

Capitolo 5

Nozioni di topologia algebrica

1 Definizione di omologia singolare

In questo capitolo introdurremo gli strumenti necessari per calcolare l'omologia singolare di una classe di esempi abbastanza vasta. L'omologia singolare è un modo per codificare, con uno strumento algebrico, proprietà omotopiche di uno spazio topologico. Più precisamente dato un anello R , (che nelle principali applicazioni penseremo uguale a \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_m) costruiremo, per ogni intero $n \geq 0$, un funtore covariante H_n tra la categoria degli spazi topologici e quella degli R -moduli. Assegneremo cioè a ogni spazio topologico X un R -modulo $H_n(X, R)$, e a ogni applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ un omomorfismo $H_n(f) : H_n(X, R) \rightarrow H_n(Y, R)$, in modo tale che

$$\begin{aligned} H_n(1_X) &= 1_{H_n(X, R)}, \\ H_n(gf) &= H_n(g)H_n(f), \end{aligned} \tag{1.1}$$

per ogni coppia di applicazioni continue $f : X \rightarrow Y$, e $g : Y \rightarrow Z$.

Procediamo ora alla costruzione di questo funtore. Intendiamo per k -*simplexso standard*, il sottospazio di \mathbb{R}^k definito da:

$$\Delta_k = \left\{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq 0, \sum x_i \leq 1 \right\}.$$

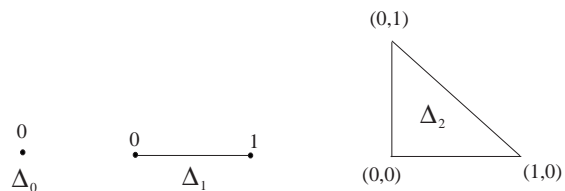


Figura 1

Sia X uno spazio topologico. Un k -simpleso singolare in X è una applicazione continua

$$\sigma_k : \Delta_k \rightarrow X$$

Definiamo l' R -modulo delle k -catene singolari in X a coefficienti in R ponendo

$$C_k(X, R) = \{ \text{combinazioni lineari, formali, finite, a coefficienti in } R, \\ \text{di } k\text{-simplessi singolari in } X \} .$$

Dunque, una k -catena singolare è una espressione del tipo

$$\gamma = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \tag{1.2}$$

dove gli a_i sono elementi di R , e i σ_i sono k -simplessi singolari in X . Se $f : X \rightarrow Y$ è una applicazione continua, si definisce un omomorfismo di R -moduli

$$C_k(f) : C_k(X, R) \rightarrow C_k(Y, R)$$

ponendo, per una k -catena γ data da (1.2),

$$C_k(f)(\gamma) = \sum_{i=1}^n a_i (f \circ \sigma_i) .$$

È del tutto ovvio che valgono le proprietà funtoriali

$$C_k(1_X) = 1_{C_k(X, R)} \quad , \quad C_k(gf) = C_k(g)C_k(f) . \tag{1.3}$$

Il funtore C_k che assegna ad ogni spazio topologico X il modulo delle k -catene in X a coefficienti in R , non è ancora quello che vogliamo. Il modulo $C_k(X, R)$ è invariante per omeomorfismi, ma non per trasformazioni omotopiche ed è difficilmente calcolabile.

Prima di procedere è opportuno ricordare cosa si intende per invarianza omotopica. Siano date due applicazioni continue $f, g : X \rightarrow Y$. Diremo che f e g sono *omotopicamente equivalenti*, se esiste una applicazione continua

$$F : X \times I \rightarrow Y \quad , \quad I = [0, 1]$$

tale che $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$. Dunque l'omotopia F “deforma in modo continuo” l'applicazione f nella applicazione g .

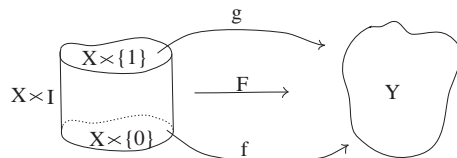


Figura 2

Per esprimere in simboli che F realizza l'omotopia tra f e g si scrive

$$F : f \simeq g .$$

Due spazi X e Y si dicono *omotopicamente equivalenti*, se esistono due applicazioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ che sono l'una l'inversa dell'altra a meno di omotopia e cioè se esistono due omotopie

$$F : gf \simeq 1_X \quad , \quad G : fg \simeq 1_Y .$$

Un momento di riflessione convincerà che l'unica cosa da osservare per far vedere che l'omotopia è una relazione di equivalenza, è la seguente. Dato un diagramma di applicazioni continue

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} V \xrightarrow{c} W$$

e una omotopia $F : a \simeq b$, allora cF è una omotopia tra ca e cb . Verifichiamo che il disco $\bar{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ è omotopicamente equivalente a un punto, e che il disco privato dell'origine $\bar{\Delta} \setminus \{0\}$, è omotopicamente equivalente al cerchio $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Nel primo caso sia $f : \bar{\Delta} \rightarrow \{p\}$ l'applicazione costante e $\iota : \{p\} \rightarrow \bar{\Delta}$ l'inclusione definita da $\iota(p) = 0$. Poiché $f\iota = 1$ basterà trovare un'omotopia tra ιf e 1 . Per questo si pone $F(z, t) = tz$, per $z \in \bar{\Delta}$ e $t \in [0, 1]$. Nel secondo caso si prende come $f : \bar{\Delta} \setminus \{0\} \rightarrow S^1$ l'applicazione definita da $f(z) = z/|z|$, si denota con $\iota : S^1 \rightarrow \bar{\Delta} \setminus \{0\}$ l'inclusione, cosicché anche in questo caso $f\iota = 1$, mentre un'omotopia tra ιf e 1 , può essere realizzata ponendo $F(z, t) = tz + (1-t)(z/|z|)$, per $z \in \bar{\Delta} \setminus \{0\}$ e $t \in [0, 1]$.

Ritorniamo ora alla costruzione del funtore omologia singolare. Dato uno spazio X e un anello R , vogliamo costruire un *operatore di bordo* :

$$\partial = \partial_k : C_k(X, R) \rightarrow C_{k-1}(X, R) . \tag{1.4}$$

Consideriamo il k -simpleso standard Δ_k e definiamo, per ogni $s = 0, \dots, k$ un $(k-1)$ -simpleso singolare

$$j_s = j_s^k : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k ,$$

detto *s-esima faccia* del k -simpleso identità $\delta_k = 1_{\Delta_k}$, ponendo

$$j_s(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{s-1}, 0, x_s, \dots, x_{k-1}) , \quad s \neq 0$$

$$j_0(x_1, \dots, x_{k-1}) = (1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i, x_1, \dots, x_{k-1}) .$$

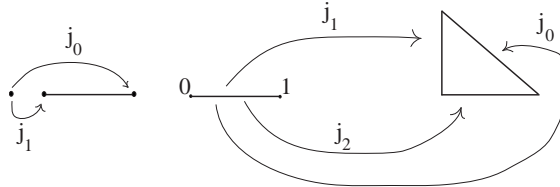


Figura 3

Sia ora $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ un k -simpleso singolare in X , si definisce il *bordo* $\partial\sigma$ di σ come la $(k-1)$ -catena singolare data da

$$\begin{aligned}\partial\sigma &= \sum_{s=0}^k (-1)^s \sigma j_s \in C_{k-1}(X, R), \quad k \geq 1 \\ \partial\sigma &= 0, \quad k = 0\end{aligned}$$

Estendendo per linearità l'operatore ∂ alle combinazioni lineari, formali, finite di k -simplessi singolari in X , si definisce l'operatore ∂ preannunciato dalla (1.4). Ora, l'osservazione fondamentale è che

$$\partial^2 = 0.$$

Qui, e nel seguito, scriveremo ∂^2 al posto di $\partial_{k-1}\partial_k$. Per dimostrare che $\partial^2 = 0$ ci si riduce per linearità al caso di un k -simpleso singolare σ . Si deve dimostrare che $\partial^2\sigma = 0$. Il primo caso significativo si ha per $k = 2$. Sia $\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$ un 2-simpleso singolare. Denotiamo con P, Q, R gli 0-simplessi singolari in X dati da $P(0) = \sigma(0, 0)$, $Q(0) = \sigma(0, 1)$, $R(0) = \sigma(1, 0)$. Identifichiamo P con $P(0)$, Q con $Q(0)$ e R con $R(0)$.

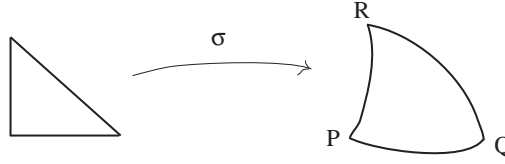


Figura 4

Si ha:

$$\begin{aligned}\partial\sigma &= \sigma j_0 - \sigma j_1 + \sigma j_2 \\ \partial^2\sigma &= \partial\sigma j_0 - \partial\sigma j_1 + \partial\sigma j_2 \\ &= (R - Q) - (R - P) + (Q - P) = 0.\end{aligned}$$

Il caso generale è altrettanto facile. Si ha:

$$\partial^2\sigma = \partial \sum_{s=0}^k (-1)^s \sigma j_s^k = \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{s=0}^k (-1)^{s+t} \sigma j_s^k j_t^{k-1}.$$

Osserviamo che per $t < s$ si ha $j_s^k j_t^{k-1} = j_t^k j_{s-1}^{k-1}$. Infatti per $0 < t < s$

$$\begin{aligned}j_s^k j_t^{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}) &= j_s^k(x_1, \dots, x_{t-1}, 0, x_t, \dots, x_{k-2}) \\ &= (x_1, \dots, x_{t-1}, 0, x_t, \dots, x_{s-2}, 0, x_{s-1}, \dots, x_{k-2}) \\ &= j_t^k(x_1, \dots, x_{s-2}, 0, x_{s-1}, \dots, x_{k-2}) \\ &= j_t^k j_{s-1}^{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}).\end{aligned}$$

Se $t = 0, s > 1$ si ha:

$$\begin{aligned} j_s^k j_0^{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}) &= j_s^k (1 - \sum x_i, x_1, \dots, x_{k-2}) \\ &= (1 - \sum x_i, x_1, \dots, x_{s-1}, 0, x_s, \dots, x_{k-2}) \\ &= j_0^k j_{s-1}^{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}). \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} j_1^k j_0^{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}) &= (0, 1 - \sum x_i, x_1, \dots, x_{k-2}) \\ &= j_0^k j_0^{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}) \end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned} \partial^2 \sigma &= \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{s=0}^k (-1)^{s+t} \sigma j_s^k j_t^{k-1} \\ &= \sum_{0 \leq t < s \leq k} (-1)^{s+t} \sigma j_s^k j_t^{k-1} + \sum_{k-1 \geq t \geq s \geq 0} (-1)^{s+t} \sigma j_s^k j_t^{k-1} \\ &= \sum_{0 \leq t < s \leq k} (-1)^{s+t} \sigma j_t^k j_{s-1}^{k-1} + \sum_{k-1 \geq t \geq s \geq 0} (-1)^{s+t} \sigma j_s^k j_t^{k-1} \\ &= \sum_{k-1 \geq u \geq v \geq 0} (-1)^{u+v+1} \sigma j_v^k j_u^{k-1} + \sum_{k-1 \geq t \geq s \geq 0} (-1)^{s+t} \sigma j_s^k j_t^{k-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Abbiamo così costruito quello che si chiama il complesso delle catene singolari di X (a coefficienti in R)

$$\dots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_k(X) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X) \longrightarrow \dots$$

Qui, e nel futuro, quando lo riterremo opportuno, ometteremo nei simboli il riferimento all'anello R dei coefficienti. Abbiamo visto che $\partial^2 = 0$, o, più precisamente, che $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. Questo è come dire che

$$\text{Im}(\partial_{k+1}) \subseteq \text{Ker}(\partial_k).$$

Gli elementi di $\text{Ker}(\partial_k)$ si chiamano i k -cicli di X (a coefficienti in R) e si scrive

$$\text{Ker}(\partial_k) = Z_k(X, R) = \{c \in C_k(X) \mid \partial c = 0\}$$

Gli elementi di $\text{Im}(\partial_k)$ si chiamano i k -bordi di X (a coefficienti in R) e si scrive

$$\text{Im}(\partial_k) = B_k(X, R) = \{c \in C_k(X) \mid c = \partial \gamma, \quad \gamma \in C_{k+1}(X)\}.$$

Per quello che abbiamo appena detto, si ha che $B_k(X, R)$ è un R -sottomodulo di $Z_k(X, R)$. Ebbene, il k -esimo modulo di omologia singolare di X a coefficienti in R non è altro che il quoziente di $Z_k(X, R)$ per $B_k(X, R)$ e si scrive, per $k \geq 0$,

$$H_k(X, R) = Z_k(X, R)/B_k(X, R).$$

Osserviamo che se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua allora c'è un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} C_k(X) & \xrightarrow{C_k(f)} & C_k(Y) \\ \partial_k \downarrow & & \downarrow \partial_k \\ C_{k-1}(X) & \xrightarrow{C_{k-1}(f)} & C_{k-1}(Y) \end{array}$$

In particolare:

$$C_k(f)(Z_k(X) \subseteq Z_k(Y)), \quad C_k(f)(B_k(X) \subseteq B_k(Y))$$

e dunque $C_k(f)$ induce un omorfismo di R -moduli

$$H_k(f) : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$$

Dalle proprietà functoriali (1.3) discendono immediatamente le proprietà functoriali (1.1). Questo completa la definizione del funtore “omologia k -sima”. Spesso, per semplificare le notazioni, scriveremo f_* al posto di $H_k(f)$ e a volte useremo lo stesso simbolo f_* per denotare $C_k(f)$. Per esempio, esprimeremo la commutatività del diagramma introdotto sopra scrivendo semplicemente

$$f_* \partial = \partial f_* \tag{1.5}$$

Il fatto che valgono per l'omologia k -sima le proprietà functoriali ci dice, in particolare, che l'omologia k -sima è un *invariante topologico*, e cioè che un omeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ induce un isomorfismo

$$f_* : H_k(X) \xrightarrow{\cong} H_k(Y)$$

per ogni k . Questa proprietà, da sola, non rende calcolabile l'omologia. Ma qualche risultato elementare già si può ottenere. Innanzi tutto si può osservare che se X è *connesso per archi* allora $H_0(X, R) \cong R$. Per questo notiamo che $C_0(X, R) = Z_0(X, R)$, e definiamo un omomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : Z_0(X, R) &\rightarrow R \\ \sum_{i=1}^s a_i P_i &\mapsto \sum a_i \end{aligned}$$

dove i P_i sono 0-simplessi singolari in X , che, come è lecito, identifichiamo con altrettanti punti di X . Poichè la φ è suriettiva, ci resta solo da verificare che $\text{Ker } \varphi = B_0(X)$. Prendiamo dunque una 1-catena $c = \sum b_i \sigma_i \in C_1(X)$. Un tipico elemento di $B_0(X)$ è della forma

$$\partial c = \sum b_i (\sigma_i(1) - \sigma_i(0)),$$

dove, come al solito, identifichiamo uno 0-simpleso con un punto di X . D'altro canto

$$\varphi(\partial c) = \sum b_i - \sum b_i = 0,$$

e dunque $B_0(X) \subseteq \text{Ker } \varphi$. Supponiamo ora che $\sum_{i=1}^s a_i P_i \in \text{Ker } \varphi$. Poiché X è connesso per archi, fissato un punto $Q \in X$, esiste un 1-simplesso σ_i tale che $\sigma_i(0) = P_i, \sigma_i(1) = Q$. Ponendo $c = \sum a_i \sigma_i$ si ha:

$$\partial c = \sum a_i (P_i - Q) = \sum a_i P_i ,$$

come si voleva dimostrare.

Un'altra semplice conseguenza delle definizioni è la seguente. Sia $X = \coprod_{i \in I} X_i$ la decomposizione di X in componenti connesse per archi, allora per ogni $k \geq 0$

$$H_k(X) \cong \bigoplus_{i \in I} H_k(X_i) . \quad (1.6)$$

Questo discende dal fatto che il k -simplesso standard è connesso per archi e che l'operatore di bordo rispetta la decomposizione in componenti connesse per archi.

Calcoliamo ora l'omologia del punto. Sia dunque $X = \{p\}$ cosicché c'è un solo k -simplesso singolare in X che denotiamo con il simbolo σ_k , ciò vuol dire che

$$C_k(X, R) = R\sigma_k .$$

Dunque

$$\partial \sigma_k = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \sigma_k .$$

Ne segue che $\partial_k = -1_{C_k}$ se k è pari e maggiore o uguale a 2, e $\partial_k = 0$ se k è dispari oppure uguale a 0. Nel primo caso $\text{Ker}(\partial_k) = \text{Im}(\partial_{k+1}) = 0$, nel secondo $\text{Ker}(\partial_k) = \text{Im}(\partial_{k+1}) = C_k(X)$, e quindi,

$$H_k(\{p\}, R) = \begin{cases} R, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases}$$

Esercizi

1. Dimostrare che gli spazi S^n e $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ sono omotopicamente equivalenti.
2. Sia X uno spazio topologico e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ due applicazioni continue; verificare che sono omotope.
3. Uno spazio topologico si dice contraibile se è omotopicamente equivalente al punto; verificare che ogni insieme convesso è contraibile.
4. Dimostrare che un'applicazione $f : S^1 \rightarrow X$ è omotopa a un'applicazione costante se e solo se estende a un'applicazione $g : \overline{D} \rightarrow X$.
5. Dimostrare che uno spazio topologico è contraibile se e solo se l'applicazione id_X è omotopa a un'applicazione costante.
6. Verificare che l'applicazione antipodale $i : S^1 \rightarrow S^1$ con $i(x) = -x$; non è omotopicamente equivalente all'identità.

