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\big((I+tA)^{-1}tB\big)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\big((I-tA+O(t^2))tB\big)|_{t=0} \\ &= B. \end{aligned}$$

Dunque, nell'identificazione

$$T_e(GL(V)) = Hom(V,V),$$

si ha

$$Ker(\pi_{*,e}) = P_W := \{g \in GL(V) \mid gW = W\}.$$

Ne segue che

$$T_{[W]}Gr(k,V) = Hom(V,V)/P_W.$$

D'altro canto, se ι è l'inclusione di W in V e η la proiezione di V su V/W, l'omomorfismo

$$\begin{array}{rcl} Hom(V,V) & \to & Hom(W,V/W) \\ f & \mapsto & \eta f \iota \end{array}$$

da una identificazione

$$Hom(V,V)/P_W = Hom(W,V/W),$$

come si voleva.

1-forme su S^1.

Consideriamo S^1 con l'atlante descritto nella sezione 2 del Cap. 2. Definiamo

$$\omega_U = \varphi^* d\theta \in \mathcal{E}^1(U)$$

$$\omega_V = \psi^* d\theta \in \mathcal{E}^1(V)\ .$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \omega_V|_{U\cap V} &= \varphi^*\varphi^{-1*}\psi^* d\theta = \varphi^*(\psi\varphi^{-1})^* d\theta \\ &= \varphi^* d(\psi\varphi^{-1}(\theta)) = \varphi^* d(\theta + c) = \varphi^* d\theta = \omega_U|_{U\cap V} \end{aligned}$$

dove $c = 0$ oppure $c = -2\pi$. Ne segue che esiste una 1–forma ω tale che $\omega|_U = \omega_U$ e $\omega|_V = \omega_V$. Spesso si denota questa forma impropriamente con il simbolo $d\theta$.

k–forme su un toro.

Consideriamo un toro $T_n = \mathbb{R}^n/\Lambda$, dove Λ è un reticolo in $\mathbb{R}^n$, e denotiamo con $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Lambda$ la proiezione. Vi è un'unica 1–forma ω_i su $\mathbb{R}^n/\Lambda$ tale che $\pi^*\omega_i = dx_i$. Ricordiamo le carte

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n$$

introdotte nella sezione 7 del Cap. 2. Poniamo $\omega^i_{U_\lambda} = \varphi^*_\lambda dx_i$. Poiché $\varphi_\mu\varphi_\lambda^{-1}(x) = x + \lambda - \mu$, $x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\omega^i_{U_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu}} = \omega^i_{U_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}}$ e quindi le $\omega^i_{U_\lambda}$ si raccordano per definire una forma globale ω che ovviamente ha la proprietà: $\pi^*\omega_i = dx_i$. Spesso, e impropriamente, si denota questa 1–forma su $\mathbb{R}^n/\Lambda$ con il simbolo dx_i. Una volta costruite le $\omega_i \in \mathcal{E}^1(T_n)$ si possono costruire le forme

$$\omega_I = \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} \in \mathcal{E}^k(T_n) \quad I = (i_1, \ldots, i_k) \ .$$

Noi dimostreremo, in una successiva sezione, che le forme ω_I, $I = (i_1, \ldots, i_k)$ $i_1 < \cdots < i_k$ sono chiuse e non esatte e che le loro classi di coonologia di de Rham formano una base per lo spazio vettoriale $H^k_{dR}(T_n)$.

1-forme su curve algebriche proiettive non-singolari.

Consideriamo una curva algebrica piana non-singolare:

$$C = \{[X, Y, Z] \mid F(X, Y, Z) = 0\}$$

dove F è un polinomio omogeneo di grado d. Sia $\varphi(X, Y, Z)$ un polinomio omogeneo di grado $d - 3$. Consideriamo gli aperti

$$\begin{aligned} U_0 &= \{[X, Y, Z] \in C \mid X \neq 0\} \\ U_1 &= \{[X, Y, Z] \in C \mid Y \neq 0\} \\ U_2 &= \{[X, Y, Z] \in C \mid Z \neq 0\} \ . \end{aligned}$$

Poniamo $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$, $u = \frac{X}{Y}$, $v = \frac{Z}{Y}$, $\xi = \frac{Y}{X}$, $\eta = \frac{Z}{X}$. Definiamo

$$\omega_{U_2} = \frac{\varphi(x, y, 1)dx}{\frac{\partial}{\partial y}F(x, y, 1)} \ , \ \omega_{U_1} = \frac{-\varphi(u, 1, v)du}{\frac{\partial}{\partial v}F(u, 1, v)} \ , \ \omega_{U_0} = \frac{\varphi(1, \xi, \eta)d\xi}{\frac{\partial F}{\partial \eta}(1, \xi, \eta)}$$

mostriamo che ω_{U_i} è C^∞ in U_i. Consideriamo ω_{U_2} (per ω_{U_1} e ω_{U_0} si ragiona analogamente). Poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, 1)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, 1)dy = 0 \ , \quad (x, y, 1) \in U_2 \ .$$

si ha:

$$\omega_{U_2} = \frac{\varphi dx}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{\varphi dy}{\frac{\partial F}{\partial y}} \ ,$$

Essendo C non-singolare, si ha

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,1),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,1),\ F(x,y,1)\right) \neq (0,0,0)$$

Dal momento che x e y sono funzioni C^∞ in U_2 si ha che ω_{U_2} è C^∞ in U_2. Ora dimostriamo che

$$\omega_{U_2}|_{U_2\cap U_1} = \omega_{U_1}|_{U_2\cap U_1}\ ,$$

(le altre coppie di intersezioni, $U_0 \cap U_2$ e $U_1 \cap U_0$ si trattano in modo analogo). In $U_2 \cap U_1$ si ha $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{1}{y}$, dunque

$$\begin{aligned}
\omega_{U_1|_{U_2\cap U_1}} &= \frac{\varphi(u,1,v)dv}{\frac{\partial}{\partial u}F(u,1,v)} \\
&= \frac{\varphi\left(\frac{x}{y},1,\frac{1}{y}\right)d\left(\frac{1}{y}\right)}{y\frac{\partial}{\partial x}F\left(\frac{x}{y},1,\frac{1}{y}\right)} \\
&= \frac{-y^{-d+3}\varphi(x,y,1)}{y^{-d+1}\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,1)}y^{-2}dy \\
&= \frac{-\varphi(x,y,1)dy}{\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,1)} = \omega_{U_2|_{U_2\cap U_1}}\ ,
\end{aligned}$$

dove si usa il fatto che se $u = x/y$, allora

$$\frac{\partial}{\partial u}f(u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)(u)$$

In conclusione le ω_{U_i} definiscono una 1–forma ω C^∞ su C.

Esercizi.

1. Dimostrare che sul toro T_n si può definire un campo vettoriale mai nullo.

2. Dimostrare che sulla sfera S^2 non si può definire un campo vettoriale mai nullo.
3. Dimostrare che sulla sfera S^n non si può definire un campo vettoriale mai nullo se e solo se n è dispari.
4. Sia C una curva piana, proiettiva, non-singolare definita dall'annullarsi di un polinomio omogeneo di grado d. Trovare $(d-1)(d-2)/2$ 1-forme differenziali linearmente indipendenti in $\mathcal{E}^1(C)$.

