

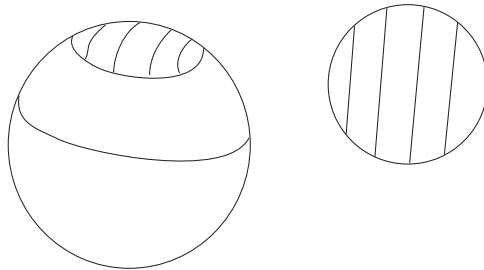
Capitolo 3

Esempi di varietà differenziali e analitiche

Introdurremo in questo capitolo i concetti di varietà differenziale e di varietà complessa. Anche se questo libro è dedicato principalmente alle superfici di Riemann, che sono particolarissime varietà differenziali, apparirà subito che, a partire da queste, si è naturalmente condotti a considerare altre varietà differenziali o analitiche, come gli spazi proiettivi, le grassmanniane, le superfici e le ipersuperfici algebriche, i tori complessi, e i gruppi di Lie. È dunque consigliabile avere, fino dall' inizio, un primo bagaglio di esempi. A questi è dedicato il presente capitolo.

1 Varietà differenziali e analitiche.

Le varietà differenziali sono, innanzi tutto, degli spazi topologici di Hausdorff che *localmente* somigliano a \mathbb{R}^n , così come una piccola calotta su una sfera bidimensionale somiglia a un disco di \mathbb{R}^2 :



Proprio pensando alle carte geografiche, in cui si rappresentano nel piano porzioni

della superficie terrestre, si dirà in generale che, dato uno spazio topologico X , una carta ¹ (di dimensione n) in X è un omeomorfismo φ tra un aperto U di X e un aperto V di \mathbb{R}^n

$$X \supset U \xrightarrow{\varphi} V \subset \mathbb{R}^n .$$

Una *varietà topologica di dimensione n* è uno spazio topologico di Hausdorff che ammette un ricoprimento in carte di dimensione n :

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n .$$

L'insieme di carte $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}\}$ prende il nome di *atlante per X* . L'ipotesi che lo spazio X sia di Hausdorff viene assunta per evitare di dover considerare casi patologici, come è quello dello spazio

$$X = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \{p, q\}$$

in cui si prenda come sistema fondamentale di intorni per il punto p , quello dato dagli insiemi $\{(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \cup \{p\}\}_{0 < \varepsilon < 1}$ e analogamente per il punto q . Un tale spazio, evidentemente non separato, possiede tuttavia un ricoprimento fatto di carte di dimensione 1:

$$\begin{array}{ccc} & p & \\ & \cdot & \\ \leftarrow & & \rightarrow \\ -1 & & 1 \\ & q & \\ & \cdot & \end{array}$$

Sempre avendo in mente l'esempio delle carte geografiche, sappiamo che, in ogni atlante geografico, vengono spesso rispettate alcune convenzioni. Si può convenire ad esempio che nel passare da una carta ad un'altra vengano mantenuti gli angoli, oppure la scala. In questo ultimo caso noi pretendiamo che, date due carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^2$, la regione $U_\alpha \cap U_\beta$, se non vuota, venga vista nello stesso modo (con la stessa scala) nella carta φ_α e nella carta φ_β . Richiediamo cioè che il cambiamento di carta $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$ mantenga la scala.

Dalle definizioni segue che per una varietà topologica i cambiamenti di carte sono continui anzi bicontinui. Nella definizione di varietà differenziale si pone un primo forte vincolo alla classe di applicazioni cui debbono appartenere i cambiamenti di carte, si richiede cioè che essi siano C^∞ . Formalmente si ha la seguente definizione.

Definizione 1.1 Una *varietà differenziale di dimensione n* è una varietà topologica X di dimensione n , munita di un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ che soddisfa la

¹A volte, con abuso di linguaggio, chiameremo carta il dominio U della carta φ .