2 Invarianza omotopica

Enunciamo ora la prima proprietà fondamentale dell'omologia, e cioè la sua invarianza omotopica.

Teorema 2.1 (Invarianza omotopica) *Siano f e g due applicazioni continue dello spazio topologico X nello spazio topologico Y . Si assuma che f e g siano omotope. Allora, per ogni, $k \geq 0$*

$$f_* = g_* : H_k(X, R) \rightarrow H_k(Y, R) .$$

Dal teorema di invarianza omotopica segue subito che spazi omotopicamente equivalenti hanno moduli di omologia isomorfi. In effetti se $\alpha : X \rightarrow Y$ e $\beta : Y \rightarrow X$ sono due applicazioni continue inverse, l'una dell'altra, a meno di omotopia e cioè se $\beta\alpha \simeq 1_X, \alpha\beta \simeq 1_Y$, si ha

$$(\beta\alpha)_* = (1_X)_* \quad , \quad (\alpha\beta)_* = (1_Y)_*$$

e quindi, per funtorialità,

$$\beta_*\alpha_* = 1_{H_k(X)} \quad , \quad \alpha_*\beta_* = 1_{H_k(Y)} ,$$

il che mostra che $H_k(X)$ e $H_k(Y)$ sono isomorfi.

Iniziamo la dimostrazione del Teorema (2.1). Ci troviamo di fronte a una situazione di questo genere:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_k(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & f_* \downarrow & & g_* \downarrow & & J_k \swarrow & & \\ & & & & & & f_* \downarrow & & g_* \downarrow \\ & & & & & & & & J_{k-1} \swarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{k+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_k(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

e vogliamo far vedere che, passando all'omologia, si ha $f_* = g_*$. Per fare questo, è sufficiente mostrare che esiste per ogni $k \geq 0$ un omomorfismo $J_k : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(Y)$, tale che, a livello di catene

$$J_{k-1}\partial + \partial J_k = f_* - g_* \tag{2.1}$$

Infatti, ammessa la (2.1), e data una classe di omologia $[c] \in H_k(X)$, con $c \in Z_k(X)$, si ha:

$$\begin{aligned} f_*[c] &= [f_*c] \\ &= [g_*c + J_{k-1}\partial c + \partial J_k c] \\ &= [g_*c] \\ &= g_*[c] , \end{aligned}$$

essendo $\partial c = 0$, ed essendo $[g_*c] = [g_*c + \partial\gamma]$. Come abbiamo già osservato usiamo la notazione f_* per denotare sia l'applicazione indotta a livello di catene

che quella a livello di omologia; la prima eguaglianza, nell'espressione di sopra, avremmo dovuto scriverla $H_k(f)[c] = [C_k(f)c]$ e così via. Il lemma di cui avremo bisogno è, in effetti, un caso particolare del teorema di invarianza omotopica.

LEMMA (2.3). *Sia X un convesso in \mathbb{R}^n . Allora $H_k(X) = 0$, $k \geq 1$.*

Dim. Sappiamo ormai che basta trovare, per ogni $k \geq 1$ un omomorfismo

$$T = T_k : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(X) \quad , \quad k \geq 1$$

tale che

$$T\partial \pm \partial T = \lambda 1_{C_k(X)} \quad , \quad (2.2)$$

dove λ è invertibile in R . Infatti, assumendo l'esistenza di tali operatori, e dato un ciclo $c \in Z_k(X)$, per $k \geq 1$, si vede subito che la classe di omologia di c è uguale a zero:

$$[c] = \lambda^{-1} [T\partial c \pm \partial Tc] = \lambda^{-1} [\partial Tc] = 0 .$$

Sia $\sigma : \Delta_k \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^n$ un k -simplexso singolare definiamo $T\sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$, ponendo

$$\begin{aligned} T\sigma(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) &= \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i \right) \sigma \left(\frac{x_2}{\sum_{i=1}^{k+1} x_i}, \dots, \frac{x_{k+1}}{\sum_{i=1}^{k+1} x_i} \right) + \left(1 - \sum_{i=1}^{k+1} x_i \right) P , \end{aligned}$$

dove P è un punto scelto a piacere in X , e poi estendiamo per linearità T a tutto $C_k(X)$. Per esempio, se $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $P = (a, b)$ e $\sigma(x) = (x, 0)$, per $x \in \Delta_1$, si ha

$$(T\sigma)(x, y) = (x + y)(y, 0) + (1 - (x + y))(a, b) .$$

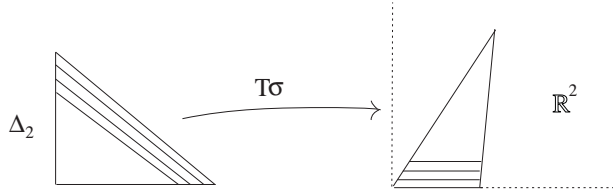


Figura 5

Dimostriamo che vale la (2.2). Sia $\sigma_k : \Delta_k \rightarrow X$ con $k \geq 0$. Si ha

$$\partial T\sigma = \sum_{s=0}^{k+1} (-1)^s (T\sigma) j_s .$$

Per $s > 1$, si ha

$$\begin{aligned} (T\sigma)j_s(x_1, \dots, x_k) &= T\sigma(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) \sigma \left(\frac{x_2}{\sum_{i=1}^k x_i}, \dots, \overset{\text{posto } s-1}{0}, \dots, \frac{x_k}{\sum_{i=1}^k x_i} \right) + \left(1 - \sum_{i=1}^k x_i \right) P, \end{aligned}$$

Per $s = 1$, si ha

$$\begin{aligned} (T\sigma)j_1(x_1, \dots, x_k) &= T\sigma(0, x_1, \dots, x_k) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) \sigma \left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^k x_i}, \dots, \frac{x_k}{\sum_{i=1}^k x_i} \right) + \left(1 - \sum_{i=1}^k x_i \right) P, \end{aligned}$$

mentre,

$$(T\sigma)j_0(x_1, \dots, x_k) = T\sigma\left(1 - \sum_{i=1}^k x_i, x_1, \dots, x_k\right) = \sigma(x_1, \dots, x_k).$$

D'altro canto si ha, per $k \geq 1$,

$$T\partial\sigma = \sum_{s=0}^k (-1)^s T(\sigma j_s).$$

Per $s > 0$,

$$T(\sigma j_s)(x_1, \dots, x_k) = \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) \sigma \left(\frac{x_2}{\sum_{i=1}^k x_i}, \dots, \overset{\text{posto } s}{0}, \dots, \frac{x_k}{\sum_{i=1}^k x_i} \right) + \left(1 - \sum_{i=1}^k x_i \right) P.$$

Per $s = 0$ si ha:

$$T(\sigma j_0)(x_1, \dots, x_k) = \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) \sigma \left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^k x_i}, \dots, \frac{x_k}{\sum_{i=1}^k x_i} \right) + \left(1 - \sum_{i=1}^k x_i \right) P$$

Facendo le somme si ottiene, in $C_k(X)$, per $k \geq 1$,

$$T_{k-1}\partial_k + \partial_{k+1}T_k = 1_{C_k(X)}.$$

Q. E. D.

Procediamo ora alla dimostrazione del teorema di invarianza omotopica. Supponiamo dunque che

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

sia una omotopia tra f e g . Consideriamo le inclusioni

$$\iota_{X,0}, \iota_{X,1} : X \rightarrow X \times I$$

definite da $\iota_{X,0}(x) = (x, 0)$ e $\iota_{X,1}(x) = (x, 1)$. Evidentemente si ha

$$f = F\iota_{X,0}, \quad g = F\iota_{X,1} .$$

Dunque, per dimostrare che $f_* = g_*$, basta dimostrare che $(\iota_{X,0})_* = (\iota_{X,1})_*$, infatti, per funtorialità

$$f_* = F_*(\iota_{X,0})_* \quad , \quad g_* = F_*(\iota_{X,1})_* .$$

A questo punto f , g e Y sono scomparsi dalla scena e abbiamo a che fare solo con $\iota_{X,0}$ e $\iota_{X,1}$. Vogliamo dunque trovare un operatore

$$J_X : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(X \times I)$$

tale che

$$J_X \partial + \partial J_X = (\iota_{X,0})_* - (\iota_{X,1})_* \quad (2.3)$$

Insisteremo inoltre sul fatto che, per ogni applicazione continua $f : X \rightarrow Y$, il nostro operatore J_X sia tale che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{array}{ccc} C_k(X) & \xrightarrow{f_*} & C_k(Y) \\ J_X \downarrow & & \downarrow J_Y \\ C_{k+1}(X \times I) & \xrightarrow{(f \times 1)_*} & C_{k+1}(Y \times I) \end{array} \quad (2.4)$$

Costruiremo degli operatori J_X che soddisfino simultaneamente (2.3) e (2.4) procedendo per induzione su k . Per $k = 0$, dato uno 0-simplesso singolare P in X , definiremo $J_X(P) : \Delta_1 \rightarrow X \times I$, ponendo

$$J_X(P)(t) = (P, t), \quad t \in \Delta_1 = I .$$

È ovvio che sia la (2.3) che la (2.4) sono soddisfatte in questo caso. Supponiamo dunque di aver costruito J_X per ogni spazio topologico X al livello delle h -catene, per $h \leq k - 1$. Dobbiamo costruire J_X al livello delle k -catene. Consideriamo il caso $X = \Delta_k$ e sia $1 : \Delta_k \rightarrow \Delta_k$ l'identità. Vogliamo definire $J_{\Delta_k}(1)$. Per induzione abbiamo costruito $J_{\Delta_k}(\partial 1)$ e per di più sappiamo che

$$\partial J_{\Delta_k}(\partial 1) + J_{\Delta_k}(\partial^2 1) = (\iota_{\Delta_k,0})_*(\partial 1) - (\iota_{\Delta_k,1})_*(\partial 1) .$$

Il che, usando la (1.5), può risciversi nella forma

$$\partial (J_{\Delta_k}(\partial 1) - (\iota_{\Delta_k,0})_*(1) + (\iota_{\Delta_k,1})_*(1)) = 0 .$$

Ciò vuol dire che

$$J_{\Delta_k}(\partial 1) - (\iota_{\Delta_k,0})_*(1) + (\iota_{\Delta_k,1})_*(1) \in Z_k(\Delta_k \times I) ,$$

ma d'altro canto, essendo $\Delta_k \times I$ un convesso di \mathbb{R}^{k+1} il Lemma (2.3) ci assicura che questo k -ciclo è un bordo, ed è dunque della forma $\partial \gamma$ con $\gamma \in C_{k+1}(\Delta_k \times I)$. Definiamo

$$J_{\Delta_k}(1) = \gamma ,$$

con il che si ha

$$\partial J_{\Delta_k}(1) - J_{\Delta_k}(\partial 1) = (\iota_{\Delta_k,0})_*(1) - (\iota_{\Delta_k,1})_*(1). \quad (2.5)$$

Facciamo ora la banale ma importante osservazione che, dato un qualsiasi k -simpleso singolare σ in X , si ha

$$\sigma = \sigma_*(1) \in C_k(X).$$

Definiamo, per ogni X e per ogni k -simpleso singolare σ in X ,

$$J_X(\sigma) = (\sigma \times 1)_* J_{\Delta_k}(1),$$

estendendo poi questa definizione, per linearità, a tutto $C_k(X)$. Dobbiamo verificare la (2.3) e la commutatività del diagramma (2.4). Si possono fare queste due verifiche sui semplici. Incominciamo dalla seconda. Si ha

$$\begin{aligned} J_Y f_*(\sigma) &= J_Y f_* \sigma_*(1) \\ &= J_Y (f\sigma)_*(1) \\ &= J_Y (f\sigma) \\ &= (f\sigma \times 1)_* J_{\Delta_k}(1) \\ &= (f \times 1)_* (\sigma \times 1)_* J_{\Delta_k}(1) \\ &= (f \times 1)_* J_X(\sigma). \end{aligned}$$

Verifichiamo ora la (2.3).

$$\begin{aligned} \partial J_X(\sigma) - J_X \partial(\sigma) &= \partial(\sigma \times 1)_* J_{\Delta_k}(1) - J_X \partial \sigma_*(1) \\ &= (\sigma \times 1)_* \partial J_{\Delta_k}(1) - J_X \sigma_*(\partial 1) \\ \text{per induzione} &= (\sigma \times 1)_* \partial J_{\Delta_k}(1) - (\sigma \times 1)_* J_{\Delta_k}(\partial 1) \\ \text{per (2.5)} &= (\sigma \times 1)_* ((\iota_{\Delta_k,0})_*(1) - (\iota_{\Delta_k,1})_*(1)) \\ &= (\iota_{X,0})_*(\sigma) - (\iota_{X,1})_*(\sigma). \end{aligned}$$

Q. E. D.

Il prossimo strumento che introdurremo per rendere possibile, almeno in alcuni casi, il calcolo dell'omologia, è la cosiddetta *successione di Mayer-Vietoris*. Prima di descrivere questo strumento, è opportuno parlare in generale di complessi e della loro omologia. Le considerazioni che svolgeremo, anche se ispirate dalla topologia, hanno un carattere esclusivamente algebrico e sono il punto di partenza di una intera teoria che prende il nome di algebra omologica.

3 Complessi di moduli

Ricordiamo innanzi tutto che una successione di morfismi di R -moduli (R un anello commutativo con unità),

$$A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A .$$

si dice *esatta* se

$$\text{Ker}(\alpha_i) = \text{Im}(\alpha_{i+1}) .$$

Una successione esatta del tipo

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

si dice *esatta corta*, ciò equivale a dire che α è iniettiva, β suriettiva e che il nucleo di β coincide con l'immagine di α . È utile osservare che data una successione esatta di moduli *liberi e di rango finito* del tipo

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$$

allora

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rg}(A_i) = 0 \quad (3.2)$$

e in particolare per una successione esatta corta come la (3.1) si ha

$$\text{rg}(B) = \text{rg}(A) + \text{rg}(C) ,$$

dove, come d'uso, rg denota il rango del modulo libero in esame. Un utile lemma sulle successioni esatte è il cosiddetto *Lemma dei cinque*.

Lemma 3.1 (Lemma dei cinque) *Sia*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & D & \xrightarrow{\delta} & E \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C & \xrightarrow{\gamma'} & D & \xrightarrow{\delta'} & E' \end{array}$$

un diagramma commutativo di omomorfismi di R -moduli in cui le righe orizzontali sono esatte mentre a, b, d, e sono isomorfismi. Allora anche c è un isomorfismo.

Dim. Dimostriamo che c è iniettivo. Sia $c(x) = 0$. Allora $d\gamma(x) = \gamma'c(x) = 0$ e quindi $\gamma(x) = d^{-1}d\gamma(x) = 0$. Ne segue che $x = \beta(y)$. D'altro canto $\beta'b(y) = 0$ e dunque $b(y) = \alpha'(z)$, ma allora $\alpha a^{-1}(z) = y$ e $x = \beta(y) = \beta\alpha(a^{-1}(z)) = 0$. Per vedere che c è suriettivo si prende $t \in C'$ e si considera $\omega = d^{-1}\gamma'(t)$. Si ha $e\delta(\omega) = \delta'd(\omega) = \delta'\gamma'(t) = 0$, e quindi, essendo e un isomorfismo, si ha $\delta(\omega) = 0$. Dunque $\omega = \gamma(x)$ e $\gamma'c(x) = \gamma'(t)$, ne segue che $c(x) - t = \beta'(u)$ e che $c(x - \beta b^{-1}(u)) = t$.

Q. E. D.

Un complesso $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ di R -moduli è una successione di omomorfismi di R -moduli

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

tali che

$$\partial_{n-1}\partial_n = 0 \quad , \quad n \geq 1$$

o, se si vuole, tali che

$$\text{Ker } \partial_{n-1} \supseteq \text{Im } \partial_n .$$

I complessi formano una categoria in cui i morfismi $\alpha_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet$ sono i diagrammi commutativi del tipo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots \\ & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \alpha_{n-1} & & \downarrow \alpha_{n-2} \\ \cdots & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & C'_{n-2} \xrightarrow{\partial'_{n-2}} \cdots \end{array}$$

Dato un complesso \mathcal{C}_\bullet si definisce la sua omologia k -esima ponendo

$$H_k(\mathcal{C}_\bullet) = \frac{\text{Ker}(\partial_k)}{\text{Im}(\partial_{k+1})} , \quad k \geq 0$$

Dunque l'omologia è un modo per misurare quanto un dato complesso dista dall'essere una successione esatta.

Dato un omomorfismo di complessi $\alpha_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet$, la condizione che $\alpha_k(\text{Ker}(\partial_k)) \subseteq \text{Ker}(\partial'_k)$ e $\alpha_k(\text{Im}(\partial_{k+1})) \subseteq \text{Im}(\partial'_{k+1})$ permette di definire un omomorfismo

$$\alpha_* = \alpha_{*k} : H_k(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow H_k(\mathcal{C}'_\bullet) .$$

Resta così definito un funtore H_k tra la categoria dei complessi di R -moduli e la categoria degli R -moduli. Per vedere questo basta verificare che, se $1_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet$ è l'identità, allora 1_* è l'identità e che, se $\alpha_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet$ e $\beta_\bullet : \mathcal{C}'_\bullet \rightarrow \mathcal{C}''_\bullet$ sono morfismi di complessi, allora $(\beta\alpha)_* = \beta_*\alpha_*$. Le verifiche sono banali.