8 Il complesso di de Rham e il lemma di Poincaré

Le forme differenziali e i relativi operatori differenziali formano il cosiddetto *complesso di de Rham*:

$$\cdots \to \mathcal{E}^k(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{k+2}(M) \to \dots \ .$$

Si definisce lo spazio vettoriale delle k*–forme chiuse*:

$$Z^k_{dR}(M) = \{\omega \in \mathcal{E}^k(M) \mid d\omega = 0\}$$

e quello delle k*–forme esatte*:

$$B^k_{dR}(M) = \{\omega \in \mathcal{E}^k(M) \mid \omega = d\varphi \ , \quad \varphi \in \mathcal{E}^{k-1}(M)\} \ .$$

Poiché $d^2 = 0$ si ha: $B^k_{dR}(M) \subset Z^k_{dR}(M)$. Si definisce il k*–simo gruppo* (spazio vettoriale) *di coomologia di de Rham* come il quoziente delle k–forme chiuse modulo le k–forme esatte:

$$H^k_{dR}(M) = Z^k_{dR}(M)/B^k_{dR}(M) \ .$$

Data una applicazione C^∞

$$F : M \to N$$

consideriamo l'omomorfismo indotto

$$F^* : \ \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M) \ .$$

Poiché $F^*d = dF^*$, l'operatore F^* porta forme chiuse in N in forme chiuse in M, forme esatte in N in forme esatte in M, e dunque induce un omomorfismo (che denotiamo ancora un F^*)

$$F^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M) \ .$$

Se $G : N \to L$ è un'altra applicazione C^∞ , si ha, a livello di k–forme, $(GF)^* = F^*G^*$ e dunque si ha anche a livello di coomologia di de Rham

$$F^*G^* = (GF)^* : H^k_{dR}(L) \to H^k_{dR}(M) \ .$$

È anche evidente che

$$(1_M)^* = 1_{H^k_{dR}}(M) \ .$$

In conclusione si può dire che il k–simo gruppo di coomologia di de Rham è un funtore controvariante dalla categoria delle varietà differenziali e quella degli spazi vettoriali (reali). Accanto alle k–forme differenziali reali $\mathcal{E}^k(M)$ si può considerare il $\mathbb{C}$–vettoriale delle k–forme *differenziali complesse* $\mathcal{E}^k(M;\mathbb{C})$. Localmente una k–forma differenziale complessa è della forma $\omega = \sum f_I dx_I$ dove le f_I sono funzioni C^∞ *a valori complessi*. Si definisce anche il complesso de Rham delle k–forme complesse

$$\cdots \to \mathcal{E}^k(M;\mathbb{C}) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{k+1}(M;\mathbb{C}) \to \dots$$

e si denota col simbolo $H^k_{dR}(M;\mathbb{C})$ il k–esimo gruppo di coomologia di questo complesso. In questa sezione calcoleremo i gruppi di coomologia di de Rham di $\mathbb{R}^n$ e più in generale di un aperto stellato di $\mathbb{R}^n$. Un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ si dice *stellato* rispetto a un suo punto p, se per ogni punto $q \in U$ il segmento $\overline{pq}$ è contenuto in U:

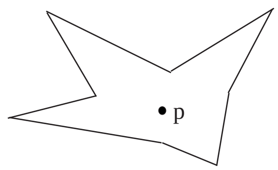

Figura 8

Sia dunque U un insieme stellato rispetto a un suo punto p che supporremo essere l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo il complesso di de Rham

$$\cdots \to \mathcal{E}^k(U) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{k+1}(U) \to \dots$$

Costruiremo un operatore

$$T: \ \mathcal{E}^k(U) \to \mathcal{E}^{k-1}(U)$$

tale che per ogni $\omega \in \mathcal{E}^k(U)$

$$\omega = dT\omega + Td\omega \ . \tag{8.1}$$

Da ciò seguirà che, in U, ogni k–forma ω chiusa è anche esatta: $\omega = dT\omega$ e che dunque

$$H^k_{dR}(U) = 0 \ , \quad k > 0 \ . \tag{8.2}$$

Questo risultato prende il nome di *Lemma di Poincaré*. Esso può essere completato con l'ovvia osservazione che, essendo un aperto stellato connesso, si ha $H^0_{dR}(U) \cong \mathbb{R}$. Costruiamo dunque l'operatore T. Sia

$$\omega = \sum f_I dx_I \in \mathcal{E}^k(U)$$

dove $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Basterà, per linearità, definire l'operatore T per una forma ω del tipo $\omega = f dx_I$ e dimostrare per questa la (8.1). Poniamo

$$T\omega = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx) \right) x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_{i_\alpha} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ .$$

Dimostriamo la (8.1). Si ha

$$\begin{aligned} dT\omega &= k\biggl(\int_0^1 t^{k-1} f(tx) \biggr) dx_I \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \right) x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_{i_\alpha} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ . \end{aligned}$$

Si ha poi:

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$$

e dunque

$$\begin{aligned} T(d\omega) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \right) x_j dx_I + \\ &- \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \right) x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ . \end{aligned}$$

Sommando si cancellano le somme doppie e si ottiene

$$\begin{aligned} dT\omega + Td\omega &= k(\int_0^1 t^{k-1} f(tx)) dx_I + \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \right) dx_I \\ &= \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} [t^k f(tx)] \right) dx_I \\ &= f dx_I = \omega \ . \end{aligned}$$

Q.E.D.

Esercizi

1. Verificare che la forma $\omega = -ydx + xdy$ definita su $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è chiusa, ma non esatta.

2. Sia M una varietà differenziabile, dimostrare che se $\phi \in \mathcal{E}^k(M)$ e $\psi \in \mathcal{E}^q(M)$ sono forme chiuse , allora
   a) $\psi \wedge \phi$ è una forma chiusa.
   b) se ψ è una forma esatta, allora anche $\psi \wedge \phi$ lo è.

3. Verificare quali delle seguenti forme differenziali definite su $\mathbb{R}^3$ sono esatte o chiuse quando vengono ristrette a S^2
   a)$x^2dx + xydy + xzdz$
   b)$xdy - ydx$
   c)$zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$

9 Integrazione delle k-forme differenziali sulle k-catene

Sia M una varietà differenziale. Consideriamo un k–simplesso singolare

$$\sigma : \Delta_k \to M \ .$$

D'ora in poi assumeremo che σ sia la restrizione a Δ_k di una applicazione C^∞ definita in un intorno di Δ_k. Diremo allora che σ è un *k–simplesso singolare* C^∞. Dato un anello commutativo con unità A definiremo le k–catene singolari C^∞ a valori in A ponendo

$$\begin{aligned} C_k^\infty(M,A) \quad &= \quad \{c = \sum_{i=1}^n a_i\sigma_i \in C_k(M,A) \mid \\ &\qquad \sigma_i \text{ è un } k\text{–simplesso singolare } C^\infty \} \ . \end{aligned}$$

È del tutto ovvio che l'operatore di bordo ∂ porta k–catene singolari C^∞ in $(k-1)$–catene singolari C^∞. Si ha dunque un complesso

$$\cdots \to C_k^\infty(M,A) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}^\infty(M,A) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

la cui omologia denoteremo con il simbolo $H_k^\infty(M,A)$. Ora non è difficile dimostrare che $H_k^\infty(M,A) \cong H_k(M,A)$. Non daremo la dimostrazione di questo fatto, la lasceremo come esercizio. Nell'esercizio, si supporrà, per semplicità, che la varietà sia di tipo finito e si tratterà di dimostrare che ogni catena singolare è omologa a una catena singolare C^∞. Per questo basterà dimostrare che ogni simplesso singolare σ è omologo a un simplesso singolare C^∞. (L'idea è di suddividere baricentricamente σ in modo che ogni simplesso della suddivisione vada a finire in una carta locale di M e di effettuare l'approssimazione C^∞ nelle carte locali). Dunque, d'ora in poi noi identificheremo $H_k(M,A)$ con $H_k^\infty(M,A)$ e lavoreremo con catene singolari C^∞.

Dato un k–simplesso singolare C^∞ in M

$$\sigma : \Delta_k \to M$$

e una k–forma differenziale $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ definiamo l'*integrale di ω su σ* ponendo

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_k} \sigma^*\omega \ .$$

Si tratta di definire l'integrale a destra del segno di eguaglianza. Ora $\sigma^*\omega$ è una k–forma differenziale definita in un intorno di $\Delta_k \subset \mathbb{R}^k$. Se $x_1, \ldots, x_k$ sono coordinate in $\mathbb{R}^k$ esiste un *unico* modo di scrivere $\sigma^*\omega$ nella forma

$$\sigma^*\omega = f(x_1, \ldots, x_k)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \ . \tag{9.1}$$

Per definizione poniamo

$$\int_{\Delta_k} \sigma^*\omega = \int_{\Delta_k} f \ . \tag{9.2}$$

Data una k–catena singolare C^∞ a valori reali $c = \sum k_i \sigma_i \in C_k^\infty(M, \mathbb{R})$ definiamo l'integrale di ω su c ponendo

$$\int_c \omega = \sum k_i \int_{\sigma_i} \omega \ .$$

Vogliamo ora dimostrare una prima versione del teorema di Stokes.