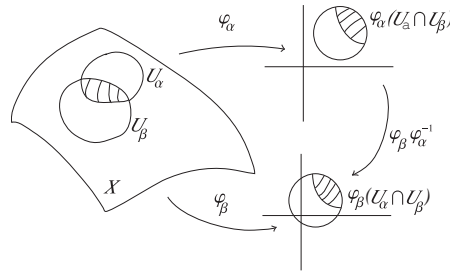
seguente proprietà:

per ogni $\alpha, \beta \in A$, il cambiamento di carte

$$\mathbb{R}^n \supseteq \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}} \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

è un' applicazione C^∞ .

Si richiede inoltre che tale atlante sia massimale nell' insieme degli atlanti che soddisfano la suddetta proprietà.



L'ultima condizione nella definizione precedente è di carattere tecnico. Essa serve solo a liberare la definizione stessa dalla scelta di un atlante particolare, all'interno di una classe di atlanti che individuano la stessa varietà differenziabile.

Spieghiamo brevemente questo punto. Dato un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ per X che soddisfi la condizione (1.1) esiste un unico atlante massimale $\hat{\mathcal{A}}$ che contenga le carte di \mathcal{A} e che soddisfi la condizione (1.1). Per definire $\hat{\mathcal{A}}$ basterà dire che una carta $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ di X appartiene ad $\hat{\mathcal{A}}$ se e solo se, per ogni $\alpha \in A$, tale che $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$, l'applicazione

$$\varphi \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi(U \cap U_\alpha)$$

è C^∞ . Se ne conclude che un atlante \mathcal{A} che soddisfi (1.1) individua un unico atlante massimale $\hat{\mathcal{A}}$ che lo contenga e che soddisfi (1.1), ed è quindi sufficiente a determinare su X una struttura di varietà differenziale.

Data una varietà differenziale X , quando diremo che (U, φ) è una carta di X sottointenderemo che la carta in questione appartiene all'atlante che definisce la struttura differenziale di X . Inoltre ci riferiremo spesso a una carta (U, φ) come a un sistema di coordinate locali per X e scriveremo

$$\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \in \mathbb{R}^n.$$

Naturalmente è possibile che su di una medesima varietà topologica si possano introdurre diverse strutture differenziali, che quindi corrispondono ad atlanti massimali non paragonabili. È del 1984 la scoperta, dovuta a M. Freedman, di strutture differenziali "esotiche" su \mathbb{R}^4 .

Introdotti gli *oggetti* della nostra categoria, introduciamo ora i *morfismi*. Siano X e Y due varietà differenziali. Una applicazione

$$f : X \rightarrow Y$$

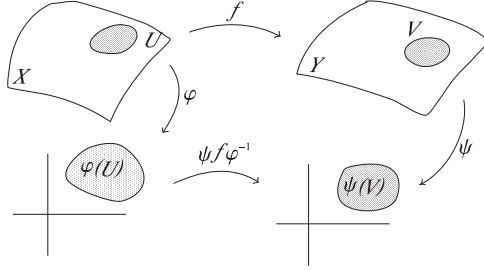
si dice *differenziabile*, o C^∞ , se soddisfa la seguente proprietà. Date comunque carte (U, φ) in X e (V, ψ) in Y tali che $f(U) \subset V$, l'applicazione

$$\mathbb{R}^n \supseteq \varphi(U) \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

è C^∞ . Dunque se $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, $\psi(q) = (y_1(q), \dots, y_m(q))$ e se

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$$

si richiede che, per ogni $1 \leq j \leq m$, le funzioni $y_j(x_1, \dots, x_n)$ siano C^∞ in $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.



Si dice poi che $f : X \rightarrow Y$ è un *diffeomorfismo* se f ammette una inversa f^{-1} che sia anch'essa C^∞ . Lasciamo infine che il lettore verifichi che, data una applicazione $f : X \rightarrow Y$, se esistono atlanti $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ per X e $\mathcal{B} = \{(V_i, \psi_i)\}$ per Y tali che, $\forall \alpha$, esiste $i(\alpha)$ per cui $f(U_\alpha) \subset V_{i(\alpha)}$, e per cui $\psi_{i(\alpha)} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ è una applicazione C^∞ di $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ in $\psi_{i(\alpha)}(V_{i(\alpha)})$, allora f è C^∞ . Conseguenza banale delle definizioni è che, data una carta (U, φ) di una struttura differenziale per X , e considerata su U la struttura differenziale indotta nel modo ovvio da quella di X , allora $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una applicazione C^∞ .