Il risultato fondamentale che noi vogliamo ricordare a proposito di complessi è il seguente

Teorema 3.2 (Successione esatta lunga in omologia) *Sia*

$$0 \longrightarrow C''_\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{\beta_\bullet} C'_\bullet \longrightarrow 0$$

una successione esatta corta di complessi. Allora c'è una successione esatta di R -moduli

$$\cdots \longrightarrow H_k(C''_\bullet) \xrightarrow{\alpha_*} H_k(C_\bullet) \xrightarrow{\beta_*} H_k(C'_\bullet) \xrightarrow{\delta_*} H_{k-1}(C''_\bullet) \xrightarrow{\alpha_*} \cdots$$

Dim. Per ipotesi abbiamo un diagramma commutativo di R -moduli

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C''_{k+1} & \xrightarrow{\alpha} & C_{k+1} & \xrightarrow{\beta} & C'_{k+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial'' & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' \\
 0 & \longrightarrow & C''_k & \xrightarrow{\alpha} & C_k & \xrightarrow{\beta} & C'_k \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial'' & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' \\
 0 & \longrightarrow & C''_{k-1} & \xrightarrow{\alpha} & C_{k-1} & \xrightarrow{\beta} & C'_{k-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial'' & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' \\
 0 & \longrightarrow & C''_{k-2} & \xrightarrow{\alpha} & C_{k-2} & \xrightarrow{\beta} & C'_{k-2} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

in cui le righe orizzontali sono esatte e in cui, per semplicità, abbiamo soppresso gli indici dei vari omomorfismi. Vogliamo innanzi tutto definire degli omomorfismi

$$\delta_* : H_k(C'.) \rightarrow H_{k-1}(C''.)$$

Per fare questo basta definire degli omomorfismi

$$\bar{\delta}_* : \text{Ker}(\partial'_k) \rightarrow \text{Ker}(\partial''_{k-1})/\text{Im}(\partial''_k)$$

che si annullino su $\text{Im}(\partial'_{k+1})$, e poi passare al quoziente. Sia dunque $x \in \text{Ker}\partial'_k$. Poiché β è suriettiva, esiste $y \in C_k$ con $\beta(y) = x$, e dal momento che $\beta\partial(y) = \partial'\beta(y) = \partial'(x) = 0$, esiste $u \in C''_{k-1}$ con $\alpha(u) = \partial(y)$. Inoltre $\alpha\partial''(u) = \partial\alpha(u) = \partial^2(y) = 0$, ed essendo α iniettiva, segue che $\partial''(u) = 0$. Definiamo $\bar{\delta}(x) = [u] \in \text{Ker}(\partial''_{k-1})/\text{Im}(\partial''_k)$. La definizione è ben posta, perché l'eventuale ambiguità discende dalla scelta di un altro $y \in C_k$ tale che $\beta(y) = x$. Un'altra scelta è necessariamente del tipo $y + \alpha(t)$ con $t \in C''_k$, e dunque si ha che $\partial(y + \alpha(t)) = \partial(y) + \partial\alpha(t) = \partial(y) + \alpha\partial''(t)$, con il che al posto di u abbiamo $u + \partial''(t)$, e ciò non muta la classe $[u]$. Che $\bar{\delta}$ si annulli su $\text{Im}(\partial'_{k+1})$ è anche evidente. Perché se $x = \partial(v)$, basta prendere come y un elemento della forma ∂z , con $z \in C_{k+1}$ e tale che $\beta(z) = v$. Ma allora $\alpha(u) = \partial(y) = \partial^2(z) = 0$, e quindi $u = 0$.

Si tratta ora di dimostrare l'esattezza della successione in omologia.

Esattezza in $H_k(C.)$: Si ha che $\beta_*[x] = 0$, se e solo se $\beta(x) = \partial'(y)$, $y \in C'_{k+1}$. Ma, scelto $z \in C_{k+1}$ tale che $\beta(z) = y$, ciò accade se e solo se $\beta(\partial z - x) = 0$,

ovvero se e solo se $\partial(z) - x = \alpha(v)$, dove necessariamente $\partial''(v) = 0$. Ma ciò vuole dire che $\alpha_*[v] = [x]$.

Esattezza in $H_k(\mathcal{C}')$: Ricordando la definizione di δ_* , si ha che $\delta_*[s] = 0$ se e solo se esiste $t \in C_k''$ con $\alpha\partial''(t) = \partial(y)$ dove $s = \beta(y)$. Ma ciò accade se e solo se $\partial\alpha(t) = \partial(y)$ e quindi si può prendere al posto di y il ciclo $y - \alpha(t)$ e si ha $\beta_*[y - \alpha(t)] = [\beta(y)] = [s]$.

Esattezza in $H_{k-1}(\mathcal{C}'')$: La condizione $\alpha_*[u] = 0$, è equivalente all'esistenza di un $y \in C_k$ tale che $\alpha(y) = \partial y$, ma questo vuole esattamente dire che $\delta_*[\beta y] = [u]$.
Q. E. D.

Esercizi

1. Una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

spacca se esiste un' applicazione $\gamma : B \longrightarrow A$ tale che $\gamma\alpha = id_A$ oppure se esiste un' applicazione $\delta : C \longrightarrow B$ tale che $\beta\delta = id_C$. Verificare che le due affermazioni sono equivalenti.

2. Dare esempi di successioni esatte corte che spaccano e che non spaccano.

3. Verificare che in una successione esatta corta che spacca la struttura di B è completamente determinata da quelle di A e C .

4 La successione di Mayer-Vietoris e le suddivisioni baricentriche

Dopo la breve parentesi sull'algebra omologica, ritorniamo alla topologia dimostrando il teorema di Mayer-Vietoris che consente di calcolare l'omologia di X a partire da una decomposizione di X nell'unione di due aperti U e V una volta che si conosca l'omologia di U , e di V , e di $U \cap V$. Dato un aperto $W \subset X$, è chiaro che un ciclo c in W è anche un ciclo in X . Denoteremo con $[c]_W$ la classe di omologia di c in W e con $[c]_X$ quella di c in X .

Teorema 4.1 (La successione di Mayer-Vietoris). *Sia X uno spazio topologico, U e V due aperti in X tali che $X = U \cup V$. Allora, dato un ciclo c in X , esistono catene c_U in U e c_V in V , e tali che $[c]_X = [c_U + c_V]_X$, e vi è una successione esatta*

$$\dots \longrightarrow H_k(U \cap V) \xrightarrow{\alpha_*} H_k(U) \oplus H_k(V) \xrightarrow{\beta_*} H_k(X) \xrightarrow{\delta_*} H_{k-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

dove

$$\alpha_*([c]_{U \cap V}) = ([c]_U, -[c]_V) ,$$

$$\begin{aligned}\beta_*([c]_U, [c']_V) &= [c]_X + [c']_X, \\ \delta_*([c]_X) &= [\partial c_U]_{U \cap V}.\end{aligned}$$

(Va osservato che il bordo in U della catena c_U è un ciclo, ma non necessariamente un bordo, in $U \cap V$).

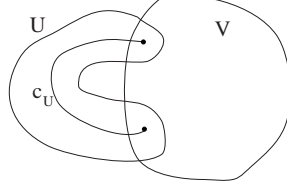


Figura 6

Iniziamo la dimostrazione del Teorema di Mayer Vietoris. Si pone

$$C'_k(X) = C_k(U) + C_k(V) \subseteq C_k(X).$$

Si ha allora una successione esatta

$$0 \longrightarrow C_k(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} C_k(U) \oplus C_k(V) \xrightarrow{\beta} C'_k(X) \longrightarrow 0$$

dove $\alpha(c) = (c, -c)$, $\beta((c, c')) = c + c'$. Chiaramente α e β definiscono una successione esatta corta di complessi, infatti

$$\begin{aligned}\alpha(\partial c) &= (\partial c, -\partial c) = \partial((c, -c)) = \partial\alpha(c), \\ \beta\partial((c, c')) &= \beta(\partial c, \partial c') = \partial c + \partial c' = \partial\beta((c, c')).\end{aligned}$$

Si può allora applicare il teorema (3.2), tenendo conto che l'omologia del complesso $C.(U \cap V)$ è l'omologia di $U \cap V$ e quella del complesso $C.(U) \oplus C.(V)$ è la somma diretta dell'omologia di U e di quella V . Si ottiene una successione esatta

$$\dots \longrightarrow H_k(U \cap V) \xrightarrow{\alpha_*} H_k(U) \oplus H_k(V) \xrightarrow{\beta_*} H'_k(X) \xrightarrow{\delta_*} H_{k-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

dove $H'_k(X)$ denota l'omologia del complesso $C'.(X)$, e dove α_* , β_* e δ_* sono definiti come nell'enunciato del teorema (il che ha senso perché i cicli di $C'.(X)$ sono quei cicli di X che possono scriversi nella forma $C = c_U + c_V$). Ora bisogna dimostrare che l'omomorfismo canonico

$$I_* : H'_k(X) \rightarrow H_k(X)$$

$$[c_U + c_V]' \mapsto [c_U + c_V]$$

indotto dall'inclusione $I : C'_k(X) \hookrightarrow C_k(X)$, è un isomorfismo. Per far questo basta costruire un omomorfismo

$$S : C_k(X) \rightarrow C'_k(X)$$

per cui valgono le seguenti proprietà:

$$\forall c \in C_k(X), \exists n = n_c, \text{ t.c. } S^n c \sim c'_U + c'_V \in C'_k(X) \quad (4.1)$$

$$\forall x \in Z_k(X), \forall n \quad S^n x = x + \partial H_n x \quad (4.2)$$

dove $H_n : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(X)$, è un operatore lineare tale che $H_n(C_k(U)) \subseteq C_{k+1}(U)$, e $H_n(C_k(V)) \subseteq C_{k+1}(V)$, e infine:

$$\partial S = S\partial. \quad (4.3)$$

Supponiamo che valgano le (4.1), (4.2) (4.3). Le (4.1) e (4.2) ci dicono che I_* è suriettiva. Per dimostrare l' iniettività, si procede così. Supponiamo che $[c_U + c_V]' = 0$. Ciò vuol dire che $c_U + c_V = \partial c$. Per la (4.1) esiste n tale che $S^n c = c'_U + c'_V + \partial z$. Usando la (4.2) e la (4.3), si ottiene

$$\begin{aligned} c_U + c_V &= \partial S^n c \\ &= \partial c'_U + \partial c'_V, \end{aligned}$$

e questo vuol dire che $[c_U + c_V]' = 0$.

Per costruire l'operatore S , dobbiamo parlare di *suddivisioni baricentriche*. L'idea è quella di associare, a ogni k -simpleso $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$, la sua suddivisione baricentrica, che sarà una k -catena $c = S(\sigma) \in C_k(X)$ ottenuta suddividendo baricentricamente Δ_k , applicando σ ai k -simplessi della suddivisione, e sommando.

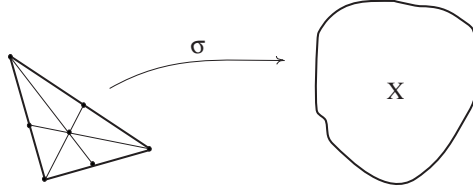


Figura 7

In effetti noi costruiremo simultaneamente, per ogni spazio topologico X , e per ogni $k \geq 0$, due operatori

$$\begin{aligned} S &= S_{X,k} : C_k(X) \rightarrow C_k(X) \\ T &= T_{X,k} : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(X) \end{aligned}$$

in modo che valgano le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} Sf_* &= f_* S, \quad \forall f : X \rightarrow Y, \\ Tf_* &= f_* T, \quad \forall f : X \rightarrow Y, \\ \partial S &= S\partial, \\ \partial T + T\partial &= 1 - S. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Qui, e nel seguito, ometteremo tutti gli indici. Per esempio la prima delle (4.4) dovrebbe leggersi: $S_{Y,k}f_{*,k} = f_{*,k}S_{X,k}$, mentre la terza dovrebbe leggersi: $\partial_k^X S_{X,k} = S_{X,k+1}\partial_{k+1}^X$, ecc.. Poniamo $1 = 1_{\Delta_k}$, e dimostriamo che, una volta definiti $S(1)$, $T(1)$, $S\partial(1)$, $T\partial(1)$ in modo che valgano

$$\begin{aligned} S\partial(1) - \partial S(1) &= 0 \\ \partial T(1) - T\partial(1) &= 1 - S(1), \end{aligned} \quad (4.5)$$

allora, per ogni X , sono univocamente individuati operatori S e T che soddisfano le (4.4). Ricordiamo innanzi tutto che, dato un k -simpleso singolare $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$, si ha

$$\sigma = \sigma_*(1) \in C_k(X).$$

Osserviamo poi che le prime due relazioni tra le (4.4) forzano le definizioni

$$\begin{aligned} S\sigma &= \sigma_*S(1) \\ T\sigma &= \sigma_*T(1). \end{aligned}$$

Mostriamo che queste definizioni e le (4.5) implicano le (4.4). Si ha

$$\begin{aligned} Sf_*\sigma &= S(f\sigma) \\ &= (f\sigma)_*S(1) \\ &= f_*\sigma_*S(1) \\ &= f_*S(\sigma) \end{aligned}$$

e similamente per $T\sigma$. Inoltre

$$\begin{aligned} \partial S\sigma &= \partial\sigma_*S(1) \\ &= \sigma_*\partial S(1) \\ &= \sigma_*S\partial(1) \\ &= S\sigma_*\partial(1) \\ &= S\partial\sigma_*(1) \\ &= S\partial\sigma, \end{aligned}$$

dove la terza eguaglianza discende dalla (4.5) e la quarta eguaglianza discende dalla prima della (4.4) che ormai è stata dimostrata. Infine

$$\begin{aligned} (\partial T + T\partial)\sigma &= \partial\sigma_*T(1) + T\partial\sigma_*(1) \\ &= \sigma_*\partial T(1) + T\sigma_*\partial(1) \\ &= \sigma_*\partial T(1) + \sigma_*T\partial(1) \\ &= \sigma_*(1 - S(1)) \\ &= (1 - S)(\sigma). \end{aligned}$$

In definitiva non ci rimane che definire $S(1)$, $T(1)$, $S\partial(1)$, $T\partial(1)$, in modo che valgano le (4.5). Per dare queste definizioni premettiamo alcune considerazioni.

Il semplice standard e il suo bordo, sono casi particolari delle cosiddette *catene affini*. È opportuno, e risulterà anche intuitivamente più chiaro, definire gli operatori S e T per questo tipo di catene. Denotiamo con E_0 l'origine di \mathbb{R}^k , e con E_1, \dots, E_k la sua base standard. Dati punti P_0, \dots, P_k in \mathbb{R}^n esiste un'unica trasformazione affine

$$A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che $A(E_i) = P_i$, $i = 0, \dots, k$. La restrizione di A a Δ_k è un k -simpleso singolare in \mathbb{R}^n che prende il nome di *k -simpleso affine in \mathbb{R}^n di vertici P_0, \dots, P_k* . Lo si denota con il simbolo $\langle P_0, \dots, P_k \rangle$.

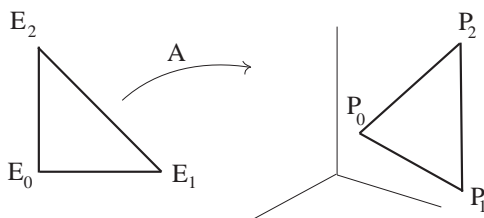


Figura 8

Dalla definizione segue che

$$\partial \langle P_0, \dots, P_k \rangle = \sum_{i=0}^k (-1)^i \langle P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_k \rangle .$$

Dato un k -simpleso affine $\langle P_0, \dots, P_k \rangle$ in \mathbb{R}^n e un punto $B \in \mathbb{R}^n$, si definisce un $(k+1)$ -simpleso affine in \mathbb{R}^n ponendo

$$B \langle P_0, \dots, P_k \rangle = \langle B, P_0, \dots, P_k \rangle .$$

L'operatore B può essere esteso, per linearità, alle combinazioni, a coefficienti in R , dei k -simplessi affini. Queste combinazioni lineari prendono il nome di *catene affini* e $\partial 1$ ne è un esempio. Sia $C = \sum a_i A_i$ una catena affine. Allora è facile verificare che

$$\begin{aligned} \partial B(C) + B \partial(C) &= C, \quad \text{se } k > 0 \\ \partial B(C) + \sum a_i \langle B \rangle &= C, \quad \text{se } k = 0 . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Definiremo ora induttivamente due operatori S e T su tutte le combinazioni lineari di k -simplessi affini. Per $k = 0$ si pone

$$\begin{aligned} S \langle P \rangle &= \langle P \rangle, \\ T \langle P \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Assumendo di aver definito S e T sui $(k-1)$ -simplessi affini (e le loro combinazioni), dato un k -simpleso affine

$$A = \langle P_0, \dots, P_k \rangle : \Delta_k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

e detto B l'immagine secondo A del baricentro di Δ_k , si pone

$$\begin{aligned} SA &= BS\partial A \\ TA &= B(A - SA - T\partial A) \end{aligned}$$



Figura 9

Vogliamo ora verificare che per ogni combinazione C di k -simplessi affini valgono le relazioni

$$\begin{aligned} \partial S(C) &= S\partial(C) \\ \partial T(C) + T\partial(C) &= C - S(C) . \end{aligned}$$

Procediamo per induzione su k . Il caso $k = 0$ è ovvio. Usando le (4.6) e l'ipotesi induttiva, si ottiene

$$\begin{aligned} \partial S(C) &= \partial BS\partial C \\ &= S\partial C - B\partial S\partial C \\ &= S\partial C - BS\partial^2 C \\ &= S\partial C . \end{aligned}$$

In modo analogo

$$\begin{aligned} \partial T(C) + T\partial(C) &= \partial BC - \partial BSC - \partial BT\partial C + T\partial C \\ &= C - B\partial C - SC + B\partial SC - T\partial C + \\ &\quad + B\partial T\partial C + T\partial C \\ &= C - SC + B(-\partial C + S(\partial C) - \partial T(\partial C) + T\partial(\partial C)) \\ &= C - SC . \end{aligned}$$

Essendo 1_k e $\partial(1_k)$ combinazioni di k -simplessi affini siamo riusciti a definire $S(1)$, $T(1)$, $S\partial(1)$, $T\partial(1)$, in modo che valgono le (4.5).