Teorema 9.1 (di Stokes, 1ª versione) *Sia M una varietà differenziabile, sia $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(M)$ una $(k-1)$-forma e $c \in C_k^\infty(M, \mathbb{R})$ una k–catena singolare C^∞ a coefficienti reali. Allora*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega \ .$$

Dim. Scriviamo $c = \sum k_i \sigma_i$, poiché sia l'integrale, che l'operatore di bordo sono lineari, basta dimostrare che dato un k–simplesso singolare, $\sigma : \Delta \to M$ si ha

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\partial \sigma} \omega \ .$$

Ora, da una parte abbiamo

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\Delta_k} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta_k} d\sigma^* \omega \ .$$

Dall'altra:

$$\int_{\partial \sigma} \omega = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{\sigma j_s} \omega = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{\Delta_{k-1}} j_s^* \sigma^* \omega.$$

Dunque noi dobbiamo dimostrare che, data una $(k-1)$–forma differenziale φ definita in un intorno di Δ_k, si ha:

$$\int_{\Delta_k} d\varphi = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{\Delta_{k-1}} j_s^* \varphi \ . \tag{9.3}$$

Scriviamo

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \ .$$

Per linearità possiamo assumere che

$$\varphi = f dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k$$

e dimostrare la (9.3) in questo caso. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_k} d\varphi &= \int_{\Delta_k} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \qquad (9.4)\\
&= \int_{\Delta_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k\\
&= (-1)^{i-1} \int_{\Delta_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k\\
&= (-1)^{i-1} \int_{\Delta_{k-1}} [f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1 - \sum_{j \neq i} x_j, x_{i+1}, \ldots, x_k) -\\
&- f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_k)]\ .
\end{aligned}$$

D'altro canto:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{\Delta_{k-1}} j_s^* \varphi = \qquad (9.5)\\
&\int_{\Delta_{k-1}} f(1 - \Sigma y_i\ ,\ y_1, \ldots, y_{k-1})(-dy_{i-1}) \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy}_{i-1} \wedge \cdots \wedge dy_{k-1} +\\
&(-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} f(y_1, \ldots, y_{i-1}, 0, y_i, \ldots, y_{k-1}) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{k-1} =\\
&(-1)^{i-1} \int_{\Delta_{k-1}} f(1 - \Sigma y_i\ ,\ y_1, \ldots, y_{k-1}) + (-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} f(y_1 \ldots y_{i-1}, 0, y_i, \ldots, y_{k-1}).
\end{aligned}$$

Ricordiamo a questo punto la formula di cambiamento di parametro nell'integrale. Se $U \subset \mathbb{R}^k$ è un dominio e $F : U \to F(U)$ un diffeomorfismo allora

$$\int_{F(U)} f = \int_U |J_F| f \circ F \qquad (9.6)$$

dove $|J_F|$ è il valore assoluto del determinante Jacobiano di F. Ritornando alla dimostrazione della (9.3), consideriamo l'omeomorfismo

$$F : \Delta_{k-1} \to \Delta_{k-1}$$

$$(y_1, y_2 \ldots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1} \ldots, y_{k-1}) \mapsto (y_2, y_3 \ldots, y_i, 1 - \Sigma y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{k-1})\ .$$

Poiché $|J_F| = 1$ si ha

$$\int_{\Delta_{k-1}} f(1 - \Sigma y_i\ ,\ y_1, \ldots, y_{k-1}) = \int_{\Delta_{k-1}} f(y_1, \ldots, y_i\ , 1 - \Sigma y_i\ ,\ y_{i+1}, \ldots, y_{k-1})\ .$$

Questo mostra che la (9.4) e la (9.5) sono uguali e dunque vale la (9.3). Ciò conclude la dimostrazione del teorema di Stokes.

Il teorema di Stokes ci consente di paragonare l'omologia singolare con la coomologia di de Rham. Più precisamente definiamo un omomorfismo

$$I : H_k^\infty(M) \to H_{dR}^k(M)^*$$

(qui indichiamo con V^* il duale di V) ponendo

$$[c] \to \left\{[\omega] \mapsto \int_c \omega\right\}$$

dove $[c]$ è la classe di un ciclo c mentre $[\omega]$ è la classe di una k–forma chiusa ω. Per mostrare che la definizione è ben posta basta mostrare che

$$\int_c \omega = \int_{c+\partial\gamma} (\omega + d\varphi)$$

e cioè che la definizione non dipende dai rappresentanti delle classi. Infatti per il teorema di Stokes

$$\begin{aligned}\int_{c+\partial\gamma} (\omega + d\varphi) &= \int_c \omega + \int_{\partial\gamma} \omega + \int_c d\varphi + \int_{\partial c} d\varphi \\ &= \int_c \omega + \int_\gamma d\omega + \int_{\partial c} \varphi + \int_c d^2\varphi = \int_c \omega\end{aligned}$$

essendo $d\omega = 0$ e $\partial c = 0$.

Nella prossima sezione dimostreremo che se M è una varietà abbastanza buona, allora I è un isomorfismo. Questo è il teorema di de Rham. Da questo teorema segue che i gruppi di coomologia di de Rham, che a priori sono solo invarianti per diffeomorfismi, sono in effetti invarianti omotopici. Con esso si riescono a esprimere, in modo organizzato, le ostruzioni topologiche a risolvere una equazione differenziale del tipo: $d\omega = \alpha$.

Esercizi

1. Sia M una varietà sia di tipo finito dimostrare che ogni catena singolare è omologa a una catena singolare C^∞.

2. Consideriamo la 1–forma

$$\omega = (x^2 + 4y)dx + (-2x + y sin \pi y^2)dy$$

definita in $\mathbb{R}^2$. Calcolarne l' integrale lungo il ciclo $\gamma = \partial\Delta_2$.

3. Sia

$$\omega = (2x + y cos xy)dx + (x cos xy)dy$$

definita in $\mathbb{R}^2$. Calcolarne l' integrale lungo il ciclo $\gamma = \partial\Delta_2$.

10 Il teorema di De Rham

Sia M una varietà differenziale. Riprendiamo l'applicazione lineare:

$$\begin{aligned} I : H_k^\infty(M, \mathbb{R}) &\to H^k_{dR}(M)^* \\ c &\mapsto \left\{\omega \mapsto \int_c \omega\right\}. \end{aligned}$$

Molto spesso, componendo I con l' isomorfismo tra $H_k(M,\mathbb{R})$ e $H_k^\infty(M,\mathbb{R})$, ometteremo di scrivere il suffisso ∞ nell'omologia singolare. Dimostriamo come prima cosa l'esistenza di una successione di Mayer–Vietoris per la coomologia di de Rham. Siano dunque U e V due aperti in M tali che $M = U \cup V$. Consideriamo la successione

$$0 \to \mathcal{E}^k(M) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}^k(U) \oplus \mathcal{E}^k(V) \xrightarrow{\beta} \mathcal{E}^k(U\cap V) \to 0$$

definita da

$$\alpha(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)\ , \quad \beta(\omega,\varphi) = \omega|_{U\cap V} - \varphi|_{U\cap V}\ .$$

Verifichiamo che questa è una successione esatta. Che α si a iniettiva e che $ker\beta = Im\alpha$ è ovvio. Per verificare che β è suriettiva si prende una partizione dell'unità $\{\rho_U, \rho_V\}$ relativa al ricoprimento $\{U,V\}$. Sia $\omega \in \mathcal{E}^0(U\cap V)$. Definiamo $\omega_U \in \mathcal{E}^0(U)$ e $\omega_V \in \mathcal{E}^0(V)$ ponendo

$$\omega_U = \begin{cases} \rho_V\omega, & \text{in } U\cap V \\ 0, & \text{in } U\setminus U\cap V \end{cases}\ , \qquad \omega_V = \begin{cases} -\rho_U\omega\ , & \text{in } U\cap V \\ 0, & \text{in } V\setminus U\cap V\ . \end{cases} \tag{10.1}$$