Come vedremo negli esempi alcune varietà differenziali (di dimensione pari) si presentano con una struttura ancora più forte: quella di varietà complessa. Una *varietà complessa di dimensione (complessa) n* è una varietà differenziale X di dimensione $2n$, equipaggiata di un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$,

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$$

tale che, non appena $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, l'applicazione

$$\mathbb{C}^n \supseteq \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}} \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{C}^n$$

è *analitica*. Questo vuole dire che se

$$\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (f_1(z_1, \dots, z_n), \dots, f_n(z_1, \dots, z_n)),$$

le funzioni $f_i(z_1, \dots, z_n)$ sono funzioni oloedorfe in ognuna delle variabili z_1, \dots, z_n . Come al solito, si richiede che tale atlante sia massimale nell'insieme di tutti gli atlanti che posseggono la suddetta proprietà. Naturalmente una varietà complessa è anche una varietà differenziale.

Definizione 1.2 Una varietà complessa di dimensione 1 prende il nome di *superficie di Riemann*.

Date due varietà complesse X , di dimensioni n e m rispettivamente, e Y una applicazione

$$f : X \rightarrow Y$$

si dice *analitica* o *olomorfa* se, date comunque carte locali (U, φ) in X e (V, ψ) in Y , tali che $f(U) \subset V$, l'applicazione

$$\mathbb{C}^n \supseteq \varphi(U) \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} \psi(V) \subseteq \mathbb{C}^m$$

è analitica. Il che vuol dire che, posto

$$\varphi(p) = (z_1(p), \dots, z_n(p)), \quad \psi(q) = (w_1(q), \dots, w_m(q))$$

e

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (w_1(z_1, \dots, z_n), \dots, w_m(z_1, \dots, z_n)),$$

allora ciascuna delle funzioni $w_j(z_1, \dots, z_n)$, $1 \leq j \leq m$ è analitica in $\varphi(U) \subset \mathbb{C}^n$. Si dice poi che $f : X \rightarrow Y$ è un isomorfismo bianalitico, o più semplicemente un *isomorfismo* se f ammette una inversa f^{-1} che sia analitica. Infine, una applicazione C^∞ , (risp. analitica) tra una varietà differenziale, (risp. complessa) X e \mathbb{R} , (risp. \mathbb{C}) prende il nome di *funzione C^∞* , (risp. *olomorfa*) su X , e l'anello delle funzioni C^∞ (risp. oloedorfe) su X si denota con il simbolo $C^\infty(X)$, (risp. $\mathcal{O}(X)$).

Sorgono spontanee alcune domande.

1) Date due varietà complesse è possibile che esse siano diffeomorfe ma non analiticamente equivalenti (e cioè non isomorfe come varietà complesse)?

2) Data una varietà differenziale di dimensione pari, è sempre possibile introdurre in essa una struttura di varietà analitica?

3) Data una varietà complessa "quante" strutture analiticamente distinte possono introdursi sulla soggiacente varietà differenziale?

4) Date due varietà differenziali è possibile che esse siano omeomorfe (e cioè isomorfe come varietà topologiche) ma non diffeomorfe?

5) Data una varietà topologica, è sempre possibile introdurre in essa una struttura di varietà differenziale?

6) Data una varietà topologica, "quante" strutture differenziali distinte possono introdursi sulla soggiacente varietà topologica?

Sono tutte domande legittime. Alcune sono profonde. Tutte hanno un qualche tipo di risposta. In alcuni casi la risposta è soddisfacente, in altri, come nel caso 6), si è ancora ai primissimi passi, e si brancola nel buio. Diamo ora degli esempi.