Ritorniamo ora al nostro spazio X unione degli aperti U e V . Sia $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ un k -simpleso. Dalla costruzione di S , e dalla compattezza di Δ_k , segue che, per $n = n_\sigma \in \mathbb{Z}_+$ sufficientemente grande, la catena $S^n \sigma$ si spezza nella somma di due catene

$$S^n \sigma = c_U + c_V \quad , \quad c_U \in C_k(U), \quad c_V \in C_k(V) .$$

Si ha inoltre

$$S\partial = \partial S .$$

Infine, se $x \in Z_k(X)$ si ha

$$Sx = x - \partial Tx$$

e quindi, ricorsivamente,

$$S^n x = x + \partial H_n x,$$

dove H_n è un polinomio in S , T e ∂ . Dalle definizioni di T e S segue che H_n porta catene in U in catene in U e catene in V in catene in V . In definitiva abbiamo verificato che valgono le (4.1), (4.2), (4.3), e il teorema di Mayer–Vietoris è dimostrato.

Q. E. D.

Dalla dimostrazione del teorema di Mayer–Vietoris si deduce che la costruzione della successione di Mayer–Vietoris è functoriale nel senso che, data una applicazione continua $f : X \rightarrow Y$, e ricoprimenti aperti $X = U \cup V$, e $Y = U' \cup V'$, tali che $f(U) \subset V'$, $f(V) \subset U'$, allora c'è un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_k(U \cap V) & \longrightarrow & H_k(U) \oplus H_k(V) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_{k-1}(U \cap V) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \oplus f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_k(U' \cap V') & \longrightarrow & H_k(U') \oplus H_k(V') & \longrightarrow & H_k(Y) & \longrightarrow & H_{k-1}(U' \cap V') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

5 Esempi

Faremo ora vedere che la conoscenza dell'omologia del punto, insieme al teorema di omotopia e alla successione di Mayer–Vietoris, consente di calcolare l'omologia di molti spazi topologici. Daremo cinque esempi: la sfera S^n , l'aperto $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$, $m < n$, lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$, lo scoppimento \tilde{X} di una varietà bidimensionale complessa X in un suo punto, e il toro n -dimensionale T_n . Infine in una sezione a parte considereremo il caso delle superfici compatte orientabili.

Consideriamo S^n per $n \geq 1$. Vogliamo dimostrare che

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} R, & \text{per } k = 0, n, \\ 0, & \text{per } k \neq 0, k \neq n. \end{cases} \quad (5.1)$$

Procederemo per induzione incominciando dal caso $n = 1$. Ricopriamo S^1 con i due aperti $U = S^1 \setminus \{-i\}$, $V = S^1 \setminus \{i\}$. Sia U che V sono *contraibili*, i.e. omotopicamente equivalenti a un punto, mentre $U \cap V$ è omotopicamente equivalente all'unione di due punti. Per Mayer–Vietoris si ha, non appena $k \geq 2$, la successione esatta

$$0 = H_k(U) \oplus H_k(V) \rightarrow H_k(S^1) \rightarrow H_{k-1}(U \cap V) = 0.$$

Ne segue che $H_k(S^1) = 0$, per $k \geq 2$. Sempre per Mayer–Vietoris, si ha

$$0 \longrightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} H_0(U) \oplus H_0(V)$$

Ora, se p è lo 0-simplesso in $U \cap V$ tale che $p(0) = 1$ e q quello per cui $q(0) = -1$, si ha che

$$H_0(U \cap V) = Rp \oplus Rq$$

e l'applicazione α è data da

$$\alpha([ap, bq]) = [ap + bq, -(ap + bq)] = [(a + b)p, -(a + b)p] .$$

Ne segue che

$$H_1(S^1) \cong \text{Ker } \alpha = R[-p, q] \cong R$$

come si voleva dimostrare. Per trovare un generatore di $H_1(S^1)$ basta trovare un ciclo $\gamma \in Z_1(S^1)$ tale che $\delta[\gamma] = [-p, q]$. Consideriamo

$$\begin{aligned} \gamma : \Delta_1 &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi it} . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Chiaramente γ è un ciclo. Consideriamone la sua suddivisione baricentrica: $\gamma = \gamma_U + \gamma_V$

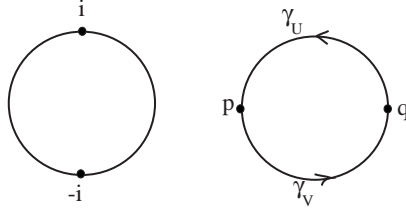


Figura 10

Per come è definita la successione di Mayer–Vietoris si ha

$$\delta[\gamma] = [\delta\gamma_U]_{U \cap V} = [-p, q] .$$

Dunque la classe del ciclo γ dato da (5.2) è un generatore di $H_1(S^1)$. Supponiamo ora di aver dimostrato la (5.1) per le sfere S^k con $k \leq n - 1$. Scriviamo

$$S^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1 \right\} .$$

Poniamo $a = (0, \dots, 1)$, $b = (0, \dots, -1)$ e

$$U = S^n \setminus \{a\} \quad , \quad V = S^n \setminus \{b\} .$$

Chiaramente $S^n = U \cup V$, sia U che V sono contraibili, mentre $U \cap V$ è omeotopicamente equivalente a un S^{n-1} . Per Mayer–Vietoris e per induzione si ha, non appena $k \geq 2$,

$$0 \longrightarrow H_k(S^n) \longrightarrow H_{k-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0 ,$$

e quindi la (5.1) è verificata in questi casi. D'altro canto, sempre per Mayer-Vietoris, si ha

$$0 \longrightarrow H_1(S^n) \longrightarrow H_0(S^{n-1}) \xrightarrow{\alpha} H_0(U) \oplus H_0(V) .$$

Essendo S^{n-1} connesso per archi, non appena $n \geq 2$, il morfismo α è dato da

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow R \oplus R \\ x &\longmapsto (x, -x) \end{aligned}$$

ed è quindi iniettivo. Ne segue che $H_1(S^n) = 0$, per $n \geq 2$, e la dimostrazione della (5.1) è completa.

Consideriamo ora lo spazio $X = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$, $m \leq n - 2$. Per fissare le idee, siano x_1, \dots, x_n coordinate in \mathbb{R}^n e sia

$$\mathbb{R}^m = \{(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\} .$$

L'applicazione continua

$$F : X \times I \rightarrow X$$

definita da

$$F((x_1, \dots, x_n, t)) = (tx_1, \dots, tx_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

mostra che $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$ è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^{n-m} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ e questi è a sua volta omotopicamente equivalente a S^{n-m-1} . In conclusione se $m \leq n - 2$

$$H_k(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \cong \begin{cases} R, & \text{se } k = 0, k = n - m - 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esaminiamo ora $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$. Vogliamo dimostrare che

$$H_k(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) = \begin{cases} R, & \text{se } k = 2i \leq 2n, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Per fare ciò dobbiamo guardare $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ da un nuovo punto di vista. Consideriamo la fibrazione di Hopf

$$\begin{aligned} f : S^{2n-1} &\longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C} \\ (x_0, \dots, x_{n-1}) &\longmapsto [x_0, \dots, x_{n-1}] . \end{aligned}$$

Pensiamo a S^{2n-1} come al bordo di

$$B^{2n} = \left\{ (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \mid \sum |x_i|^2 \leq 1 \right\}$$

Definiamo lo spazio

$$X = B^{2n} \cup_f \mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}$$

ottenuto attaccando B^{2n} a \mathbb{P}^{n-1} tramite f . Dunque per definizione X si ottiene come quoziente

$$X = B^{2n} \cup \mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C} / \sim$$

dove $x \sim y$ se $x \in B^{2n}$ e $f(x) = y$, (come al solito si prende la relazione di equivalenza generata da \sim , e si equipaggia X con la topologia quoziente). Vogliamo mostrare che X è omeomorfo a $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$. Per questo bisogna definire una applicazione continua

$$\varphi : B^{2n} \cup \mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$$

tale che, per $x \in S^{2n-1}$, $\varphi(x) = \varphi(f(x))$. Poniamo

$$\varphi((x_0, \dots, x_{n-1})) = [x_0, \dots, x_{n-1}, 1 - \sum |x_i|^2]$$

per $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in B^{2n}$ e

$$\varphi([x_0, \dots, x_{n-1}]) = [x_0, \dots, x_{n-1}, 0]$$

per $[x_0, \dots, x_{n-1}] \in \mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}$. Evidentemente φ è continua e $\varphi(x) = \varphi(f(x))$ per $x \in S^{2n-1}$. Dunque φ induce una applicazione continua

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$$

ed è immediato verificare che φ è iniettiva suriettiva e che l'inversa è continua. Dimostriamo ora la (5.3) per induzione su n , il caso $n = 0$ essendo banale. Sia 0 l'immagine in X dell'origine in B^{2n} e siano $U \supset U'$ due piccoli dischi in B^{2n} di centro 0 e raggio < 1 . Poiché la proiezione da B^{2n} a X , è iniettiva, quando ristretta ad U e U' , denoteremo le immagini di U e U' in X ancora con le stesse lettere. Poniamo $V = X \setminus \bar{U}'$. Si ha che $X = U \cup V$; inoltre U è omotopicamente equivalente a un punto, V è omotopicamente equivalente a $\mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}$ e $U \cap V$ è omotopicamente equivalente a un S^{2n-1} . Usando Mayer-Vietoris e l'induzione si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_{2k+1}(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \longrightarrow H_{2k}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\alpha} H_{2k}(\mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}) \longrightarrow H_{2k}(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_{2k-1}(S^{2n-1}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Essendo $H_{2k}(S^{2n-1}) = 0$, per $k > 0$ ed essendo α iniettiva per $k = 0$, si ha che $H_{2k+1}(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) = 0$, per $k \geq 0$. Si ha quindi

$$0 \longrightarrow H_{2k}(\mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}) \longrightarrow H_{2k}(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \longrightarrow H_{2k-1}(S^{2n-1}) \longrightarrow 0,$$

e dunque se $k \neq n$, si ha $H_{2k}(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \cong H_{2k}(\mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C})$. Per $k = n$ si ha $H_{2k}(\mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}) = 0$ e quindi $H_{2k}(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \cong H_{2n-1}(S^{2n-1}) \cong R$. Questo conclude la dimostrazione della (5.3).

Sia ora X una varietà complessa di dimensione 2, sia p un punto di X e \tilde{X} lo scoppimento di X in p . Vogliamo dimostrare che

$$H_k(\tilde{X}) \cong \begin{cases} H_k(X), & k \neq 2, \\ H_2(X) \oplus R, & k = 2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Sia $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ la proiezione. Sia

$$E = \pi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1\mathbb{C}$$

la retta eccezionale. Sia W un disco parametrico in X di centro p . Sia $V = \pi^{-1}(W)$ e $U = \tilde{X} \setminus E$. Si ha:

- $\tilde{X} = U \cup V$, $X = X \setminus \{p\} \cup W$,
- W è omotopicamente equivalente a un punto,
- $W \cap (X \setminus \{p\})$ è omeomorfo a $V \cap U$ ed è omotopicamente equivalente a un S^3 ,
- $X \setminus \{p\}$ è omeomorfo a U ,
- V è omotopicamente equivalente a $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

Per la funtorialità della successione di Mayer–Vietoris si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_k(S^3) & \longrightarrow & H_k(U) \oplus H_k(\mathbb{P}^1) & \longrightarrow & H_k(\tilde{X}) & \longrightarrow & H_{k-1}(S^3) & \longrightarrow & H_k(U) \oplus H_k(\mathbb{P}^1) \\ \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* \\ H_k(S^3) & \longrightarrow & H_k(X \setminus \{p\}) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_{k-1}(S^3) & \longrightarrow & H_k(X \setminus \{p\}) \oplus H_k(\mathbb{P}^1) \end{array}$$

Poiché $H_k(\mathbb{P}^1) = 0$, per $k \neq 2$, si ha, per il Lemma dei cinque che, per $k \neq 2$,

$$\pi_* : H_k(\tilde{X}) \rightarrow H_k(X)$$

è un isomorfismo. Per $k = 2$ si ha:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_k(X \setminus \{p\}) \oplus R & \longrightarrow & H_k(\tilde{X}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \\ 0 & \longrightarrow & H_k(X \setminus \{p\}) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e dunque $H_k(\tilde{X}) \cong H_k(X \setminus \{p\}) \oplus R \cong H_k(X) \oplus R$. Come si voleva dimostrare.

Calcoliamo infine l' omologia del toro T_n , a coefficienti in un campo R . Vogliamo mostrare che

$$H_k(T_n) \cong \begin{cases} R^{\oplus \binom{n}{k}}, & \text{per } k \leq n, \\ 0, & \text{per } k > n. \end{cases}$$

Procederemo per induzione su n , essendo il caso $T_1 = S^1$ già noto. Sia

$$T_n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{-volte}}$$

Sia $U^1 = S^1 \setminus \{i\}$, $V = S^1 \setminus \{-i\}$ e si ponga

$$\begin{aligned} U &= \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{(n-1)\text{-volte}} \times U^1, \\ V &= \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{(n-1)\text{-volte}} \times V^1. \end{aligned}$$

Chiaramente $T_n = U \cup V$. Inoltre sia U che V sono omotopicamente equivalenti a T_{n-1} , mentre $U \cap V$ è omotopicamente equivalente a due copie disgiunte di T_{n-1} . Si ha dunque una successione esatta

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow H_k(T_{n-1}) \oplus H_k(T_{n-1}) \xrightarrow{\alpha} H_k(T_{n-1}) \oplus H_k(T_{n-1}) \longrightarrow H_k(T_n) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_{k-1}(T_{n-1}) \oplus H_{k-1}(T_{n-1}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

L'applicazione α , lo si vede facilmente, è definita da

$$\alpha(x, y) = (x + y, -x - y).$$

Per ipotesi induttiva segue che

$$\text{rg}(\text{Ker}(\alpha)) = \binom{n-1}{k},$$

e si ottiene una successione esatta

$$0 \longrightarrow R^{\oplus \binom{n-1}{k}} \longrightarrow R^{\oplus 2 \binom{n-1}{k}} \longrightarrow R^{\oplus 2 \binom{n-1}{k}} \longrightarrow H_k(T_n) \longrightarrow R^{\oplus \binom{n-1}{k-1}} \longrightarrow 0$$

Dunque,

$$\text{rg } H_k(T_n) = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k},$$

come si voleva.

Vogliamo adesso parlare brevemente di cammini, un argomento che riprenderemo, in modo più esteso, quando introdurremo il primo gruppo di omotopia.

Un cammino, in uno spazio topologico X , non è altro che un 1-simplesso singolare in X , e cioè una applicazione continua

$$\sigma : \Delta_1 = [0, 1] \longrightarrow X.$$

Dati in X due cammini σ e τ tali che $\sigma(1) = \tau(0)$, si definisce il *cammino composto* $\sigma * \tau$, ponendo

$$\sigma * \tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq 2t \leq 1, \\ \tau(2t - 1), & 1 \leq 2t \leq 2. \end{cases}$$



Figura 11

Se ritorniamo alla definizione dell'operatore "suddivisione baricentrica" S , vediamo che

$$S(\sigma * \tau) = \sigma + \tau,$$

e quindi, in particolare si ha la relazione

$$\sigma * \tau \sim \sigma + \tau. \quad (5.5)$$

Dato un cammino σ si definisce il *cammino inverso* σ^{-1} , ponendo

$$\sigma^{-1}(t) = \sigma(1 - t).$$

Mostriamo ora che il cammino $\sigma * \sigma^{-1}$ è omotopo al cammino costante. L'omotopia può essere data come segue. Si pone

$$F(t, s) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq 2t \leq s, \\ \sigma(s), & s \leq 2t \leq 2 - s, \\ \sigma^{-1}(2t - 1), & 2 - s \leq 2t \leq 2. \end{cases}$$

Si osserva che $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ è continua che $F(t, 0) = \text{cost.} = \sigma(0)$, mentre $F(t, 1) = \sigma * \sigma^{-1}(t)$. Da ciò segue che

$$\sigma^{-1} \sim -\sigma. \quad (5.6)$$

Infatti, usando la (5.5), si ha

$$\begin{aligned} \sigma + \sigma^{-1} &\sim \sigma * \sigma^{-1} \\ &= (\sigma * \sigma^{-1})_*(1) = (\text{cost.})_*(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esercizi

1. Siano x, y, z coordinate di \mathbb{R}^3 . Calcolare i gruppi di omologia dello spazio $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) / z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$. Indicarne i generatori.

2. Sia X , lo spazio topologico ottenuto identificando un punto di S^1 con uno di S^3 : $X = S^1 \vee S^3$. Calcolare $H_i(X, \mathbb{Z})$.

3. Calcolare i gruppi di omologia a coefficienti interi di

$$V = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid XY \neq 0\}.$$

4. Calcolare i gruppi di omologia a coefficienti interi di $V = S^3 \setminus S^1$.

5. Siano m e n due interi positivi. Descrivere un' applicazione continua $F_{n,m} : T_2 \rightarrow T_2$ tale che il conucleo di

$$F_{n,m}^* : H_1(T^2, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{Z})$$

sia isomorfo a $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$.

6. Calcolare i gruppi di omologia a coefficienti interi dello spazio topologico

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x^2 = y, xy = z\}.$$

7. Sia $\mathcal{C} = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid X(X^2 + Y^2 - Z^2) = 0\}$. Calcolare i generatori di $H_i(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$, per $i \geq 0$.

8. Sia $n > 0$ un intero e $f : S^n \mapsto S^n$ un' applicazione continua. Sia $f_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z})$ l'omomorfismo indotto. Dimostrare che se $f_* \neq 0$, allora f è suriettivo.