È allora chiaro che

$$\omega = \omega_U|_{U\cap V} - \omega_V|_{U\cap V}$$

e dunque β è suriettiva. In effetti α e β sono omomorfismi di complessi, nel senso che il diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{E}^k(M) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & \mathcal{E}^k(U)\oplus\mathcal{E}^k(V) \arrow[r] \arrow[d, "{(d,d)}"'] & \mathcal{E}^k(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{E}^{k+1}(M) \arrow[r] & \mathcal{E}^{k+1}(U)\oplus\mathcal{E}^{k+1}(V) \arrow[r] & \mathcal{E}^{k+1}(U\cap V) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commuta, per ogni k. Dai lemmi di algebra omologica dimostrati nel Cap. 3 segue che vi è una successione esatta lunga, detta di Mayer–Vietoris:

$$\to H^k_{dR}(M) \xrightarrow{\alpha} H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V) \xrightarrow{\beta} H^k_{dR}(U\cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}_{dR}(M) \to \dots$$

dove

$$\alpha([\omega]) = ([\omega|_U], [\omega|_V])\,, \qquad \beta([\omega],[\varphi]) = [\omega|_{U\cap V} - \varphi|_{U\cap V}]\,,$$

mentre, per definire δ, si deve ricordare il procedimento generale che fa passare da una successione esatta corta di complessi e una successione esatta lunga in (co)omologia. Nel nostro caso, data una classe $[\omega] \in H^k_{dR}(U\cap V)$, dove ω è una forma chiusa in $U\cap V$, si definiscono ω_U e ω_V come in (9.1). Consideriamo

$$(d\omega_U, d\omega_V) \in \mathcal{E}^{k+1}(U) \oplus \mathcal{E}^{k+1}(V)\ .$$

Poiché $d\omega_{U|_{U\cap V}} - d\omega_{V|_{U\cap V}} = d\omega = 0$, esiste una forma $\varphi \in \mathcal{E}^k(M)$ tale che $\varphi|_U = d\omega_U$ e $\varphi|_V = d\omega_V$. La forma φ è chiusa e si pone:

$$\delta([\omega]) = [\varphi] \ . \tag{10.2}$$

Ci sarà utile il seguente Lemma.

Lemma 10.1 *Sia M una varietà differenziale. Siano U e V due aperti in M tali che $U \cup V = M$. Allora vi è un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_k(U\cap V) & \xrightarrow{a} & H_k(U)\oplus H_k(V) & \xrightarrow{b} & H_k(M) & \xrightarrow{\underline{\partial}} & H_k(U\cap V) & \longrightarrow \cdots \\
 & \Big\downarrow{\scriptstyle I} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (I,I)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle I} & & \Big\downarrow{\scriptstyle I} & \\
\cdots \longrightarrow & H^k_{dR}(U\cap V)^* & \xrightarrow{\beta^*} & H^k_{dR}(U)^*\oplus H^k_{dR}(V)^* & \xrightarrow{\alpha^*} & H^k_{dR}(M)^* & \xrightarrow{\delta^*} & H^{k-1}(U\cap V)^* & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

dove $a, b, \underline{\partial}$ sono le applicazioni che definiscono la successione di Mayer–Vietoris in omologia, mentre α^*, β^* e δ^* sono le trasposte di α, β e δ.

Dim. Si tratta di considerare i tre quadrati. Si ha

$$\begin{aligned}
\beta^*(I(c))(\omega,\psi) &= I(c)\beta(\omega,\psi) \\
&= I(c)(\omega|_{U\cap V} - \psi|_{U\cap V}) \\
&= \int_c \omega|_{U\cap V} - \psi|_{U\cap V} \\
&= \int_c \omega - \int_c \psi \quad \text{(poiché } c \in Z_k(U\cap V)) \\
&= (I,I)(c,c)(\omega,\psi) \\
&= (I,I)a(c)(\omega,\psi) \ .
\end{aligned}$$

Il secondo quadrato si tratta in modo completamente analogo. Consideriamo il terzo. La definizione di δ è data dalla (10.2). Ricordiamo la definizione di $\underline{\partial}$. Se $c \in Z_k(M)$ si scrive, tramite una suddivisione baricentrica, $c = c_U + c_V$. Poiché $\partial c = 0$, si ha $\partial c_U = -\partial c_V$ cosicché, in particolare, $\partial c_U \in Z_{k-1}(U\cap V)$, e si ha

$\underline{\partial} c = \partial c_U$. Ora

$$\begin{aligned} I(\underline{\partial}(c))(\omega) &= \int_{\underline{\partial} c} \omega \\ &= \int_{\partial c_U} \omega \\ &= \int_{\partial c_U} \omega_{U|_{U\cap V}} - \omega_{V|_{U\cap V}} \\ &= \int_{\partial c_U} \omega_{U|_{U\cap V}} - \int_{-\partial c_V} \omega_{V|_{U\cap V}} \\ &= \int_{c_U} d\omega_U + \int_{c_V} d\omega_V \\ &= \int_{c_U} \varphi|_U + \int_{c_V} \varphi|_V \\ &= \int_c \varphi \\ &= \int_c \delta\omega \\ &= \delta^* Ic(\omega) \ . \end{aligned}$$

Q.E.D.

D'ora in poi, in questa sezione restringeremo la nostra attenzione alle varietà di tipo finito. Una *varietà di tipo finito* è una varietà M che può ricoprirsi con un numero finito di aperti $U_1, \ldots, U_m$ tali che ogni intersezione $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$, se non vuota, è diffeomorfa a un aperto stellato di $\mathbb{R}^d$, $d = \dim M$. Ricordiamo che il lemma di Poincaré ci dice che se U è un aperto stellato di $\mathbb{R}^d$ allora:

$$H_k(U, \mathbb{R}) \cong H^k_{dR}(U) \cong \begin{cases} \mathbb{R} \ , & k = 0 \\ 0 \ , & k > 0 \ . \end{cases}$$

Dimostriamo che se M è di tipo finito allora gli $H_k(M, \mathbb{R})$ sono finito–dimensionali. Procediamo per induzione nel numero degli aperti del ricoprimento che rende M di tipo finito. Se vi è un solo aperto, M stesso è stellato e non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo di aver dimostrato il risultato per quelle varietà M che sono unione di $n-1$ aperti a mutua intersezione stellata. Supponiamo che $M = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ e che $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{I_k}$, se non vuoto, sia stellato. Poniamo

$$U = U_1 \ , \quad V = U_2 \cup \cdots \cup U_n \ ,$$

e osserviamo che U, V e $U \cap V$ sono di tipo finito e soddisfano l'ipotesi induttiva, e che quindi $H_k(U)$, $H_k(V)$ e $H_k(U \cap V)$ sono finito–dimensionali. Dalla successione di Mayer Vietoris segue che anche $H_k(M)$ è finito–dimensionale. Esempi

di varietà di tipo finito sono le varietà triangolabili compatte in cui si prendono come aperti del ricoprimento le stelle dei vertici della triangolazione. La stella di un vertice v è l'interno dell'unione di tutti i triangoli che hanno v come vertice:

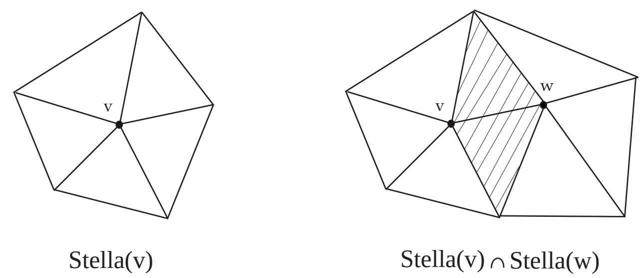

Figura 9

Un esempio di varietà che *non* è di tipo finito è $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Z}$. In effetti, se $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Z}$ fosse di tipo finito si avrebbe $\dim H^1(\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Z}, \mathbb{R}) < \infty$,mentre $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Z}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \ldots$).

Siamo ora in grado di enunciare il teorema di de Rham.

Teorema 10.2 (di de Rham) *Sia M una varietà di tipo finito allora*

$$I : H_k^\infty(M, \mathbb{R}) \to H_{dR}^k(M)$$

è un isomorfismo, $\forall\, k \geq 0$.