2 La circonferenza S^1 .

Per definizione $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. La topologia di S^1 è quella usuale, indotta da quella di \mathbb{C} . Si considera l'atlante $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ così definito. $U = S^1 \setminus \{1\}$, $V = S^1 \setminus \{-1\}$. Per $z \in U$, $\varphi(z) = \theta$, dove

$$z = e^{i\theta} \quad 0 < \theta < 2\pi ,$$

mentre per $z \in V$, $\varphi(z) = \eta$, dove

$$z = e^{i\eta} \quad -\pi < \eta < \pi .$$

Si ha : $U \cap V = A \cup B$, dove $A = S^1 \cap \{z \mid \text{Im}z > 0\}$ e $B = S^1 \cap \{z \mid \text{Im}z < 0\}$, mentre $\varphi(U \cap V) = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ e $\psi(U \cap V) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Dobbiamo quindi identificare l'applicazione

$$\psi\varphi^{-1} : (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \rightarrow (-\pi, 0) \cup (0, \pi) .$$

Ci si accorge subito che

$$\psi\varphi^{-1}(\theta) = \begin{cases} \theta , & \theta \in (0, \pi) \\ \theta - 2\pi , & \theta \in (\pi, 2\pi) , \end{cases} \quad (2.1)$$

e questa è una funzione C^∞ di θ . L'atlante \mathcal{A} definisce dunque su S^1 una struttura di varietà differenziale 1-dimensionale.

3 La sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$

È questa la compattificazione a un punto del piano complesso \mathbb{C} . Come insieme

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} .$$

Si prendono, a formare una base per gli intorni dei punti di $\hat{\mathbb{C}}$, innanzitutto gli intorni dei punti di \mathbb{C} , e poi gli insiemi $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > M\} \cup \{\infty\}$, che costituiscono una base per gli intorni di ∞ . Poniamo

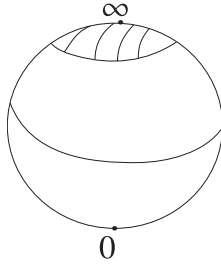
$$\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\} \quad \text{dove} \quad U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} , \quad V = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} ,$$

$$\varphi(z) = z , \quad \psi(p) = \begin{cases} 1/z & \text{se } p = z \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{se } p = \infty . \end{cases} \quad (3.1)$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \psi\varphi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} = \varphi(U \cap V) &\rightarrow \psi(U \cap V) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\mapsto \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Dunque $\psi\varphi^{-1}$ è analitica in $\varphi(U \cap V)$, e quindi l'atlante \mathcal{A} definisce su $\hat{\mathbb{C}}$ una struttura di varietà complessa di dimensione 1. Questa varietà complessa prende il nome di *sfera di Riemann*.



4 Ipersuperfici di \mathbb{R}^n

Daremo qui la prima fra le tante applicazioni del teorema delle funzioni implicite, che incontreremo spesso nell'illustrare gli esempi che seguono. Sia dunque $F(x_1, \dots, x_n)$ una funzione C^∞ definita in \mathbb{R}^n . Sia X il chiuso di \mathbb{R}^n definito da

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\},$$

e si consideri in X la topologia indotta da \mathbb{R}^n . Il teorema delle funzioni implicite ci dice: Sia $p = (a_1, \dots, a_n)$ tale che $F(a_1, \dots, a_n) = 0$. Si assuma che $(\partial F / \partial x_i)(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, per un qualche i . In questa ipotesi esiste un intorno W di p in \mathbb{R}^n , un intorno A del punto $(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n)$ in \mathbb{R}^{n-1} , e una funzione h , C^∞ in A , tali che, per ogni punto $(y_1, \dots, y_{n-1}) \in A$, si ha $F(y_1, \dots, h(y_1, \dots, y_{n-1}), \dots, y_{n-1}) = 0$. Inoltre, ogni punto $(x_1, \dots, x_n) \in W$ che soddisfi $F(x_1, \dots, x_n) = 0$, è della forma

$$(x_1, \dots, h(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n), \dots, x_n)$$

con $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \in A$.