9. Dimostrare che \mathbb{R}^n non è omeomorfo a \mathbb{R}^m , per $n \neq m$.

10. Sia $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definita da $f(z) = z^3 + 2z + 7$, per $z \in \mathbb{C}$ e $f(\infty) = \infty$. Calcolare $f_* : H_2(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$.

11. Sia $n > 0$ un intero. Dimostrare che non vi sono applicazioni continue $f : B^n \rightarrow B^n$ tali che $f(B^n) \subset S^{n-1}$ e la restrizione di f a S^{n-1} è l'identità.

12. (Teorema del punto fisso) Sia $n > 0$ un intero. Dimostrare che non vi sono applicazioni continue $f : B^n \rightarrow B^n$ prive di punti fissi.

13. Sia

$$r_i : S^n \mapsto S^n \quad i = 1, \dots, n+1$$

l'applicazione definita dalla riflessione rispetto all' iperpiano di equazione $x_i = 0$. Calcolare la corrispondente applicazione indotta in omologia.

14. Sia $a : S^n \mapsto S^n$ l'applicazione antipodale (i.e. $a(x) = -x$). Descrivere la corrispondente applicazione indotta in omologia.

15. Dimostrare il teorema fondamentale dell' algebra usando il fatto che $H_1(\mathbb{C}, \mathbb{Z}) \neq H_1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$.

6 Superfici topologiche compatte triangolate e orientate

Una proprietà fondamentale delle superfici di Riemann, che dimostreremo nel Cap. , è che esse sono *triangolabili e orientabili*. In questa sezione spieghiamo cosa sono le superfici topologiche triangolate e orientate, restringendo la nostra attenzione soprattutto al caso delle superfici compatte. In tutta la sezione, nè la struttura complessa nè quella differenziale giocheranno alcun ruolo. Di una superficie di Riemann studieremo solo la soggiacente struttura di varietà topologica di dimensione (reale) 2.

Sia dunque S una superficie topologica. Consideriamo il *triangolo standard* $\Delta_2 \subset \mathbb{R}^2$:

$$\Delta_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} .$$

Un *triangolo* T in S è, per definizione, l'immagine di Δ_2 secondo un omeomorfismo $\sigma : \Delta_2 \rightarrow T$. Si diranno *vertici* e *lati* di T le immagini, secondo σ , dei vertici e dei lati di Δ_2 . Una *triangolazione* della superficie topologica S consiste in una famiglia numerabile $\{T_1, \dots, T_n \dots\}$ di triangoli in S che soddisfa le seguenti proprietà

- a) $S = \cup T_i$.
- b) Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ allora T_i e T_j hanno a comune esattamente un vertice o esattamente un lato,
- c) Per ogni punto $p \in S$ esiste un intorno di p che incontra solo un numero finito di triangoli della triangolazione.

Si escludono, ad esempio, queste possibilità:

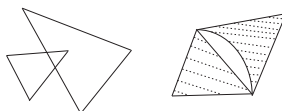


Figura 12

È da notare che la terza condizione implica che i vertici di una triangolazione costituiscono in S un insieme di punti isolati. Segue inoltre dalla definizione che, dato un punto p , l'interno dell'unione di tutti i triangoli a cui p appartiene, è un intorno di p omeomorfo a un disco:

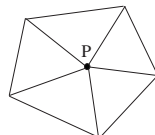


Figura 13

Una superficie triangolata S si dirà *orientabile* se è possibile orientare i singoli triangoli della sua triangolazione in modo che triangoli adiacenti inducano, sul loro lato comune, orientazioni opposte:

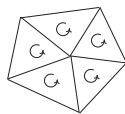


Figura 14

Concentriamo ora la nostra attenzione sulle superfici compatte. Diamo subito esempi di superfici compatte triangolabili e orientabili. La figura che segue mostra che la sfera può triangolarsi con 8 triangoli e la orientabilità di questa triangolazione è ovvia:

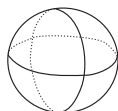


Figura 15

Un toro può pensarsi come lo spazio topologico quoziente ottenuto da un rettangolo per identificazione dei lati opposti. Più precisamente partiamo da un rettangolo, orientiamo a piacere il suo bordo ed identifichiamo il lato a (risp. b) con il suo opposto, preso con l'orientazione opposta a quella indotta dall'orientazione del bordo. Denoteremo questo lato, munito della orientazione opposta, col simbolo a^{-1} (risp. b^{-1}):

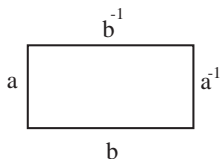
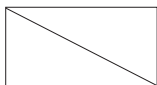
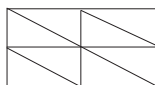


Figura 16

Il lettore osserverà che, tra le seguenti triangolazioni del rettangolo, le prime due *non* inducono una triangolazione del toro, mentre la terza fa del toro una varietà triangolata (e orientabile).



a)



b)



c)

Figura 17

Consideriamo, più in generale, un poligono regolare con $4g$ lati $g \geq 1$. Orientiamone il suo bordo e denotiamo i suoi lati, circolarmente ordinati, con i simboli

$$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, a_2^{-1}, b_2^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}.$$

I lati a_i, b_i verranno presi con l'orientazione indotta da quella del bordo, i lati a_i^{-1}, b_i^{-1} con quella opposta. Raffiguriamo il caso $g = 2$:

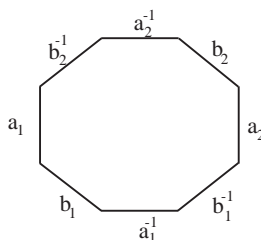


Figura 18

Ora consideriamo lo spazio topologico quoziente S ottenuto identificando a_i con a_i^{-1} e b_i con b_i^{-1} . Si ottiene come risultato un toro con g buchi, o, come si suol dire, una superficie di genere g



Figura 19

Per rendersene conto consideriamo il caso $g = 2$. Partiamo dall'ottagono e, prima di fare le identificazioni, tagliamolo in due (poi ci si dovrà ricordare di riattaccare i due pezzi). Eseguiamo nei due pezzi separati le identificazioni. Otteniamo due tori privi di un dischetto. Infine, identifichiamo i bordi dei due dischetti e otteniamo una superficie di genere 2.

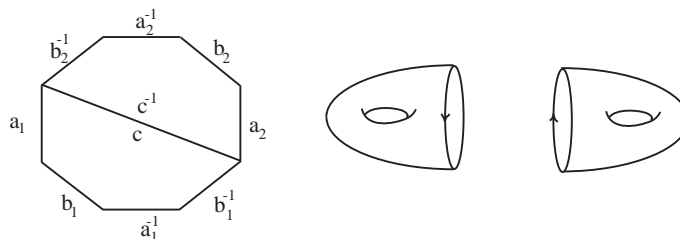


Figura 20

Lasciamo al lettore che facile verifica che la superficie S ottenuta è in effetti una varietà topologica (compatta). Per far vedere che una superficie così ottenuta è triangolabile e orientabile basta guardare la seguente figura:

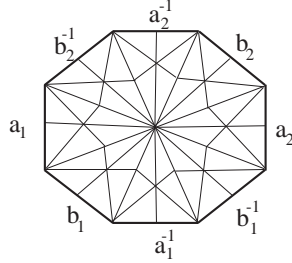


Figura 21

Vogliamo ora dimostrare che *una qualsiasi superficie compatta, triangolata e orientata, che non sia una sfera, è omeomorfa a una superficie compatta di genere $g \geq 1$* , e cioè si ottiene da una poligono con $4g$ lati secondo il procedimento appena descritto.

Sia dunque S una superficie topologica compatta, triangolata e orientata. Sia $\{T_1, \dots, T_n\}$ la sua triangolazione. Prendiamo il triangolo T_1 . Tra i rimanenti triangoli ce ne sarà uno che ha un lato a comune con T_1 . Chiamiamolo T_2 e attacchiamolo a T_1 per il lato comune. Si ottiene così uno spazio topologico omeomorfo e un quadrato: Tolti T_1 e T_2 , tra i rimanenti triangoli ce ne sarà uno che ha un lato a comune con T_1 o con T_2 ; chiamiamolo T_3 e attacchiamo T_3 ai primi due lungo il lato in questione. Si otterrà (uno spazio topologico omeomorfo a) un pentagono. Procedendo in questa maniera fino all'esaurimento dei triangoli si otterrà un poligono piano.

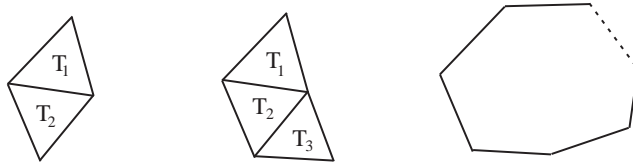


Figura 22

Il poligono ottenuto ha la seguente proprietà. Per riottenere la superficie S ogni lato del poligono dovrà essere identificato a uno e un solo lato del poligono stesso (e dunque i lati sono in numero pari). Non solo, se si orienta il bordo del poligono, e dunque ciascun lato, *i lati da identificarsi saranno identificati secondo orientazioni opposte*. Potremo così descrivere i lati, ordinati circolarmente, con un simbolo

$$aa^{-1}bcdec^{-1} \dots e^{-1}d^{-1} \dots b^{-1} \tag{6.1}$$

in cui sono racchiuse le informazioni appena descritte. Esprimiamo il risultato del processo appena descritto dicendo che S è omeomorfa al poligono con identificazioni descritte dal simbolo (19.1). Ebbene, dobbiamo mostrare che S , se non è una sfera, è omeomorfa a un poligono con $4g$ lati, e con identificazioni descritte dal simbolo

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \quad g \geq 1. \quad (6.2)$$

Supporremo d'ora in poi che S non sia una sfera. Diremo *equivalenti* due poligoni che rappresentano, per identificazione dei lati, la stessa superficie topologica S , (a meno di omeomorfismi). La riduzione di un poligono con identificazioni (19.1) a uno con identificazioni (19.2) richiede vari passi.

1° passo. Possiamo assumere che nel simbolo non vi siano espressioni del tipo aa^{-1} . Non essendo S una sfera, il poligono ha almeno 4 lati (se ne avesse solo due S sarebbe una sfera). Possiamo allora trasformare il nostro poligono in uno equivalente e nel cui simbolo il numero delle espressioni del tipo aa^{-1} sia calato di 1. Il passaggio dal primo poligono al secondo si fa così:

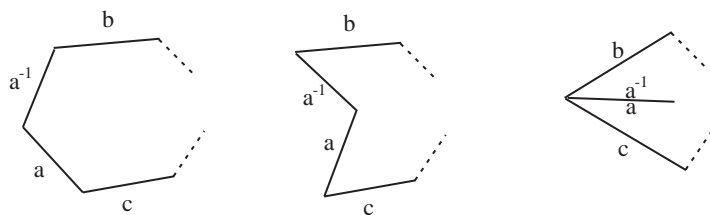


Figura 23

Procedendo in questo modo si eliminano tutte le coppie del tipo aa^{-1} .

2° passo. Possiamo assumere che tutti i vertici del poligono corrispondono a uno stesso punto di S . Per far vedere questo denotiamo con uno stesso simbolo il vertice del poligono che corrispondono a un medesimo punto di S . Supponiamo di avere un certo numero di vertici etichettati con la lettera P , se essi non esauriscono tutti i vertici del poligono, vi sarà un lato a che ha un vertice etichettato con P e uno con Q . Facciamo vedere che si può passare dal nostro poligono a uno equivalente, che abbia lo stesso numero di vertici, ma in cui sia diminuito il numero di vertici etichettati con Q e aumentato quello dei vertici etichettati con P . Il procedimento è quello raffigurato qui:

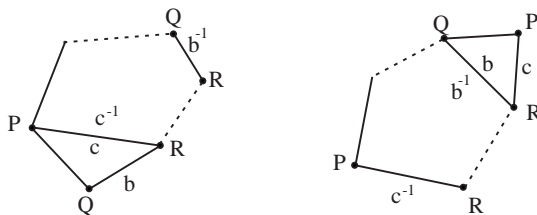


Figura 24

Completate queste mosse si avrà la cura di eliminare, come nel passo precedente, le coppie del tipo aa^{-1} che si siano accidentalmente formate. Procedendo in questo modo si completa il secondo passo.

3° passo. Sia a un lato del nostro poligono. Facciamo vedere che esiste un lato b tale che nel simbolo appaia la seguente configurazione:

$$\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$$

Se così non fosse si avrebbe la seguente situazione:

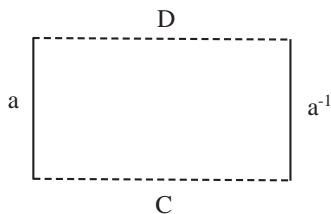


Figura 25

dove i lati di C (risp. di D) sono a coppie identificati tra loro e nessun lato di C è identificato a un lato di D . Una volta fatte le identificazioni si otterrebbe intorno ai due vertici di a la seguente situazione:

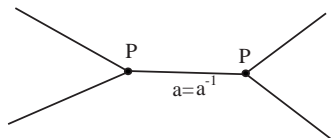


Figura 26

Per ottenere S si dovrebbero poi identificare i due vertici di a . Il punto in S corrispondente a P non avrebbe alcun intorno omeomorfo a un disco di \mathbb{R}^2 , e ciò è assurdo.

4° passo. Diremo che la coppia a, b è in buona posizione se nel simbolo appare la successione $\dots aba^{-1}b^{-1} \dots$. Il risultato sarà dimostrato se

dimostriamo che il nostro poligono è equivalente a uno in cui tutte le coppie sono in buona posizione. Per questo basterà dimostrare che si può passare dal nostro poligono a uno equivalente, avente lo stesso numero di vertici, e in cui vi è un maggior numero di coppie in buona posizione. Sia dunque a un lato che non sia in buona posizione con alcun altro lato. Per il passo precedente esiste un lato b tale che il simbolo contiene la sequenza $\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1}$. Il procedimento che si segue è raffigurato dalla seguente figura:

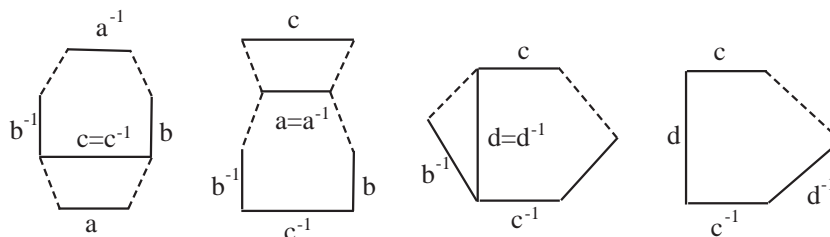


Figura 27

Si vede che in ogni passo si lasciano intatte le coppie che già si trovano in buona posizione. Iterando questo processo si completa la dimostrazione del nostro asserto.

In conclusione noi abbiamo dimostrato che una superficie compatta, triangolata e orientata è omeomorfa a una sfera oppure a una superficie di genere $g \geq 1$. Osserviamo però che fino ad ora *non* abbiamo dimostrato che superfici di genere diversi non sono omeomorfe, né che una sfera non possa essere omeomorfa a una superficie di genere $g \geq 1$. Che il genere sia un invariante topologico, lo dimostreremo nella prossima sezione, e dimostreremo anche che data una qualsiasi triangolazione di una superficie di genere $g \geq 0$ (per $g = 0$ si intenderà una sfera), detti v, l, t il numero dei vertici, dei lati e dei triangoli di questa triangolazione, allora

$$v - l + t = 2 - 2g .$$

Terminiamo questa sezione rispondendo a una domanda che a questo punto è sicuramente nell'aria. Data una superficie topologica S di genere $g \geq 2$ come è possibile introdurre in essa una struttura di varietà complessa? In effetti fino ad ora, gli unici esempi di superfici di Riemann compatte che abbiamo incontrato sono le curve algebriche piane proiettive non-singolari, le desingularizzazioni delle curve algebriche piane, aventi nodi come singolarità, e i tori complessi di dimensione (complessa) 1. Abbiamo esempi di superfici di Riemann di genere 0 e genere 1, ma non sappiamo ancora calcolare il genere di una curva piana a meno che non si tratti di una conica o una retta.

Mostriamo ora che ogni superficie topologica compatta (triangolata e orientata) di genere $g \geq 2$ può essere dotata di almeno una struttura complessa. Consideriamo quello che si chiama un paio di pantaloni.



Figura 28

È chiaro che ogni superficie di Riemann compatta di genere g può ottenersi a partire da $2g - 2$ paia di pantaloni facendo opportune identificazioni:

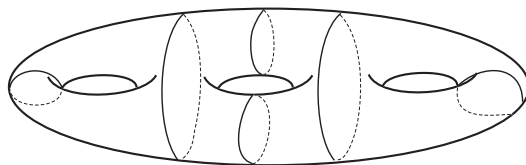


Figura 29

Ora l'interno di un paio di pantaloni può essere dotato di una struttura complessa, come si può vedere non appena lo si identifichi con lo spazio topologico X ottenuto da un disco \bar{D} privato di due dischi D_a e D_b , di raggi a e b contenuti nel suo interno.