Dimostrazione. Si procede, come sopra, per induzione sul numero degli aperti di un ricoprimento che rende M di tipo finito. Il caso $n = 1$ si riduce alla Lemma di Poincaré, (8.2). Supponiamo il risultato vero per le varietà che sono unione di $n-1$ aperti a mutua intersezione stellata. Sia $M = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ e supponiamo che $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$, se non vuoto, sia stellato. Scriviamo $U = U_1$, $V = U_2 \cup \cdots \cup U_n$. Le ipotesi induttive valgono per U, V e $U \cap V$. A questo punto si conclude guardando il diagramma del lemma (10.1), usando l'induzione e il Lemma dei cinque.

Q.E.D.

Esercizi

1. Dimostrare che il teorema di de Rham è valido anche quando esiste un ricoprimento finito con $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ unione disgiunta di un numero finito di aperti stellati.

2. Sia U un aperto stellato in $\mathbb{R}^n$ e X una varietà arbitraria, verificare che $H_{dR}^k(U \times X)$ è isomorfo a $H_{dR}^k(X)$.

3. Usando l'applicazione antipodale verificare che $H_{dR}^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = 0$, per $k \neq 0$, ad eccezione di quando n è dispari, nel qual caso $H_{dR}^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{R}$.

11 Orientazione e integrazione sulle varietà orientate

Introduciamo innanzitutto il concetto di orientazione.

Definizione 11.1 *Sia M una varietà differenziabile. Si dice che M è orientabile se è possibile introdurre in M un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tale che, in $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, il determinante dello jacobiano $J_{\alpha\beta}$ di $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$ sia positivo. La varietà M si dirà orientata una volta che si è scelto su M un atlante massimale che goda della suddetta proprietà. Le carte di questo atlante si dicono positivamente orientate.*

Lemma 11.2 *Una varietà n-dimensionale M è orientabile se e solo se esiste una forma differenziale $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ tale che $\omega(p) \neq 0$, $\forall p \in M$.*

Dim. Supponiamo M orientabile e sia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante con $\det(J_{\alpha\beta}) > 0$, per ogni α e β tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$. Siano $x_1, \ldots, x_n$ coordiate in $\mathbb{R}^n$ e scriviamo $x_i^\alpha = x_i \circ \varphi_\alpha$. Sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. Si definisca

$$\mu = \sum_\alpha \rho_\alpha \, dx_1^\alpha \wedge \cdots \wedge dx_n^\alpha \ .$$

Per calcolare $\mu(p)$ si supponga $p \in U_\beta$. Allora

$$\mu|_{U_\beta} = \left(\sum_\alpha \rho_\alpha \ \det(J_{\alpha\beta}) \right) dx_1^\beta \wedge \cdots \wedge dx_n^\beta \ .$$

Poiché $(\rho_\beta \det J_{\alpha\beta})(p) = 1$, si ha che $(\sum \rho_\alpha \ \det \ J_{\alpha\beta}(p) > 0$, e dunque $\mu(p) \neq 0$. Viceversa data una $\mu \in \mathcal{E}^n(M)$ con $\mu(p) \neq 0$, per ogni $p \in M$, si costruisce un atlante $\{(U, \varphi_\alpha)\}$ includendo in esso solo quelle carte per cui

$$\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right) > 0 \ .$$

Scrivendo μ localmente

$$\mu = f_\alpha \, dx_1^\alpha \wedge \cdots , \wedge dx_n^\alpha \, ,$$

ciò equivale a dire che $f_\alpha > 0$. D'altro canto in $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha $f_\alpha = (\det \ J_{\alpha\beta}) f_\beta$ e dunque $\det(J_{\alpha\beta}) > 0$.

Q. E. D.

Definizione 11.3 *Siano M e N due varietà orientate della stessa dimensione n. Sia μ (risp. ν) una n-forma in M (risp. N) che definisce l'orientazione su M (risp. N). Sia $F : M \to N$ una applicazione C^∞. Si dice che F conserva l'orientazione se $F^*\nu = f\mu$ con $f \in \mathcal{E}^0(M)$ e ovunque positiva.*

Come abbiamo già ricordato, se $F : A \to F(A) = B$ è un diffeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$ allora

$$\int_{F(A)} f = \int_A |\det(J_F)| f \circ F \tag{11.1}$$

dove J_F è la matrice jacobiana di F. Ora data una n-forma ω in $\mathbb{R}^n$ vi è un unico modo di scriverla nella forma

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

e, per definizione si pone

$$\int_A \omega = \int_A f$$

così, la formula (11.1) può riscriversi

$$\int_{F(A)} \omega = \pm \int_A F^*\omega \tag{11.2}$$

dove va preso il segno + se F conserva l'orientazione e il segno − se la inverte. Vogliamo ora introdurre la nozione di *dominio regolare* in una varietà orientata.

Si intende con ciò un aperto connesso $G \subseteq M$ avente la seguente proprietà. Per ogni punto $p \in \partial G$ esiste una carta locale (positivamente orientata)

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

con $\varphi(p) = 0$ e con

$$G \cap U = \varphi^{-1}\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

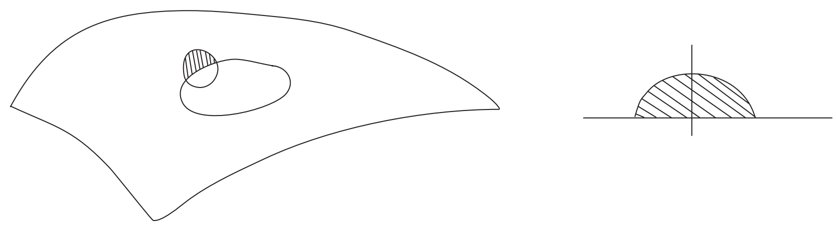

Figura 10

In particolare gli omeomorfismi

$$\varphi' = \varphi|_{\partial G} : \partial G \cap U \to \varphi(\partial G \cap U) \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

costituiscono un atlante per una struttura differenziabile su ∂G che così diventa una varietà $(n-1)$-dimensionale. È anche chiaro che se ψ è un'altra carta di M intorno a un punto $p \in \partial D$, del tipo sopra descritto, e se

$$\psi\varphi^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n))$$

allora $F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$ e $(\partial F_n/\partial x_n)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) > 0$. Ne segue che la matrice jacobiana di $\psi\varphi^{-1}$ quando ristretta e $x_n = 0$ ha la forma

$$J = \begin{pmatrix} & & & * \\ & J' & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Dunque J', che è lo jacobiano di $\psi|_{\partial G}(\varphi|_{\partial G})^{-1}$, ha determinante positivo, e quindi l'atlante che definisce la struttura differenziale su ∂G ne definisce anche una orientazione. Ebbene, se n è pari prenderemo questa come orientazione del bordo ∂G, se invece n è dispari, prenderemo l'orientazione opposta.

Naturalmente una varietà compatta è un dominio regolare con bordo vuoto. Vogliamo ora definire l'integrale esteso a una regione regolare $G \subseteq M$, di una n-forma $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ a supporto compatto. Definiremo *n-simplesso regolare orientato* un diffeomorfismo orientato σ tra un aperto U in $\mathbb{R}^n$ contenente l'n-simplesso standard Δ_n e un aperto $\sigma(U)$ di M.

$$\Delta_n \subset U \xrightarrow{\sigma} \sigma(U) \subseteq M$$

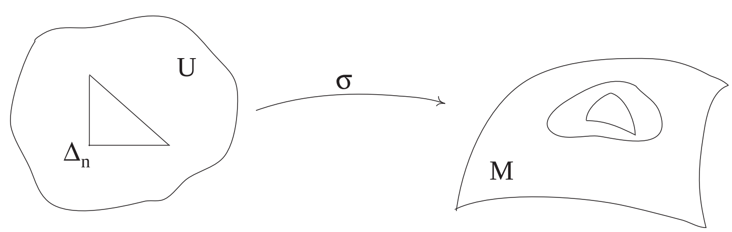

Figura 11

Dato un dominio regolare $G \subseteq M$ considereremo tutti gli n-simplessi regolari orientati σ tali che $\sigma(\Delta_n) \subset G$, oppure tali che $\sigma(\Delta_n) \subset \overline{G}$ e $\sigma(\Delta_n) \cap \partial G = \sigma j_n(\Delta_{n-1})$. Per ogni simplesso del primo tipo prendiamo gli aperti U contenenti nell'interno di $\sigma(\Delta_n)$. Per ogni simplesso del secondo tipo prendiamo gli aperti U del tipo $\sigma(V)$, dove V è un piccolo intorno di un punto della n-sima faccia di Δ_n che incontra il bordo di Δ_n solo in quella faccia e tale che $\sigma(V) \subset \sigma(\Delta_n) \cup M \setminus G$