La traduzione del teorema delle funzioni implicite in termini geometrici è la seguente. Sia $p = (a_1, \dots, a_n) \in X$. Si assuma $(\partial F / \partial x_i)(a_1, \dots, a_n) \neq 0$. Sia $\pi = \pi^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la proiezione definita da $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$. Allora esiste un intorno A di $\pi(p)$ in \mathbb{R}^{n-1} e un intorno U di p in X tali che:

- 1) la restrizione π_U^i di π^i a U :

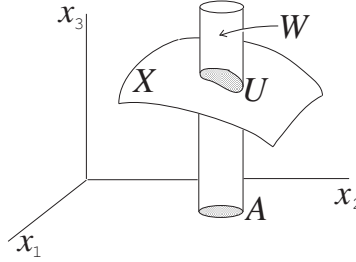
$$\pi_U^i : U \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

è un omeomorfismo,

2) posto

$$(\pi_U^i)^{-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = (y_1, \dots, \overbrace{h(y_1, \dots, y_{n-1})}^{i\text{-esimo posto}}, \dots, y_{n-1}) \quad (4.1)$$

la funzione h è C^∞ in A .



Si ha dunque, in particolare, che (U, π_U^i) è una carta per X . Supponiamo ora che, per ogni punto p in X , esista un i tale che $(\partial F / \partial x_i)(p) \neq 0$, e consideriamo l'insieme \mathcal{A} di tutte le carte di X ottenute applicando, come sopra, il teorema delle funzioni implicite. Supponiamo poi che (U, π_U^i) e (V, π_V^j) siano due di queste carte e che $U \cap V \neq \emptyset$. Vogliamo calcolare

$$\pi_V^j(\pi_U^i)^{-1} : \pi_U^i(U \cap V) \rightarrow \pi_V^j(U \cap V) .$$

Due casi possono presentarsi. Nel primo caso, $i = j$ e allora risulta

$$\pi_V^i(\pi_U^i)^{-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = (y_1, \dots, y_{n-1}) ,$$

che è ovviamente una applicazione C^∞ . Nel secondo caso $i \neq j$, e supponendo che $j < i$ e che $(\pi_U^i)^{-1}$ sia data dalla (4.1) si ottiene

$$\pi_V^j(\pi_U^i)^{-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = (y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, \overbrace{h(y_1, \dots, y_{n-1})}^{(i-1)\text{-esimo posto}}, \dots, y_{n-1})$$

che è ancora una applicazione C^∞ , essendo h una funzione C^∞ . Ne segue che \mathcal{A} è un atlante per X , e che, con questo atlante, X ha la struttura di varietà differenziale di dimensione $n - 1$.

Esempi notevoli di ipersuperfici sono le sfere n -dimensionali.

5 Sfera n -dimensionale

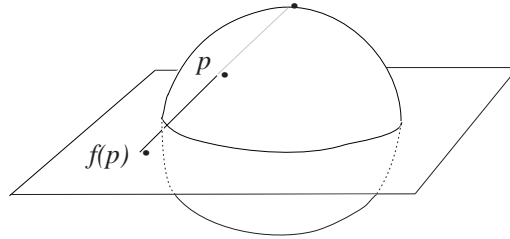
Sia $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$. Poiché la derivata rispetto a x_i

della funzione $F(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1$ è uguale a $2x_i$ non vi è alcun punto

di S^n in cui si annullino simultaneamente tutte le derivate parziali della F . Si procede dunque come nella sezione precedente e si dà a S^n una struttura di varietà n -dimensionale. Esaminiamo i primi due casi. Sul primo caso, quello di S^1 , c'è poco da dire, lo abbiamo già studiato. Si lascia solo al lettore la semplice verifica che la struttura di varietà differenziale, introdotta su S^1 nella sezione 2, è la *stessa* di quella che si ottiene usando il teorema delle funzioni implicite. Passiamo ad esaminare

$$S^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + t^2 = 1\}$$

e stabiliamo subito un diffeomorfismo f tra S^2 e la sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. Un possibile diffeomorfismo è dato dalla *proiezione stereografica*:



Si definisce cioè

$$f(p) = \begin{cases} (x/(1-t)) + i(y/(1-t)), & \text{se } p = (x, y, t) \neq (0, 0, 1) \\ \infty, & \text{se } p = (0, 0, 1). \end{cases} \quad (5.1)$$

È chiaro che f è C^∞ in $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$. Per vedere che f è C^∞ intorno a $(0, 0, 1)$ si usa come carta locale intorno a $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ la carta ψ , descritta nella sezione 3, e come carta locale intorno a $(0, 0, 1)$ la proiezione π sul piano (x, y) . Si ha:

$$\psi f \pi^{-1}((x, y)) = 1 / \left(\frac{x}{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}} + i \frac{y}{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right),$$

che è una applicazione C^∞ . L'inversa di f è data da

$$f^{-1}(p) = \begin{cases} \left((2\operatorname{Re} z)/(1 + |z|^2), (2\operatorname{Im} z)/(1 + |z|^2), (|z|^2 - 1)/(|z|^2 + 1) \right), & \text{se } p = z \in \mathbb{C}, \\ (0, 0, 1), & \text{se } p = \infty. \end{cases} \quad (5.2)$$

e si verifica, in modo simile che anche f^{-1} è C^∞ . Tramite il diffeomorfismo f , la sfera S^2 è così equipaggiata di una struttura di varietà complessa. Precisamente, se $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ è l'atlante di $\hat{\mathbb{C}}$ definito nella sezione 3, l'atlante $f^{-1}\mathcal{A} =$

$\{(f^{-1}U, \varphi f), (f^{-1}V, \psi f)\}$ definisce su S^2 una struttura di varietà complessa. Sia ora \mathcal{B} l'atlante su S^2 definito in termini di funzioni implicite. Chiaramente \mathcal{B} e $f^{-1}\mathcal{A}$ definiscono la *stessa struttura di varietà differenziale su S^2* , però \mathcal{B} non definisce su S^2 una struttura di varietà complessa. Consideriamo infatti il punto $p \equiv (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. Sia la proiezione π sul piano (x, t) che quella π' sul piano (y, t) sono carte intorno al punto p . D'altro canto l'applicazione $\pi'\pi^{-1}$ è definita da:

$$\begin{aligned}\pi'\pi^{-1}(u, v) &= \pi'(u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v) \\ &= (\sqrt{1-u^2-v^2}, v),\end{aligned}$$

e quindi, in termini della variabile complessa $z = u + iv$, si può scrivere

$$\pi'\pi^{-1}(z) = \sqrt{1-|z|^2} + i\operatorname{Im} z,$$

e questa *non* è una funzione olomorfa. Ora che abbiamo visto come si possa equipaggiare S^2 di una struttura di varietà complessa, sorge spontanea la domanda: è possibile dotare S^n di una struttura di varietà complessa? La risposta è: (ovviamente) no se n è dispari, no se $n = 2m \neq 2, 6$, mentre rimane aperto il caso di S^6 . La dimostrazione del fatto che S^n non ammette struttura complessa per $n = 2m \neq 2, 6$ è l'oggetto di un profondo teorema dovuto a Borel e Serre, la cui dimostrazione è molto al di là degli scopi di questi appunti.

6 Sottovarietà di \mathbb{R}^n definite da $m \leq n$ equazioni

Siano $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$ m funzioni C^∞ in \mathbb{R}^n . Consideriamo il chiuso X di \mathbb{R}^n definito così:

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_m(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Dotiamo X della topologia indotta. Sia $p \in X$ e si supponga che, per qualche multiindice $I = \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, il determinante jacobiano di f_1, \dots, f_m rispetto a x_{i_1}, \dots, x_{i_m} sia non nullo in p

$$\left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})}(p) \right| \neq 0.$$

Allora, traducendo in termini geometrici l'enunciato del teorema delle funzioni implicite, così come abbiamo fatto nel §4 per il caso $m = 1$, possiamo dire che, detta π^I la proiezione di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^{n-m} definita da

$$\pi^I(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_m}, \dots, x_n),$$

allora esiste un intorno A di $\pi^I(p)$ in \mathbb{R}^{n-m} e un intorno U di p in X , tale che