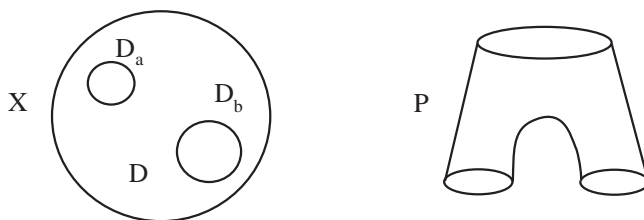


Figura 30

Naturalmente ci si può aspettare, e in effetti così avviene, che la struttura complessa su P cambi al cambiare dei raggi di D , D_a e D_b . Però, una volta fissata una X con la sua naturale struttura complessa (indotta da quella di D), e una identificazione tra X e P , anche P ha una struttura complessa. Consideriamo ora due pantaloni P e P' e attacchiamoli, per esempio in questo modo, ottenendo un nuovo spazio Z

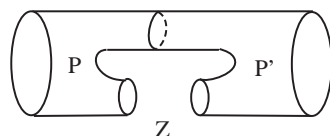


Figura 31

Vogliamo dare, allo spazio topologico così ottenuto, una struttura complessa. Fatto questo, sarà chiaro come dare una struttura complessa a una qualsiasi superficie di genere g . Così come abbiamo identificato P a X , identifichiamo in modo analogo, P' a uno spazio X' ottenuto da un disco togliendovi due dischi disgiunti contenuti nel suo interno. Per fare l'identificazione desiderata, dotando al contempo lo spazio Z di una struttura complessa, chiediamo una sola cosa: che D_a e D'_a abbiano lo stesso raggio $a = a'$. Procediamo nel modo seguente. Si può assumere, senza ledere la generalità, che D_a e D'_a abbiano centro nell'origine cosicché $D_a = D'_a$. Sia r un numero reale positivo minore di a , e tale che il disco di raggio $R = \frac{a^2}{r}$ e centro l'origine sia contenuto in $D' \setminus \overline{D'_b}$.

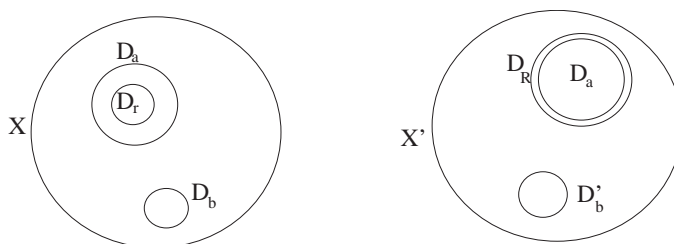


Figura 32

Si definisce un isomorfismo analitico

$$f : A = D_a \setminus \overline{D_r} \longrightarrow D_R \setminus \overline{D_a} = B$$

ponendo $f(z) = a^2/z$. Consideriamo la superficie di Riemann $X_r = D \setminus \overline{D_r}$ e attacchiamola a X' identificando A e B tramite f . Per il Lemma (14.3) del Capitolo 2, lo spazio topologico così ottenuto è naturalmente equipaggiato di una struttura complessa. È anche chiaro che questo spazio è omeomorfo allo spazio Z . Applicando questo procedimento ricorsivamente, si riesce a costruire una struttura complessa su ogni fissata superficie topologica di genere g . In effetti, si riesce anche a intuire che le strutture complesse su di una fissata superficie topologica S di genere $g > 1$ dipendono da $6g - 6$ parametri reali. Questi parametri sono, innanzi tutto le lunghezze dei $3g - 3$ cerchi, tolti i quali S risulta decomposta in pantaloni. La decomposizione in pantaloni poi, comporta che coppie di cerchi (della stessa lunghezza) vengono identificati, e ognuna di queste identificazioni è ben definita e meno di un angolo la cui variabilità

è compresa tra $-\infty$ e $+\infty$. Questi angoli forniscono $3g - 3$ parametri aggiuntivi.

7 Omologia delle superfici di Riemann compatte

Sempre ammettendo il teorema di triangolabilità, noi sappiamo che ogni superficie di Riemann compatta è omeomorfa a una superficie topologica compatta di genere g , con $g \geq 0$, ma ancora non siamo in grado di decidere, per esempio, se superfici di generi diversi siano topologicamente distinte. Il calcolo dei gruppi di omologia ci permetterà, tra l'altro, di risolvere questa questione. Vogliamo dimostrare il seguente

TEOREMA (7.1). *Sia X una superficie topologica compatta di genere g , e sia R un anello commutativo con unità. Allora*

$$H_k(X; R) \cong \begin{cases} R, & k = 0, k = 2, \\ R^{2g}, & k = 1, \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

Prima di dare la dimostrazione del Teorema 7.1 facciamo alcune considerazioni preliminari. Dati due spazi topologici X e Y connessi per archi, e due punti $x \in X$, $y \in Y$, denoteremo con il simbolo $X \vee Y$ lo spazio topologico ottenuto da X e Y identificando i due punti x e y :

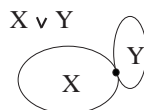


Figura 33

Definiremo poi un *bouquet di k sfere unidimensionali* come lo spazio

$$\beta_k = \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{k\text{-volte}}.$$

LEMMA (7.2). *Sia R un anello commutativo con unità. Allora*

$$H_i(\beta_k; R) \cong \begin{cases} R, & i = 0, \\ R^k, & i = 1, \\ 0, & i > 1 \end{cases}$$

Dim. Dimostremo il lemma per induzione su k . Per $k = 1$ il lemma non è che il calcolo della omologia di S^1 . Assumiamo dunque il lemma per i

bouquets β_h , con $h < k$. Ricopriamo β_k con i due aperti U e V disegnati in figura



Figura 34

Chiaramente si ha, in omotopia

$$U \simeq \beta_{k-1}, V \simeq \{p\}, U \cap V \simeq \{p\} \cup \{q\}.$$

Per la successione di Mayer-Vietoris e il teorema di omotopia si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow H_i(\beta_{k-1}) \longrightarrow H_i(\beta_k) \longrightarrow H_{i-1}(\{p\} \cup \{q\}) \xrightarrow{\alpha} H_{i-1}(U) \oplus H_{i-1}(V).$$

Se $i > 1$, l' induzione dice che $H_i(\beta_{k-1}) = 0$. Inoltre si ha $H_{i-1}(\{p\} \cup \{q\}) = 0$. Dunque, per $i > 1$, $H_i(\beta_k) = 0$. Per $i = 1$, si ha

$$\begin{aligned} \alpha : H_0(\{p\} \cup \{q\}) &\longrightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \\ [ap + bq] &\longmapsto [ap + bq, -(ap + bq)] = [(a + b)p, -(a + b)p] \end{aligned}$$

Ne segue che $\text{Ker } \alpha \cong R$, e quindi per induzione si ha una successione esatta

$$0 \longrightarrow R^{k-1} \longrightarrow H_1(\beta_k) \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Ciò implica che $H_1(\beta_k) \cong R^k$. Infine, il fatto che $H_0(\beta_k) \cong R$, discende dalla connessione per archi di β_k . Q. E. D.

Iniziamo ora la dimostrazione del teorema. Poiché una superficie topologica compatta di genere 0 è omeomorfa a una sfera S^2 , possiamo assumere che $g > 0$. Per definizione una superficie topologica compatta di genere $g \geq 1$ è ottenuta da un poligono con $4g$ lati identificandone i lati secondo il simbolo $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Sia $p \in X$ e sia U un intorno di p omeomorfo e un disco. Sia $V = X \setminus \{p\}$ Ovviamente si ha che $U \cap V \simeq S^1$. Si ha inoltre che

$$V = X \setminus \{p\} \simeq \beta_{2g}.$$

La figura illustra il caso $g = 2$.

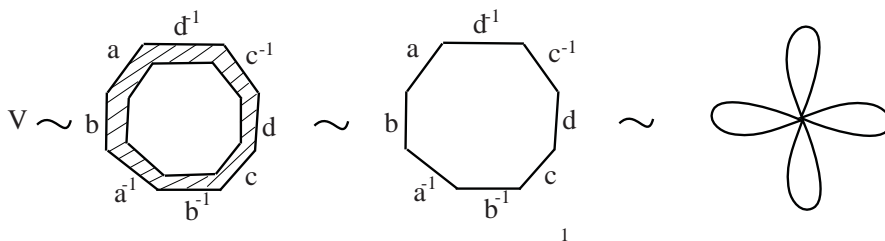


Figura 35

Usando Mayer–Vietoris e il Lemma 7.2 si ottiene per $i > 2$

$$0 = H_i(\beta_{2g}) \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_i(S^1) = 0$$

e dunque $H_i(X) = 0$, per $i > 2$. Il resto della successione di Mayer–Vietoris è

$$0 \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\alpha} H_1(\beta_{2g}) \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_0(S^1) \xrightarrow{\beta} H_0(\beta_{2g}).$$

Dobbiamo capire gli omomorfismi α e β . Tutti e due sono indotti dall’inclusione di S^1 in $V = X \setminus p$

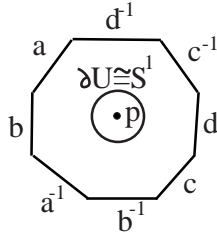


Figura 36

Ne segue che β è l'identità

$$H_0(S^1) \cong R \xrightarrow{\beta=1} R \cong H_0(\beta_{2g}).$$

Mentre se σ è il generatore di $H_1(S^1)$ si ha che $\alpha[\sigma]$ è la classe di omologia del ciclo $a_1 * b_1 * a_1^{-1} * b_1^{-1} * \dots * a_g * b_g * a_g^{-1} * b_g^{-1}$. Si applicano le (B.22) e (B.23) e si conclude che

$$\alpha[\sigma] = [a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \dots + a_g + b_g - a_g - b_g] = 0.$$

Dunque, dalla successione esatta lunga di Mayer–Vietoris, si deducono gli isomorfismi

$$\begin{aligned} H_2(X) &\cong H_1(S^1) \cong R, \\ H_1(X) &\cong H_1(\beta_{2g}) \cong R^{2g}. \end{aligned}$$

Come si voleva.

Q. E. D.

Come già avevamo osservato, il teorema appena dimostrato ci dice che il genere è un invariante topologico, e che dunque superfici di generi diversi non sono omeomorfe. Vogliamo ora dimostrare un importante risultato riguardante la caratteristica di Eulero–Poincaré.

Sia S una superficie topologica compatta triangolata e orientata. Denotiamo con $v(T)$ il numero dei vertici della triangolazione, con $l(T)$ il

numero dei lati, e con $t(T)$ il numero dei triangoli. La caratteristica di Eulero–Poincaré della triangolazione è l'intero

$$\chi(T) = v(T) - l(T) + t(T) .$$

Dimostreremo che questo intero *non dipende dalla triangolazione*, ma solo dal tipo topologico della superficie, e più precisamente mostreremo che se g è il genere di S allora

$$\chi(T) = \chi(S) = 2 - 2g . \quad (7.1)$$

Per dimostrare la (7.1), procederemo nel modo seguente. Innanzi tutto denoteremo con V l'insieme dei vertici della triangolazione e con L l'insieme dei suoi lati.

$$V \subset L \subset S$$

Si dice che V è lo 0-scheletro della triangolazione, mentre L ne è l'1-scheletro. Calcoleremo ora la successione di Mayer–Vietoris relativa al seguente ricoprimento aperto di S . Si considera, per ogni triangolo T , un disco Δ_T con centro nel baricentro B_T di T la cui chiusura è interamente contenuta nell'interno di T .

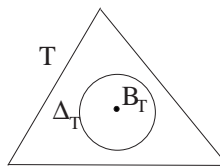


Figura 37

Si considerano poi i due aperti

$$A = S \setminus \bigcup_T \{B_T\}$$

$$B = \bigcup_T \Delta_T$$

chiaramente si ha che $A \cup B = S$, mentre, in omotopia si ha che:

$$A \simeq L ,$$

$$B \simeq \prod_T B_T ,$$

$$A \cap B \simeq \prod_T S_T^1 ,$$

dove S_T^1 è una copia di S^1 .



Figura 38

Consideriamo la successione di Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow H_2(L) \longrightarrow H_2(S) \longrightarrow H_2\left(\coprod_T S_T^1\right) \longrightarrow H_1(L) \longrightarrow H_1(S) \longrightarrow \\
 &\longrightarrow H_0\left(\coprod_T S_T^1\right) \longrightarrow H_0(L) \oplus H_0\left(\coprod_T B_T\right) \longrightarrow H_0(S) \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

Supponiamo che i coefficienti dell'omologia siano stati presi in un campo K , e denotiamo con $h_1(L)$ e $h_2(L)$ le dimensioni di $H_1(L)$ e $H_2(L)$ rispettivamente. La somma ottenuta dalle dimensioni degli spazi vettoriali che appaiono nella successione appena scritta è zero. Si ha dunque

$$h_2(L) - 1 + t - h_1(L) + 2g - t + (1 + t) - 1 = 0 ,$$

ovvero

$$h_2(L) - h_1(L) = 1 - 2g - t . \tag{7.2}$$

Calcolare l'omologia di L è facile. Si considera per ogni lato l di L , un piccolo intervallo I_l avente centro C_l di l e la cui chiusura sia contenuta in l . Si considerano poi gli aperti

$$\begin{aligned}
 C &= L \setminus \bigcup_l C_l \\
 D &= \bigcup_l I_l .
 \end{aligned}$$

Si ha che $L = C \cup D$, mentre, in omotopia:

$$\begin{aligned}
 C &\simeq V , \\
 D &\simeq \prod_l C_l , \\
 C \cap D &\simeq \prod_l S_l^0 ,
 \end{aligned}$$

dove S_l^0 è una copia di S^0 (e cioè un insieme di due punti).

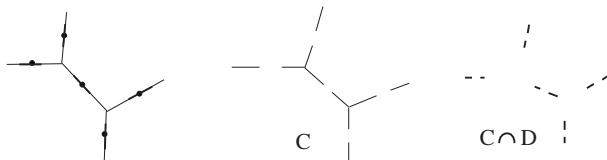


Figura 39

Per la successione di Mayer–Vietoris si ha:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_2(L) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow H_1(L) \longrightarrow H_0\left(\coprod_l S_l^0\right) \longrightarrow H_0(V) \oplus H_0\left(\coprod_l C_l\right) \longrightarrow H_0(L) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

e dunque si ha

$$\begin{aligned} h_2(L) &= 0, \\ h_1(L) - 2l + (v + l) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Queste relazioni, insieme con la (7.2), danno

$$v - l + t = 2 - 2g.$$

Q. E. D.

Esercizi

1. Sia T_2 immerso in \mathbb{R}^3 . Calcolare i gruppi di omologia dello spazio $X = \mathbb{R}^3 \setminus T_2$.
2. Calcolare i gruppi di omologia dello spazio X ottenuto togliendo due punti a una superficie di Riemann compatta di genere 2.
3. Calcolare i gruppi di omologia dello spazio X ottenuto identificando due punti di una superficie di Riemann compatta di genere 2.
4. Sia X il toro T_2 a cui è stato tolto un dischetto aperto e sia γ il bordo del dischetto, verificare che l'inclusione $i : \gamma \rightarrow X$ induce l'applicazione nulla in omologia.

8 Rivestimenti e gruppi di omotopia

In questa sezione svolgeremo la teoria dei rivestimenti topologici e della loro classificazione. In ciò che segue assumeremo che gli spazi topologici in questione siano tutti di Hausdorff, localmente connessi per archi e localmente contraibili. Ogni varietà topologica soddisfa queste condizioni. Assumeremo inoltre la conoscenza delle proprietà elementari del gruppo di omotopia $\pi_1(X, x_0)$ di uno spazio puntato (X, x_0) . Ci limitiamo a ricordare alcune definizioni di base. Si considerano i cammini chiusi con origine x_0 :

$$\gamma : I = [0, 1] \longrightarrow X, \gamma(0) = \gamma(1) = x_0,$$

gli elementi di $\pi_1(X, x_0)$ sono le classi di equivalenza $[\gamma]$ dove si dichiarano equivalenti cammini γ e σ se esiste una omotopia

$$F : I \times I \longrightarrow X$$

tale che

$$f(t, 0) = \gamma(t), \quad f(t, 1) = \sigma(t), \quad f(0, s) = f(1, s) = x_0,$$

Ricordiamo che una applicazione continua $p : Y \rightarrow X$ si dice un *rivestimento* se p è suriettiva e se ogni punto $x \in X$ possiede un intorno U connesso e contraibile tale che $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti U_i

$$p^{-1}(U) = \cup_{i \in I} U_i$$

tali che

$$p|_{U_i} : U_i \longrightarrow U$$

è un omeomorfismo. Tali intorni si dicono *ben rivestiti da p* . In particolare p è un omeomorfismo locale.

Osservazione 8.1 Dalle definizioni segue che se X è connesso, se $p : Y \rightarrow X$ è un rivestimento e se Z è una componente connessa (per archi) di Y allora anche $q = p|_Z : Z \rightarrow X$ è un rivestimento. Infatti, essendo p un omeomorfismo locale suriettivo, p è aperto e chiuso, e dunque $p(Z) = X$, essendo X connesso. Inoltre se $x \in X$ e se U è un intorno ben rivestito di x , allora $q^{-1}(U) = p^{-1}(U) \cap Z = \cup_{i \in I} (Z \cap U_i)$. Essendo Z una componente connessa di Y ed essendo U_i connesso, si possono avere solo due casi: o $Z \cap U_i = U_i$ oppure $Z \cap U_i = \emptyset$. In conclusione esiste $J \subset I$ tale che $q^{-1}(U) = \cup_{j \in J} U_j$.