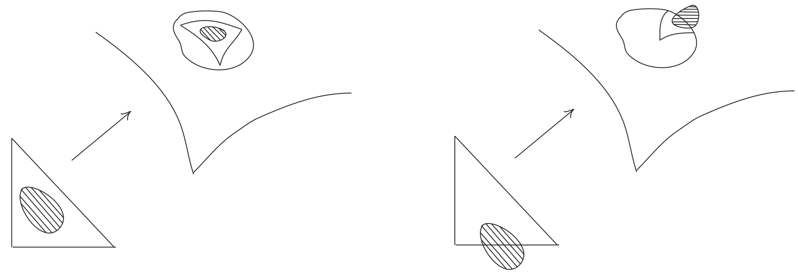

Figura 12

Sia ora $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ una n-forma a supporto compatto. Ricopriamo $\mathrm{supp}(\omega) \cap G$ con un numero finito di aperti $U_1, \ldots, U_h$ del tipo sopra descritto, e poniamo $U_0 = M \setminus \overline{\mathrm{supp}\,\omega \cap G}$. Per costruzione gli aperti $U_1, \ldots, U_h$ sono associati ad altrettanti simplessi regolari orientati $\sigma_1, \ldots, \sigma_h$. Sia $\{\rho_i\}$ una partizione dell'unità relativa al ricoprimento $\{U_i\}$. Definiamo

$$\int_G \omega = \sum_{i=1}^{h} \int_{\sigma_i} \rho_i \omega \ . \tag{11.3}$$

Dimostriamo che questa definizione non dipende dalle scelte fatte. Supponiamo che $V_0, V_1, \ldots, V_k$ sia un altro ricoprimento dello stesso tipo. Siano $\tau_1, \ldots, \tau_k$ i relativi k-simplessi regolari orientati, e sia $\{\lambda_j\}$ una partizione dell'unità associato al ricoprimento $\{V_j\}$. Si ha

$$\sum_{i=1}^{h} \int_{\sigma_i} \rho_i \omega = \sum_{i=1}^{h} \int_{\sigma_i} \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \right) \rho_i \omega = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} \int_{\sigma_i} \lambda_j \rho_i \omega \ .$$

In modo simile si ottiene

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\tau_i} \lambda_j \omega = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} \int_{\tau_j} \lambda_j \rho_i \omega \ .$$

D'altro canto, essendo σ_i e τ_j positivamente orientati, per la (11.2), si ha

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_i} \lambda_j \rho_i \omega &= \int_{\Delta_n} \sigma_i^*(\lambda_j \rho_i \omega) \\ &= \int_{(\sigma_i^{-1} \tau_j)\Delta_n} \sigma_i^*(\lambda_j \rho_i \omega) \\ &= \int_{\Delta_n} (\sigma_i^{-1} \tau_j)^* \sigma_i^*(\lambda_j \rho_i \omega) \\ &= \int_{\Delta_n} \tau_j^*(\lambda_j \rho_i \omega) \end{aligned}$$

Dunque la definizione (11.3) è ben posta. Possiamo ora dimostrare la seconda versione del teorema di Stokes

Teorema 11.4 (di Stokes, seconda versione)*Sia M una varietà differenziale orientata di dimensione n. Sia $G \subseteq M$ una regione regolare. Sia $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$ a supporto compatto. Allora*

$$\int_G d\omega = \int_{\partial D} \omega \ .$$

Dim. Siano $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ scelti come nella formula (11.3). Si osservi che, per costruzione, $\rho_0 \equiv 0$ in un intorno di $\operatorname{supp} \omega \cap G$ e dunque $\sum_{i=1}^k \rho_i = 1$ in un intorno di $\operatorname{supp} \omega \cap G$. In un tale intorno si ha

$$d\omega = \sum_{i=1}^{k} d(\rho_i \omega).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_G d\omega &= \sum_{i=1}^{k} \int_G d(\rho_i \omega) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\sigma_i} d(\rho_i \omega) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial \sigma_i} \rho_i \omega \ . \end{aligned} \tag{11.4}$$

Supponiamo ora che σ_i sia un simplesso tale che $\sigma_i(\Delta_n) \subset G$, poiché $\operatorname{supp}(\rho_i \omega) \subset \operatorname{Int}(\sigma_i(\Delta_n))$ si ottiene

$$\int_{\partial \sigma_i} \rho_i \omega = 0 \ . \tag{11.5}$$

Supponiamo ora che σ_i sia del secondo tipo e che cioè $\sigma_i j_n(\Delta_n) \subset \partial G$. Si osservi che, per come si è deciso di orientare ∂G, se n è pari $\sigma_i j_n$ conserva l'orientazione mentre la inverte se n è dispari. Dunque

$$\int_{\partial \sigma_i} \rho_i \omega = (-1)^n \int_{j_n \sigma_i} \rho_i \omega = (-1)^{2n} \int_{\partial G} \rho_i \omega = \int_{\partial G} \rho_i \omega \ .$$

Questa relazione la (11.4) e la (11.5) concludono la dimostrazione del teorema di Stokes.

Corollario 11.5 . *Sia M una varietà orientata compatta di dimensione n. Sia $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$. Allora*

$$\int_M d\omega = 0 \ .$$

Dim. M è una regione regolare con bordo vuoto.

Esercizi

1. Sia M una varietà orientata compatta di dimensione n. Dimostrare che $H^n_{dR}(M) \neq 0$.

2. Sia ω la n-forma

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \cdots \wedge dx_{n+1}$$

definita su S^n. Verificare che ω è chiusa, ma non esatta.

3. Dimostrare che se una varietà M contiene un aperto non orientabile, allora la varietà non è orientabile.

4. Dimostrare che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non è orientabile.

5. Dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è orientabile $\iff$ n è dispari.

6. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ una ipersuperficie definita da $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$; dimostrare che X è orientabile.

7. Dimostrare che il toro n–dimensionale T_n è orientabile

12 Fibrati vettoriali

La nozione di fibrato vettoriale formalizza è l'idea di uno spazio vettoriale k-dimensionale che variando in modo C^∞ al variare di un punto su di una varietà n-dimensionale descrive una varietà $(n+k)$-dimensionale (si pensi per esempio all'insieme dei piani tangenti a una sfera n-dimensionale: in questo caso $k = n$). Su questi spazi vettoriali variabili si eseguono tutte le costruzioni dell'algebra multilineare. La definizione formale è la seguente:

Definizione 12.1 *Sia M una varietà differenziale di dimensione n. Un fibrato vettoriale reale (risp. complesso) di rango k su M è il dato di una applicazione C^∞*

$$\pi : E \to M$$

dove E è una varietà $(n+k)$-dimensionale tale che:

1. *per ogni punto $p \in M$ la preimmagine $E_p = \pi^{-1}(p)$, detta fibra di E in p, è uno spazio vettoriale k-dimensionale reale (risp. complesso),*

2. *ogni punto $p \in M$ possiede un intorno U su cui il fibrato si banalizza, il che vuol dire che esiste un diffeomorfismo*

$$\begin{aligned} \xi:\ E_U := \pi^{-1}(U) &\to U \times \mathbb{R}^k \\ (risp.\ \xi : E_U &\to U \times \mathbb{C}^k\ ) \end{aligned}$$

tale che, per ogni $q \in U$, la restrizione ξ_q di ξ alla fibra E_q ha come immagine $\{q\} \times \mathbb{R}^k$ e stabilisce isomorfismo lineare

$$\xi_q :\ E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k$$

Infine, dati su M due fibrati lineari $\pi : E \to M$ e $\gamma : F \to M$ un omomorfismo tra i due è un diagramma commutativo di applicazioni C^∞

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \arrow[dl, "\gamma"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

tale che, per ogni $p \in M$ l'applicazione indotta

$$f_p := f|_{E_p} \ \ : E_p \to F_p$$

è un omomorfismo lineare.

Un fibrato di rango 1, si dice anche un fibrato lineare.

Si può liberare la definizione appena data dalla scelta dell'insieme di aperti U su cui il fibrato si banalizza decidendo di considerarne sempre uno massimale, ma non ci dilungheremo su questo punto.

L' esempio più semplice di fibrato vettoriale è quello del *fibrato banale* che si ottiene considerando il prodotto $M \times V$ di una varietà M e di uno spazio vettoriale V ed equipaggiando questo prodotto con la proiezione naturale $\pi :\ M \times V \to V$.

Vogliamo descrivere un procedimento per costruire i fibrati vettoriali. Ci limiteremo a discutere il caso dei fibrati reali ma considerazioni del tutto analoghe si possono fare per quelli complessi.
Sia dunque $\pi :\ M \to V$ un fibrato vettoriale reale di rango k. Per definizione possiamo trovare un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ di M su cui E si banalizza. Possiamo anche assumere che gli aperti U_α siano domini di altrettante carte locali per M, anche se ciò non è strettamente necessario. Denotiamo con

$$\xi_\alpha :\ E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

l'isomorfismo di banalizzazione. Se $U_\alpha \cap U_\beta$ è non vuoto, possiamo considerare la composizione

$$\xi_\alpha \xi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k \to U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k.$$

Per definizione di fibrato vettoriale questa è una applicazione C^∞ che per ogni x in $U_\alpha \cap U_\beta$ fornisce un isomorfismo lineare

$$\begin{array}{rcl} \xi_\alpha \xi_\beta^{-1} \ : \ \{x\} \times \mathbb{R}^k & \to & \{x\} \times \mathbb{R}^k \\ (x, v) & \mapsto & (x,\, g_{\alpha\beta}(x) v)\,, \end{array}$$

le $g_{\alpha\beta}(x)$ essendo matrici invertibili $k \times k$ che variano in modo C^∞ con $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Le $g_{\alpha\beta}$ possono essere riguardate come applicazioni C^∞ :

$$g_{\alpha\beta} : \ U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})\,. \tag{12.1}$$

Queste applicazioni prendono il nome di *matrici di transizione di E rispetto a $\mathcal{U}$*. Poichè in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

$$\xi_\alpha \xi_\beta^{-1} \xi_\beta \xi_\gamma^{-1} = \xi_\alpha \xi_\gamma^{-1},$$

si ottiene, per le $g_{\alpha\beta}$, la così detta *relazione di cociclo*

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}\,. \tag{12.2}$$

Faremo ora vedere che un qualsiasi fibrato vettoriale può costruirsi a partire da matrici di transizione soggette alla relazione di cociclo. Si ha la seguente

Proposizione 12.2 *Sia M una varietà n-dimensionale, sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di M costituito da carte locali. Sia data una collezione $g = \{g_{\alpha\beta}\}$ di applicazioni C^∞*

$$g_{\alpha\beta} : \ U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})\,,$$

tali che in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad g_{\alpha\alpha} = Id$$

allora esiste un fibrato vettoriale $E(g)$ di rango k su M avente le $g_{\alpha\beta}$ come matrici di transizione relative a $\mathcal{U}$. Ogni fibrato vettoriale su M è isomorfo a un fibrato vettoriale del tipo $E(g)$, e due fibrati vettoriali $E(g)$ e $E(h)$ sono isomorfi se e solo se esiste una collezione $\{f_\alpha\}$ di applicazioni C^∞

$$f_\alpha : \ U_\alpha \to GL(k, \mathbb{R})\,,$$

tali che, in $U_\alpha \cap U_\beta$

$$h_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1} f_\beta g_{\alpha\beta}\,.$$

Dim. Poniamo

$$E(g) = \frac{\sqcup(U_\alpha \times \mathbb{R}^k)}{\sim}$$

La relazione di equivalenza $\sim$ è definita nel modo seguente. Dati $(p, v)_\alpha \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ allora $(q, w)_\beta \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$

$$(p,v)_\alpha \sim (q,w)_\beta \iff p = q\,,\ v = g_{\alpha\beta}(p)w\,.$$

La transitività di questa relazione è assicurata dalla proprietà di cociclo di g. Nel seguito, per brevità, ometteremo il sottoscritto α nel denotare un elemento $(p,v)_\alpha \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$. Equipaggiamo $E(g)$ con la topologia quoziente e introduciamo una struttura differenziale nel modo seguente. Innanzitutto, per semplificare le notazioni identifichiamo la carta U_α di M con il suo codominio in $\mathbb{R}^n$. Denotiamo poi con

$$\chi_\alpha :\, U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to E(g)$$

la proiezione naturale, che per le definizioni, risulta essere iniettiva. Posto $V_\alpha = \chi_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^k)$ si definiscono per $E(g)$ carte locali

$$\xi_\alpha := \chi_\alpha^{-1} \,:\, V_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k.$$

Che esse definiscano una struttura differenziabile su $E(g)$ è ovvio dal momento che in $V_\alpha \cap V_\beta$

$$\begin{aligned}
\xi_\alpha \xi_\beta^{-1}(p,w) &= \xi_\alpha \chi_\beta(p,w) \\
&= \xi_\alpha \chi_\alpha(p, g_{\alpha\beta}(p)w) \\
&= (p, g_{\alpha\beta}(p)w)
\end{aligned}$$

e le $g_{\alpha\beta}$ sono C^∞ . La proiezione

$$\pi :\ E(g) \to M$$

è definita ponendo

$$\pi(\chi_\alpha(p,v)) = p.$$

Che la definizione sia ben posta e che π sia C^∞ è un semplice esercizio. La struttura di spazio vettoriale sulle fibre $E(g)_p$ di π è definita come segue.

$$\chi_\alpha(p,v) + \chi_\alpha(p,v') = \chi_\alpha(p, v+v').$$

La definizione è ben posta perchè

$$\chi_\alpha(p, v+v') = \chi_\beta(p, g_{\beta\alpha}(p)(v+v')) = \chi_\beta(p, g_{\beta\alpha}(p)v + g_{\beta\alpha}(p)v')$$

A questo punto è chiaro le ξ_α sono banalizzazioni locali per $E(g)$ e che $E(g)$ è un fibrato vettoriale di rango k su M avente le $g_{\alpha\beta}$ come matrici di transizione relative a $\mathcal{U}$.

Che ogni fibrato vettoriale sia isomorfo a uno della forma $E(g)$ lo abbiamo esenzialmente dimostrato prima di enunciare la Proposizione.

Per quello che riguarda l'ultima parte dell'enunciato, osserviamo che un isomorfismo F tra $E(g)$ e $E(h)$ è completamente determinato dalle restrizioni

$$F_\alpha \,:\ E(g)|_{U_\alpha} \to E(h)|_{U_\alpha}\,,$$

Usando le banalizzazioni possiamo scrivere

$$F_\alpha(p,v) = (p, f_\alpha(p)v)$$

dunque le $f_\alpha(p)$ sono matrici invertibili $k \times k$ che variano in modo C^∞ con p. Il fatto che esse definiscano un isomorfismo globale F si traduce nelle condizioni di compatibilità

$$f_\alpha(p) g_{\alpha\beta}(p) = h_{\alpha\beta}(p) f_\beta(p)$$

La Proposizione è dunque dimostrata.