Dati due rivestimenti $p : Y \rightarrow X$ e $q : Z \rightarrow X$ un *morfismo* di (Y, p) in (Z, q) è un diagramma commutativo di applicazioni continue

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & X \end{array} \quad (8.1)$$

Ogni componente connessa Y' di Y sarà portata in una componente connessa Z' di Z . Vogliamo dimostrare che $f : Y' \rightarrow Z'$ è un rivestimento. Per quello che abbiamo appena dimostrato sulle componenti connesse di un rivestimento non sarà restrittivo assumere che Y e Z siano connessi. Dimostriamo dunque che, in questo caso f è un rivestimento. Sia

$z \in \overline{f(Y)}$, sia $x = q(z)$ e sia U un intorno di x in X ben rivestito da p e da q . Poniamo

$$p^{-1}(U) = \cup_{i \in I} U_i \quad ; \quad q^{-1}(U) = \cup_{j \in J} V_j .$$

Sia $V = V_j$ la componente connessa di $q^{-1}(U)$ contenente z . Poiché $f(U_i)$ è connesso si ha che, o $f(U_i) \subset V$, oppure $f(U_i) \cap V = \emptyset$. Sia K il sottoinsieme di I tale che per $k \in K$ si abbia $f(U_k) \subset V$ essendo $z \in \overline{f(Y)}$, K non è vuoto. Si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U_k & \xrightarrow{f} & V \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & U \end{array}$$

Essendo $p|_{U_k}$ e $q|_V$ omeomorfismi anche f lo è. Ciò mostra che f è chiusa, e quindi suriettiva, che $f^{-1}(V) = \cup_{k \in K} U_k$, e che $f|_{U_k}$ è un omeomorfismo. Dunque f è un rivestimento.

Utilizzeremo i seguenti risultati fondamentali (cf. per esempio [] p. e [] p.).

Unicità del sollevamento 8.2 . *Sia Z connesso, $p : Y \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Z \rightarrow X$ una applicazione continua. Siano $F, G : Z \rightarrow Y$ due sollevamenti di f , e cioè due applicazioni continue tali che $pF = f$ e $pG = f$. Se, per qualche $y \in Y$, $F(y) = G(y)$, allora $F = G$.*

Sollevamento dei camini 8.3 . *Sia $p : Y \rightarrow X$ un rivestimento. Sia $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow X$ un cammino con punto iniziale in x_0 e sia $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{\alpha}$ di α con punto iniziale y_0*

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow \\ I & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

Sollevamento dell'omotopia 8.4 . *Sia $p : Y \rightarrow X$ un rivestimento. Sia $F : I \times I \rightarrow X$ una applicazione continua. Sia $\alpha(s) = F(s, 0)$, e x_0 il punto iniziale di α . Sia $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ e sia $\tilde{\alpha}$ il sollevamento di α con punto iniziale y_0 . Allora esiste un sollevamento \tilde{F} di F*

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \tilde{F} & \downarrow \\ I \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

con $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{\alpha}(s)$. In particolare se $F(0, t) = x_0$, e $F(1, t) = x_1$, posto $\beta(s) = F(s, 1)$, e $\tilde{\beta}(s) = \tilde{F}(s, 1)$, si ha $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ e $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.

Consideriamo un rivestimento

$$p : Y \rightarrow X ,$$

fissiamo $x_0 \in X$ e $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Denotiamo con $\sim c_{x_0}$ e $\sim c_{y_0}$ i cammini costanti in x_0 e y_0 . Il teorema del sollevamento dell'omotopia si dice che se $\tilde{\alpha}$ è un cammino chiuso in Y con punto iniziale y_0 , allora $\alpha = p\tilde{\alpha} \sim c_{x_0}$, se e solo se $\tilde{\alpha} \sim c_{y_0}$. In altri termini ciò vuol dire che l'omomorfismo

$$p_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

è *iniettivo*.

Prima di procedere ricordiamo la seguente terminologia. Sia G un gruppo. Un insieme F si dice un G -insieme se esiste una azione di G in F e cioè una applicazione

$$\begin{aligned} G \times F &\longrightarrow F \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

tale che $1x = x$ e $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$. Un morfismo di G insiemi F e F' è una applicazione $f : F \rightarrow F'$, tale che $f(gx) = gf(x)$, per ogni $g \in G$ e $x \in F$. Due punti x e y di F si dicono G -equivalenti se esiste $g \in G$ tale che $y = g \cdot x$. Le classi di G -equivalenza si dicono *orbite*. Dunque F è unione disgiunta di orbite:

$$F = \cup_{\alpha \in A} F_\alpha .$$

Inoltre se E è un'orbita di G in F e x un punto di E , lo *stabilizzatore* di x è il sottogruppo di G definito da

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\} .$$

Naturalmente si ha una iniezione di G -insiemi

$$\begin{aligned} G/G_x &\longleftarrow E \\ gG_x &\longmapsto g \cdot x . \end{aligned} \tag{8.2}$$

Ritorniamo ai rivestimenti, e studiamo l'azione del gruppo fondamentale della base sulle fibre di un rivestimento.

Lemma 8.5 *Sia $p : Y \rightarrow X$ un rivestimento. Si assuma X connesso. Sia $x_0 \in X$, sia $F = p^{-1}(x_0)$, e $G = \pi_1(X, x_0)$. Vi è allora una azione naturale di G su F . Le orbite di questa azione sono i sottoinsiemi $F_\alpha = F \cap Y_\alpha$ dove $Y = \cup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ è la decomposizione di Y in componenti connesse*

(per archi). Infine se $y \in F_\alpha$ lo stabilizzatore di y in G è $p_*\pi_1(Y, y) = p_*\pi_1(Y_\alpha, y)$. In particolare, se Y è connesso vi è una biezione

$$\frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(Y, y)} \longleftrightarrow p^{-1}(x_0)$$

Dim. Dato $y \in F$ e $[\gamma] \in G$ si definisce

$$[\gamma] \cdot y = \{\text{punto finale del sollevamento di } \gamma \text{ avente punto iniziale in } y\}$$

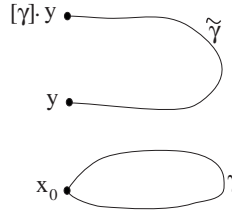


Figura 40

Che la definizione sia ben posta discende dal teorema del sollevamento dell'omotopia. Che si tratti di una azione discende dal teorema dell'unicità del sollevamento: il sollevamento di $\gamma*\beta$ con punto iniziale y si può ottenere sollevando prima γ con punto iniziale y e poi β con punto iniziale $[\gamma] \cdot y$. Che le orbite siano le F_α è anche chiaro perchè due punti z e y di uno stesso F_α sono collegabili da un cammino $\tilde{\gamma}$ la cui proiezione $\gamma = p\tilde{\gamma}$, per costruzione, soddisfa la condizione: $[\gamma]z = y$. Mentre, d'altro canto, due punti appartenenti a componenti distinte di Y non sono congiungibili da un cammino e dunque non possono essere G -equivalenti. Dato infine un punto $y \in F_\alpha$ la condizione $[\gamma]y = y$ si traduce nella condizione che il sollevamento $\tilde{\gamma}$ di γ con punto iniziale y sia un cammino chiuso, il che equivale a dire che $[\gamma] = p_*[\tilde{\gamma}]$ con $[\tilde{\gamma}] \in p_*\pi_1(Y, y)$.

Q.E.D.

Dato un rivestimento

$$p : Y \longrightarrow X$$

denoteremo con $\text{Aut}(Y, p)$ il gruppo degli automorfismi del rivestimento:

$$\text{Aut}(Y, p) = \{f : Y \longrightarrow Y \mid pf = p\}$$

Come abbiamo osservato all'inizio della sezione, ogni $f \in \text{Aut}(Y, p)$ è esso stesso un rivestimento. Dimostriamo che, se Y è connesso, f è un omeomorfismo. Siano $x_0 \in X$, $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ e $y_1 = f(y_0) \in p^{-1}(x_0)$. Essendo Y connesso si ha $p_*\pi_1(Y, y_0) = p_*\pi_1(Y, y_1)$. D'altro canto si ha $p_*\pi_1(Y, y_1) = p_*f_*\pi_1(Y, y_0)$ e $f_*\pi_1(Y, y_0) \subseteq \pi_1(Y, y_1)$ e dunque per l'iniettività di p_* si deduce che $f_*\pi_1(Y, y_0) = \pi_1(Y, y_1)$. Di nuovo in virtù del lemma, si trae che f è iniettiva e l'asserto è dimostrato.

È importante notare che se U è un aperto in X ben rivestito da p allora $\text{Aut}(Y, p)$ agisce su $p^{-1}(U)$ scambiando le componenti. Dunque se $p^{-1}(U) = \cup_{i \in I} U_i$, dato $f \in \text{Aut}(Y, p)$ esiste una biezione $\sigma_f : I \rightarrow I$ tale che

$$f(U_i) = U_{\sigma_f(i)} .$$

Per questa ragione le trasformazioni di $\text{Aut}(Y, p)$ si chiamano anche “trasformazioni deck”, (si pensa cioè all’azione di mischiare un mazzo di carte). Dal teorema dell’unicità del sollevamento segue immediatamente che $\text{Aut}(Y, p)$ agisce su Y liberamente i.e. se $f \in \text{Aut}(Y, p)$ e $f(y) = y$ per qualche y allora $f = id$.

Ritorniamo al lemma (8.5) e all’azione di $G = \pi_1(X, x_0)$ sulle fibre del rivestimento. Osserviamo che se

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & X \end{array}$$

è un morfismo di rivestimenti e se $E = p^{-1}(x_0)$ e $F = q^{-1}(x_0)$ allora

$$f|_E : E \longrightarrow F$$

è un morfismo di G -insiemi. Infatti se $\tilde{\gamma}$ è il sollevamento in Y di γ con punto iniziale y , allora $f\tilde{\gamma}$ è il sollevamento in Z di γ con punto iniziale $f(y)$:

$$\begin{aligned} f([\gamma]y) &= f(\tilde{\gamma}(1)) \\ &= (f\tilde{\gamma})(1) \\ &= [\gamma] \cdot f(y) . \end{aligned}$$

È inoltre chiaro che se

$$(Y, p) \xrightarrow{f} (Z, q) \xrightarrow{g} (T, r)$$

sono morfismi di rivestimenti di X , se

$$E = p^{-1}(x_0) , F = q^{-1}(x_0) , H = r^{-1}(x_0)$$

allora

$$g|_F \cdot f|_E = gf|_E : E \longrightarrow H .$$

Abbiamo quindi costruito un funtore

$$\begin{aligned} \{\text{Rivestimenti di } (X, x_0)\} &\longrightarrow \{\pi_1(X, x_0)\text{-insiemi}\} \\ (p : Y \rightarrow X) &\longmapsto p^{-1}(x_0) = F . \end{aligned} \quad (8.3)$$

Vogliamo mostrare che questo funtore è in effetti un isomorfismo di categorie. Per far questo costruiremo il cosiddetto *rivestimento universale*.

Teorema 8.6 *Sia X connesso. Allora esiste un rivestimento connesso $p: \tilde{X} \rightarrow X$ tale che*

- i) $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$, ovvero \tilde{X} è semplicemente connesso,
- ii) per ogni rivestimento connesso $q: Y \rightarrow X$, e dati $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $y_0 \in q^{-1}(x_0)$ un unico morfismo di rivestimenti

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & X & \end{array}$$

tale che $f(\tilde{x}_0) = y_0$.

Dim. Sia $x_0 \in X$ e si ponga

$$L(x) = \{\gamma_x : I \rightarrow X \mid \gamma_x(0) = x_0, \gamma_x(1) = x\}.$$

Si introduce in $L(x)$ una relazione di equivalenza \simeq , dicendo che $\gamma_x \simeq \gamma'_x$ se e solo se $\gamma_x * \gamma'^{-1}_x \sim 0$. Si definisce poi

$$\tilde{X} = \cup_{x \in X} L(x) / \simeq,$$

e la proiezione

$$\begin{aligned} p: \tilde{X} &\rightarrow X \\ [\gamma_x] &\mapsto x. \end{aligned}$$

Si equipaggia \tilde{X} della topologia determinata dalla base \mathcal{B} definita come segue. Per ogni $x \in X$ si considerano tutti gli intorni U_x di x che sono connessi e contraibili. Per ognuno di essi, e per ogni fissato $[\gamma_x]$, si definisce

$$\tilde{U}_{[\gamma_x]} = \{[\gamma_y] \mid \gamma_y = \gamma_x \beta_{xy}, \text{ con } \beta_{xy} \text{ cammino in } U_x \text{ da } x \text{ a } y\}$$

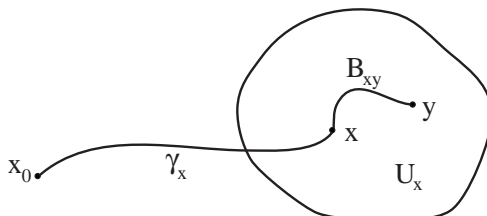


Figura 41

Dimostriamo che gli $\tilde{U}_{[\gamma_x]}$ soddisfano gli assiomi di una base per una topologia su \tilde{X} . Poichè la loro unione è \tilde{X} basta verificare che, se $[\gamma_z] \in \tilde{U}_{[\gamma_x]} \cap \tilde{U}_{[\gamma_y]}$, allora esiste $\tilde{U}_{[\gamma_z]}$ tale che

$$\tilde{U}_{[\gamma_z]} \subseteq \tilde{U}_{[\gamma_x]} \cap \tilde{U}_{[\gamma_y]} . \quad (8.4)$$

Supponiamo che $\tilde{U}_{[\gamma_x]}$ e $\tilde{U}_{[\gamma_y]}$ siano stati costruiti a partire da U_x e U_y rispettivamente. Per ipotesi $z \in U_x \cap U_y$. Sia $U_z \subset U_x \cap U_y$ consideriamo $[\gamma_t] \in \tilde{U}_{[\gamma_z]}$. Si ha la seguente figura:

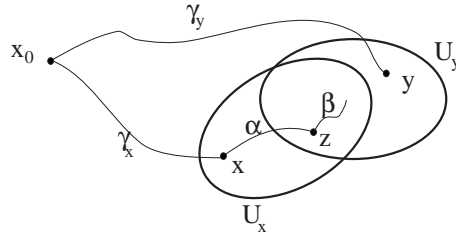


Figura 42

Poichè $[\gamma_z] \in U_{[\gamma_x]}$ si ha $\gamma_z \simeq \gamma_x * \alpha$. Dunque $\gamma_t \sim \gamma_x * \alpha * \beta$ e quindi $[\gamma_t] \in \tilde{U}_{[\gamma_x]}$. In modo analogo si dimostra che $[\gamma_t] \in \tilde{U}_{[\gamma_y]}$, e quindi vale la (8.4). A questo punto \tilde{X} è uno spazio topologico. Dimostriamo che è di Hausdorff. Siano $[\gamma_x], [\gamma'_x] \in \tilde{X}$ se $x \neq y$, basta prendere U_x e U_y disgiunti per essere sicuri che anche $\tilde{U}_{[\gamma_x]}$ e $\tilde{U}_{[\gamma'_x]}$ lo siano. Se $x = y$ e $[\gamma_x] \neq [\gamma'_x]$ allora $\tilde{U}_{[\gamma_x]} \cap \tilde{U}_{[\gamma'_x]} = \emptyset$ perché altrimenti si avrebbero cammini α_{xy} e β_{xy} in U_x con

$$\gamma_x * \alpha_{xy} \simeq \gamma'_x * \beta_{xy} .$$

Essendo U_x contraibile ciò implica che $\gamma_x \simeq \gamma'_x$ contro il supposto. Per dimostrare che p è continua basta mostrare che $p^{-1}(U_x)$ è aperto per ogni U_x . In effetti facciamo vedere che

$$p^{-1}(U_x) = \cup_{[\gamma_x] \in L(x)/\simeq} \tilde{U}_{[\gamma_x]} . \quad (8.5)$$

La cosa è chiara perché se $[\gamma_y] \in p^{-1}(U_x)$, allora $y \in U_x$ e, detto α_{xy} un cammino in U_x da x a y , e posto $\gamma_x = \gamma_y * \alpha_{xy}^{-1}$, si ha

$$\gamma_y \simeq \gamma_x * \alpha_{xy} ,$$

e ciò vuol dire $[\gamma_y] \in \tilde{U}_{[\gamma_x]}$. In definitiva $p^{-1}(U_x)$ è aperto. Nel dimostrare che \tilde{X} è di Hausdorff abbiamo anche mostrato che $\tilde{U}_{[\gamma_x]} \cap \tilde{U}_{[\gamma'_x]} = \emptyset$ per $[\gamma_x] \neq [\gamma'_x]$. Poichè $p(\tilde{U}_{[\gamma_x]}) = U_x$ si ha che p è aperta. Per dimostrare che p è un rivestimento basta mostrare che

$$q = p|_{\tilde{U}_{[\gamma_x]}} : \tilde{U}_{[\gamma_x]} \longrightarrow U_x$$

è un omeomorfismo, ed essendo p continua è aperta, basta dimostrare che è biettiva. La q è suriettiva perché, dato un punto y in U_x e un cammino α_{xy} da x a y in U_x , si ha che $[\gamma_x * \alpha_{xy}] \in U_{[\gamma_x]}$, e $p([\gamma_x * \alpha_{xy}]) = y$. È iniettiva perché per ogni $y \in U_x$, e per ogni coppia di cammini α_{xy} e β_{xy} in U_x da x a y si ha

$$\gamma_x * \alpha_{xy} \sim \gamma_x * \beta_{xy} .$$

Dimostriamo ora che \tilde{X} è connesso (per archi). Sia $\gamma : I \rightarrow X$ un cammino, si definisca $\gamma_t : I \rightarrow X$ ponendo $\gamma_t(s) = \gamma(st)$. Si pone poi

$$\tilde{\gamma}(t) = [\gamma_t] .$$

Si è così definita una applicazione $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{X}$. Per verificare che è continua dimostriamo che per ogni $t_0 \in I$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t_0) .$$

Consideriamo un intorno (connesso e contraibile) U_x del punto $x = \gamma(t_0)$, l'intorno $\tilde{U}_{[\gamma_{t_0}]}$ di γ_{t_0} e la proiezione

$$q : \tilde{U}_{[\gamma_{t_0}]} \longrightarrow U_x .$$

Per $|t - t_0| < \varepsilon$ si ha $\gamma(t) \in U_x$ e

$$\tilde{\gamma}(t) = [\gamma_t] \in \tilde{U}_{[\gamma_{t_0}]} .$$

Essendo q un omeomorfismo si ha

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \tilde{\gamma}(t) &= q^{-1} \lim_{t \rightarrow t_0} q\tilde{\gamma}(t) \\ &= q^{-1} \lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) \\ &= q^{-1} \gamma(t_0) \\ &= [\gamma_{t_0}] . \end{aligned}$$

Si osservi che $\tilde{\gamma}(0) = [c_{x_0}]$, e che $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma] \in \tilde{X}$. Dunque $\tilde{\gamma}$ è un cammino congiungente $[c_{x_0}]$ a $[\gamma]$. Essendo $[\gamma]$ un punto arbitrario di \tilde{X} , abbiamo dimostrato che \tilde{X} è connesso per archi. In effetti $\tilde{\gamma}$ altri non è che il sollevamento di γ a \tilde{X} con punto iniziale $[c_{x_0}]$. Osserviamo inoltre che, per definizione,

$$p^{-1}(x_0) = (L(x_0)/\simeq) = \pi_1(X, x_0) .$$

Per dimostrare che \tilde{X} è semplicemente connesso ragioniamo così. Gli elementi di $p_*\pi_1(\tilde{X}, c_{x_0})$ sono quelle classi $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ tali che il sollevamento di γ a \tilde{X} , con punto iniziale $[c_{x_0}]$, è chiuso. Ciò vuol dire, nella notazione appena introdotta, che $\tilde{\gamma}(1) = [c_{x_0}]$, ma noi abbiamo dimostrato che $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]$. Dunque $[\gamma] = [c_{x_0}] = 0$. Ne segue che $p_*\pi_1(\tilde{X}, c_{x_0}) = 0$, e quindi, per l'iniettività di p_* , anche $\pi_1(\tilde{X}, c_{x_0})$ svanisce. Dimostriamo

ora la parte ii) del Teorema. L'unicità è una conseguenza immediata di (8.3). Per definire f procediamo come segue. Dato un punto $[\gamma_x] \in \tilde{X}$, consideriamo il sollevamento $\tilde{\gamma}_x$ di γ_x a Y con punto iniziale y_0 e poniamo

$$f([\gamma_x]) = \tilde{\gamma}_x(1)$$

la definizione è ben posta perché se $[\gamma_x] = [\gamma'_x]$ allora è $\gamma_x * \gamma_x^{-1} \sim 0$ e quindi al suo sollevamento $\tilde{\gamma}_x * \tilde{\gamma}'_x^{-1}$ è chiuso, e in particolare $\tilde{\gamma}_x(1) = \tilde{\gamma}'_x(1)$. Sia ora U_x un intorno connesso, contraibile e ben rivestito da q . Se V è la componente di $q^{-1}(U_x)$ contenente $f([\gamma_x]) = \tilde{\gamma}_x(1)$ discende dalle definizioni che

$$f|_{\tilde{U}_{[\gamma_x]}} = (q|_V)^{-1} \circ p|_{\tilde{U}_{[\gamma_x]}}$$

ciò mostra che f è continua e che $p = qf$.

Q.E.D.

Corollario 8.7 . Sia $Y \xrightarrow{q} X$ un rivestimento connesso e semplicemente connesso di X allora (Y, q) è isomorfo al rivestimento universale di X .

Dim. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ il rivestimento universale. Per il teorema appena dimostrato dato comunque $y \in Y$ e $z \in p^{-1}q(y)$ esiste un unico morfismo $f : \tilde{X} \rightarrow Y$ con $f(z) = y$. Inoltre f è un rivestimento. Per concludere basta mostrare che f è iniettiva, ma questo è immediato perché essendo $\pi_1(Y, y) = 0$, si ha

$$|f^{-1}(y)| = |\pi_1(Y, y)/f_*\pi_1(\tilde{X}, z)| = 1 .$$

Q.E.D.

Corollario 8.8 . Sia (X, x_0) uno spazio topologico connesso e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ il suo rivestimento universale. Vi è allora un isomorfismo canonico.

$$\text{Aut}(\tilde{X}, p) \cong \pi_1(X, x_0) .$$

Dim. Per la parte ii) del teorema precedente, dato $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0) = p^{-1}(x_0)$, esiste un unico automorfismo $f_{[\gamma]} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tale che

$$f_{[\gamma]}([c_{x_0}]) = [\gamma] .$$

In modo esplicito l'automorfismo è definito da

$$f_{[\gamma]}([\gamma_x]) = [\gamma * \gamma_x] .$$

Ciò mostra che l'assegnazione

$$[\gamma] \longrightarrow f_{[\gamma]}$$

è un isomorfismo di $\pi_1(X, x_0)$ su $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$.

Vogliamo ora costruire il funtore inverso di quello costruito in (8.3). Sia (X, x_0) uno spazio puntato connesso e si ponga $G = \pi_1(X, x_0)$. Sia F un G -insieme. Sia (\tilde{X}, p) il rivestimento universale di X . Come abbiamo appena visto, possiamo identificare G con il gruppo degli automorfismi di \tilde{X} . Dunque G agisce su \tilde{X} . Sia ora dato un G -insieme F . Definiamo in $\tilde{X} \times F$ una relazione di equivalenza ponendo

$$(x, y) \sim_G (x', y') \iff x' = gx, y' = gy$$

(nel primo caso abbiamo l'azione di G su \tilde{X} , nel secondo quella di G su F). Poniamo

$$X_F = \tilde{X} \times F / \sim_G ,$$

denotiamo con $[x, y]$ la classe di (x, y) in $\tilde{X} \times_G F$, e definiamo

$$p_F : X_F \longrightarrow X$$

ponendo

$$p_F([x, y]) = p(x) .$$

La definizione è ben posta poiché $p(gx) = x$. Vogliamo dare a X_F una struttura di spazio topologico e dimostrare che p_F è un rivestimento con $p_F^{-1}(x_0) = F$. Diamo a F la topologia discreta, a $\tilde{X} \times F$ la topologia prodotto, e a X_F la topologia quoziente. Consideriamo ora un intorno U di X ben rivestito da $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Sia

$$p^{-1}(U) = \cup_{i \in I} U_i .$$

Per ogni $y \in F$ l'insieme $U_i \times \{y\}$ è aperto in $X \times F$. D'altro canto per la ii) del teorema 8.11, dati x e x' in U_i si ha $x' = gx$ solo se $x = x'$ e $g = 1$ e dunque se

$$\eta : \tilde{X} \times F \longrightarrow X_F$$

è la proiezione canonica, si ha che

$$\eta : U_i \times \{y\} \longrightarrow \eta(U_i \times \{y\})$$

è biettiva. È anche chiaro che, a meno che non sia $\eta(U_i \times \{y\}) = \eta(U_j \times \{z\})$, si ha

$$\eta(U_i \times \{y\}) \cap \eta(U_j \times \{z\}) = \emptyset .$$

Infatti, dire che l'intersezione tra $\eta(U_i \times \{y\})$ e $\eta(U_j \times \{z\})$ è non vuota, vuol dire che esistono $x \in U_i$, $x' \in U_j$ e $g \in G$ tali che $x' = gx$, $z = gy$, ma allora $gU_i = U_j$ e dunque $\eta(U_i \times \{y\})$ coincide con $\eta(U_j \times \{z\})$. In conclusione si è dimostrato che

$$p_F^{-1}(U) = \cup_{\substack{j \in J \\ k \in K}} \eta(U_j \times \{z_k\}) ,$$

che questa unione è disgiunta, e che

$$p_F : \eta(U_j \times \{z_k\}) \longrightarrow U$$

è un omeomorfismo. Dunque p_F è un rivestimento. Poiché per ogni $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esiste un unico $g \in G$ tale che $g\tilde{x} = \tilde{x}_0 = [c_{x_0}]$, si ha anche che

$$p_F^{-1}(x_0) = \{[c_{x_0}]\} \times F . \quad (8.6)$$

Se $h : E \rightarrow F$ è un morfismo di G -insiemi di definisce una applicazione

$$f_h : X_E \longrightarrow X_F$$

ponendo

$$f_h([x, y]) = [x, h(y)] .$$

Per definizione $p_F f_h = p_E$, e lasciamo a chi legge la cura di verificare che f_h è continua. Dunque f_h è un morfismo di rivestimenti. Sempre dalla definizione segue che $f_{hk} = f_h f_k$. Si è quindi definito un funtore

$$\begin{aligned} \{G\text{-insiemi}\} &\rightarrow \{\text{Rivestimenti di } (X, x_0)\} \\ F &\mapsto (p_F : \tilde{X}_F \rightarrow X) . \end{aligned} \quad (8.7)$$

Verifichiamo che questo funtore e quello definito in (8.3) sono uno l'inverso dell'altro. Infatti se $q : Y \rightarrow X$ è un rivestimento, posto $F = q^{-1}(x_0)$, l'isomorfismo canonico tra (Y, q) e (X_F, p_F) è dato da

$$\begin{aligned} X_F &\longrightarrow Y \\ [([\gamma_x], y)] &\longmapsto z \end{aligned}$$

dove z è il punto finale del sollevamento di $p\gamma_x$ con punto iniziale y . Viceversa, dato un G -insieme F , abbiamo già osservato che $p_F^{-1}(x_0) = \{[c_{x_0}]\} \times F$. Lasciamo come esercizio la verifica che, anche per quello che riguarda i morfismi, i due funtori sono l'uno l'inverso dell'altro.

Diamo ora alcune conseguenze di questa equivalenza di categorie. Innanzi tutto notiamo che i rivestimenti connessi puntati corrispondono biunivocamente ai G -insiemi transitivi puntati. Dichiariamo equivalenti due G -insiemi transitivi puntati (F, y) e (F', y') se vi è un isomorfismo $f : F \rightarrow F'$ tale che $f(y) = y'$. Similarmente dichiariamo equivalenti due rivestimenti puntati (Y, y_0, q) e (Y', y'_0, q') se vi è un isomorfismo $f : (Y, q) \rightarrow (Y', q')$ tale che $f(y_0) = y'_0$. Diremo poi che un rivestimento puntato connesso (Y, y_0, q) *domina* un rivestimento puntato (Z, z_0, η) , e scriveremo

$$q > \eta$$

se esiste un morfismo di $f : (Y, y_0, q) \rightarrow (Z, z_0, \eta)$ di rivestimenti puntati. Vi è una corrispondenza biunivoca:

$$\begin{aligned} \{G\text{-insiemi transitivi puntati}\}/\text{equiv.} &\longleftrightarrow \{\text{Sottogruppi di } G\} \\ (F, y) &\longmapsto G_y , \\ (G/H, H) &\longleftarrow H , \end{aligned} \quad (8.8)$$

e dunque vi è una corrispondenza biunivoca:

$$\begin{aligned} \{\text{Sottogruppi di } G\} &\longleftrightarrow \{\text{Rivestimenti puntati connessi di } X, x_0\}/\text{equiv.} \\ H &\longmapsto [p_{G/H} : (X_{G/H}, [c_{x_0}], H) \rightarrow (X, x_0)] \\ q_*\pi_1(Y, y_0) &\longleftarrow [q : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)] . \end{aligned} \quad (8.9)$$

La verifica che queste corrispondenze sono ben poste e biunivoche sono banali. Questa corrispondenza *rispetta gli ordinamenti* nel senso che

$$q > \eta \iff q_*\pi_1(Y, y_0) \subseteq \eta_*\pi_1(Z, z_0) . \quad (8.10)$$

In effetti esiste, ed è unico, un morfismo di G -insiemi puntati: $G/H \rightarrow G/H'$, se e solo se $H \subseteq H'$. Terminiamo con una osservazione riguardante gli automorfismi di un rivestimento

$$q : Y \longrightarrow X .$$

Vogliamo dimostrare che se

$$G = \pi_1(X, x_0) \quad , \quad H = q_*\pi_1(Y, y_0) ,$$

allora

$$\text{Aut}(Y, p) \cong N(H)/H , \quad (8.11)$$

dove $N(H)$ denota il normalizzatore di H . Poiché (Y, q) è isomorfo a $(X_{G/H}, p_{G/H})$, si ha per le corrispondenze (8.3) e (8.7) che

$$\text{Aut}(Y, p) = \text{Aut}_G(G/H) .$$

La formula (8.11) è ora ridotta a un facile risultato sui G -insiemi:

$$\text{Aut}_G(G/H) \cong N(H)/H .$$

Vorremmo ora formare il quoziente $Y/\text{Aut}(Y, p)$, e dimostrare che vi è un isomorfismo

$$f : Y/\text{Aut}(Y, p) \simeq X_{G/N(H)} . \quad (8.12)$$

In altri termini vogliamo dimostrare che

$$X_{G/H} / (N(H)/H) \simeq X_{G/N(H)} . \quad (8.13)$$

La cosa è ovvia insiemisticamente non appena si realizza che l'azione di $N(H)/H$ su $X_{G/H}$ è data da

$$\bar{h}([x, y]) = [x, \bar{h}y] .$$

Dobbiamo far vedere che, dotando $Y/\text{Aut}(Y, y)$ della topologia quoziente la (8.12) è bicontinua. Consideriamo un intorno U di X ben rivestito da q . Si ha

$$q^{-1}(U) = \cup_{i \in I} U_i .$$

Sappiamo che $\text{Aut}(Y, p)$ permuta gli U_i . Sia ora

$$\pi : Y \longrightarrow Y/\text{Aut}(Y, p) .$$

Si ha che o $\pi(U_i) = \pi(U_j)$ e allora c'è un $g \in \text{Aut}(Y, p)$ tale che $g(U_i) = U_j$, oppure $\pi(U_i) \cap \pi(U_j) = \emptyset$. Poiché $\text{Aut}(Y, p)$ opera liberamente ($gx = x$ per qualche $x \in Y \Leftrightarrow g = id$) si ha che

$$\pi : U_i \longrightarrow \pi(U_i)$$

è un omeomorfismo, mentre

$$\pi^{-1}\pi(U_i) = \cup_{g \in \text{Aut}(Y, p)} gU_i .$$

Da ciò segue che π è un rivestimento. Poiché vi è un morfismo di G -insiemi $G/H \rightarrow G/N(H)$ vi è un rivestimento

$$X_{G/H} \xrightarrow{\varphi} X_{G/N(H)} .$$

Consideriamo allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} Y \cong X_{G/H} & \xrightarrow{\varphi} & X_{G/N(H)} \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \\ Y/\text{Aut}(Y, p) & & \end{array}$$

dove f è per il momento una biezione di insiemi. È facile verificare che il diagramma commuta e che

$$\varphi\pi^{-1} : \pi(U_i) \longrightarrow \varphi(U_i)$$

è una biezione. Questo completa la dimostrazione della (8.12). Come conseguenza si ha che se $X_{G/H}$ è il rivestimento universale di X , se cioè $H = 0$, allora si ha un isomorfismo

$$\tilde{X}/G = X .$$

Esercizi

1. Verificare che $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$
2. Siano X e Y spazi topologici, $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, verificare che

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$$

3. Sia t un punto del toro T_2 .

Mostrare che $\pi_1(T_2, t) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Sia $\pi : T \rightarrow T_2$ un rivestimento connesso e finito di ordine n . Mostrare che T è un toro.

Mostrare che si può identificare l'omomorfismo π_* indotto in omotopia con una matrice due per due a coefficienti interi il cui determinante è uguale in modulo a n .

4. Sia X uno spazio topologico con $X = U \cup V$, U, V connessi e semplicemente connessi. Verificare che se $U \cap V \neq \emptyset$ è connesso per archi, allora X è semplicemente connesso.

Verificare che le sfere S^n ($n \geq 2$) sono semplicemente connesse.

5. Sia \tilde{X} uno spazio topologico connesso e semplicemente connesso. Sia $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento doppio e $x_0 \in X$. Dimostrare che $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$. Calcolare $\pi_1(\mathbb{P}^n \mathbb{R}, [1, 0, \dots, 0])$ per $n \geq 2$.

6. Sia $p : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'applicazione definita da

$$p(z) = (1/3)z^3 + z, p(\infty) = \infty.$$

Trovare i più grandi aperti X e Y dove p è un rivestimento.

7. Verificare che i funtori definiti da (8.3) e (8.7) sono uno l'inverso dell'altro.

8. Dimostrare che $SO(3)$ non è omeomorfo a $S^1 \times S^2$

9. Dimostrare che π_1 è un funtore tra la categoria degli spazi puntati e quella dei gruppi.

Gli esercizi dal numero 10 al numero 12 conducono a una dimostrazione del fatto che per uno spazio topologico X , connesso per archi, si ha che

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

(con $[G, G]$ intendiamo il commutatore di un gruppo G)

10. Sia $\psi : H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ l'applicazione che manda la classe di omotopia di un cammino chiuso γ nella sua classe di omologia.

Verificare che l'applicazione è ben definita, è un omomorfismo di gruppi e se X è connesso per archi, allora è anche suriettiva.

11. Fattorizziamo un cammino chiuso γ nel modo seguente:

$$\gamma = \prod_{i=1}^n \alpha_i^{e_i}$$

con α_i cammini non necessariamente distinti e $e_i = \pm 1$. Poniamo

$$\epsilon(\alpha_i) = \sum_{j=i} e_j.$$

Verificare che se $\epsilon(\alpha_i) = 0$ per ogni indice i , allora $[\gamma] \in [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$.

12. Sia γ un cammino chiuso omologo a 0, verificare che a meno di un cammino omotopo al cammino costante γ soddisfa le condizioni dell' esercizio precedente.

Dedurre da quanto sopra che

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

13. Sia Y uno spazio connesso per archi. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento topologico. Sia Z una componente connessa di X . Dimostrare che $\pi|_Z : Z \rightarrow Y$ è un rivestimento topologico.