Corollario 12.3 *Sia M una varietà differenziale e $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di M. Siano dati fibrati vettoriali $\pi : E_i \to U_i$ ed isomorfismi*

$$\lambda_{ji} \;:\; E_i|_{U_i \cap U_j} \to E_j|_{U_i \cap U_j}$$

tali che

$$\lambda_{kj}\lambda_{ji} = \lambda_{ki} \;:\; E_i|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \to E_k|_{U_i \cap U_j \cap U_k}. \tag{12.3}$$

Allora esiste un fibrato vettoriale π $E \to M$ e degli isomorfismi

$$\tau_i \;:\; E|_{U_i} \to E_i$$

tali che

$$\tau_j = \lambda_{ji}\tau_i \;\;:\;\; E|_{U_i \cap U_j} \to E_j|_{U_i \cap U_j}$$

Dim. Si può supporre che $E_i = E(g^i)$ per un qualche cociclo $g^i = \{g_{\alpha_i \beta_i}\}$ relativo a un ricoprimento $\mathcal{U}_i = \{U_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in A_i}$ di U_i. Consideriamo le banalizzazioni

$$\xi^i_{\alpha_i} \;:\; E_i|_{U_{\alpha_i}} \to U_{\alpha_i} \times \mathbb{R}^k.$$

Definiamo $g_{\alpha_i \beta_j}$ ponendo

$$\xi^j_{\beta_j} \lambda_{ji} {\xi^i_{\alpha_i}}^{-1}(p,v) = (p, g_{\beta_j \alpha_i}(p)v)$$

dove si pone per convenzione $\lambda_{ii} = 1$ Le condizioni (12.3) ci dicono che se $A = \cup_i A_i$ allora

$$g = \{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A} \tag{12.4}$$

è un cociclo ed è semplice verificare che $E = E(g)$ è il fibrato cercato. Q.E.D.

Diamo ora alcuni esempi notevoli di fibrati vettoriali . Per ogni varietà differenziabile M di dimensione n, definiamo il *fibrato tangente* nel modo seguente. Si pone

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_P(M) \tag{12.5}$$

e si definisce la proiezione

$$\pi : T(M) \to M$$

ponendo $\pi(v) = p$ se $v \in T_p(M)$. Dotiamo ora l'insieme $T(M)$ di una struttura di fibrato vettoriale. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento di carte locali di M, definiamo

$$h_\alpha : \pi^{-1} U_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

nel modo seguente. Sia

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \in T_p(M) \subset \pi^{-1} U_\alpha$$

si pone allora

$$h_\alpha(D) = (p, f_1(p), \ldots, f_n(p)) \tag{12.6}$$

Questo è ovviamente un diffeomorfismo e le matrici di transizione sono definite dalla matrice jacobiana, vedi (3.17).

Le operazioni sugli spazi vettoriali inducono operazioni sui fibrati vettoriali. Per ogni fibrato vettoriale $\pi : E \to M$, possiamo considerare il fibrato duale $\pi^* : E^* \to M$ con fibra $E_p^* \simeq E_p^*$, in cui le matrici di transizione sono date da

$$^t g_{\alpha,\beta}^{-1}. \tag{12.7}$$

In modo simile se $\rho : F \to M$ è un altro fibrato con matrici di transizione $h_{\alpha,\beta}$, possiamo definire il *fibrato somma diretta* $\sigma : E \oplus F \to M$ con matrici di transizione

$$\begin{pmatrix} g_{\alpha,\beta} & 0 \\ 0 & h_{\alpha,\beta} \end{pmatrix}.$$

Il fibrato *prodotto tensoriale* $E \otimes F \to M$ ha come matrici di transizione le matrici $g_{\alpha,\beta} \otimes h_{\alpha,\beta}$. Il fibrato $\Lambda^s E$ ha come matrici di transizione le matrici $\Lambda^s g_{\alpha,\beta}$. Nel caso in cui $s = n$, il fibrato che si ottiene è chiamato *fibrato determinante* del fibrato E.

Ponendo $E = T(M)$, possiamo costruire il fibrato cotangente

$$T^*(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)^* \tag{12.8}$$

e i fibrati potenze esterne $\Lambda^s T(M)$ e $\Lambda^s T^*(M)$, le cui fibre sono le potenze esterne degli spazi vettoriali $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$ rispettivamente.

Sia $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale e sia $U \subseteq M$ un aperto, una sezione differenziabile del fibrato su U è un' applicazione C^∞

$$s : U \to \pi^{-1}(U) := E|_U \tag{12.9}$$

tale che $\pi s = id_U$. L' insieme $\Gamma(U, E)$ delle sezioni è in modo naturale un $\mathcal{E}^0(U)$ modulo. Si considerino della banalizzazioni locali ξ_α come in (12). Sia $s \in \Gamma(M, E)$ una sezione. Poniamo

$$\xi_\alpha \circ s(p) = (p, s_\alpha(p))$$

Allora $s_\alpha \in \mathcal{E}^0(U_\alpha)$ e

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta \quad \text{in} \quad U_\alpha \cap U_\beta$$

Molti tra gli oggetti studiati fino ad ora sono sezioni di fibrati vettoriali. I campi vettoriali sono sezioni del fibrato tangente:

$$\mathcal{V}(M) = X \in \Gamma(M, TM)\,.$$

Le k-forme differenziali sono sezioni della k-sima potenza esterna del fibrato cotangente:

$$\mathcal{E}^k(M) = \Gamma(M, \Lambda^k T^* M)$$

Osserviamo infine che, nel caso complesso, si possono considerare anche fibrati olomorfi, intendendo con ciò che E e M sono varietà complesse che $\pi : E \to M$ è analitica e che le banalizzazioni

$$\xi : E_U := \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$$

sono isomorfismi analitici. In questo caso le matrici di transizione sono olomorfe e dunque si possono considerate le sezioni olomorfe del fibrato. Ovviamente per ogni varietà complessa M, si possono considerare i fibrati tangente e cotangente olomorfi.

Un altro esempio è quello del *fibrato tautologico.* Sia $U(s,n)$ l'unione disgiunta dei piani di dimensione s in $\mathbb{R}^n$, esiste una proiezione naturale sulla varietà grassmanniana

$$\pi : U(s,n) \to G(s,n) \tag{12.10}$$

che ad ogni punto del $s-$piano associa l' $s-$piano. Diamo una struttura di fibrato vettoriale usando le coordinate della varietà grassmanniana per definire le matrici di transizione. Per semplificare i calcoli consideriamo il caso $s = 1$, cioè $G(1,n) = \mathbb{P}^{n-1}$. Vogliamo vedere che

$$\pi : U(1,n) \to \mathbb{P}^{n-1} \tag{12.11}$$

è un fibrato di rango 1 o, come si è soliti dire, lineare. Per $i = 0, \dots, n-1$, sia

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_{n-1}] \in \mathbb{P}^{n-1} \quad \text{tali che} \quad x_i \neq 0\},$$

allora

$$\pi^{-1}(U_i) = \bigcup \{t_i(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \quad t_i \in \mathbb{R}\}. \tag{12.12}$$

Poniamo

$$h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R} \tag{12.13}$$

definito da

$$t_i(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \to ([x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}], t_i).$$

Questi sono diffeomorfismi e le matrici di transizione sono

$$g_{ij} = t_i/t_j = x_i/x_j. \tag{12.14}$$

sono applicazioni di

$$U_i \cap U_j \to GL(1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \smallsetminus 0.$$

Esercizi

1. Sia $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale, verificare che dare una sezione $s \in \Gamma(M, E)$, equivale a dare una collezione di funzioni C^∞ s_α definite sugli aperti dove il fibrato banalizza che hanno le seguenti proprietà: $\pi s_\alpha = idU_\alpha$, $s_\alpha = g_{\alpha,\beta} s_\beta$ in $U_\alpha \cap U_\beta$.

2. Sia $\pi : U(1,2) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ il fibrato tautologico, verificare che $U(1,2)$ è analiticamente isomorfo allo scoppiamento di $\mathbb{C}^2$ nell'origine.

3. Sia $L^k \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ il fibrato olomorfo le cui matrici di transizione sono la potenza k-ma delle matrici di transizione del fibrato tautologico. Verificare che le sezioni olomorfe di $\Gamma(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), L^k)$ esistono $\iff k \leq 0$

4. Dimostrare che per ogni varietà M, il fibrato tangente $T(M)$ è sempre una varietà orientabile.

5. Sia $\pi : L \to M$ un fibrato lineare reale, verificare che L è banale se e solo se esiste una sezione $s : M \to L$ mai nulla.