1) la restrizione π_U^I di π^I a U è un omeomorfismo di U sulla propria immagine,

2) scrivendo

$$\begin{aligned} & (\pi^I)^{-1}(y_1, \dots, y_{n-m}) = \\ & = (y_1, \dots, h_{i_1}(y_1, \dots, y_{n-m}), \dots, h_{i_m}(y_1, \dots, y_{n-m}), \dots, y_{n-m}), \end{aligned}$$

le funzioni $h_{i_k}(y_1, \dots, y_{n-m})$ sono C^∞ in A per $1 \leq k \leq m$.

Dunque, ragionando come nella sezione 4, si può concludere che, se in ogni punto p di X la matrice jacobiana di f_1, \dots, f_n rispetto a x_1, \dots, x_m ha rango massimo (eguale a m), allora prendendo come carte locali intorno a p delle proiezioni, secondo ciò che è dettato dal teorema delle funzioni implicite, si può dotare X di una struttura di varietà differenziale di dimensione $n - m$.

Diamo un esempio esplicito. Consideriamo in \mathbb{R}^3 il chiuso

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - x^2 = xy - z = 0\}$$

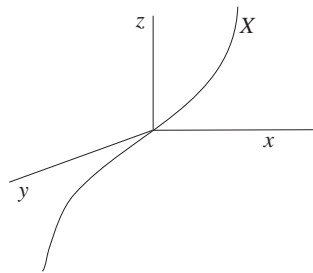
la matrice jacobiana di $y - x^2, xy - z$ rispetto a x, y, z è

$$\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ y & x & -1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

ed è quindi di rango massimo (in ogni punto di \mathbb{R}^3 e quindi a maggior ragione di X). Ne segue che X è una varietà 1-dimensionale. È anche facile vedere che l'applicazione

$$f: \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^3$$

definita da $f(t) = (t, t^2, t^3)$ è un diffeomorfismo.



7 Sottovarietà complesse di \mathbb{C}^n definite da $m \leq n$ equazioni

Vogliamo studiare il luogo delle soluzioni comuni a m equazioni

$$F_1(z_1, \dots, z_n) = \dots = F_m(z_1, \dots, z_n) = 0$$

in \mathbb{C}^n , dove F_1, \dots, F_m sono funzioni *analitiche*. Iniziamo col ricordare una osservazione sulle funzioni olomorfe di una variabile complessa. Consideriamo una funzione complessa $f(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$ e poniamo, come al solito,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) .$$

Supponiamo che f sia olomorfa. Le equazioni di Cauchy-Riemann ci dicono allora che

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 . \quad (7.1)$$

Studiamo come primo caso il luogo

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid F(z, w) = 0\}$$

dove F è analitica. Scriviamo $z = x + iy$, $w = \xi + i\eta$ e $F(z, w) = u(x, y, \xi, \eta) + iv(x, y, \xi, \eta)$. Un altro modo di descrivere X è:

$$X = \{(x, y, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^4 \mid u(x, y, \xi, \eta) = v(x, y, \xi, \eta) = 0\} .$$

Supponiamo ora che per un punto $p = (a + ib, \alpha + i\beta) \in X$ si abbia $(\partial F / \partial w)(p) \neq 0$. Per quello che abbiamo appena visto in (7.1), si ha che

$$\left| \frac{\partial F}{\partial w}(p) \right|^2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}(p)$$

e dunque, per il teorema delle funzioni implicite, esistono un intorno $A \subset \mathbb{R}^2$ di (a, b) e funzioni C^∞ reali $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ definite in A tali che $\xi(a, b) = \alpha$, $\eta(a, b) = \beta$ e

$$u(x, y, \xi(x, y), \eta(x, y)) = v(x, y, \xi(x, y), \eta(x, y)) = 0 ,$$

o equivalentemente, un intorno $A \subset \mathbb{C}$ di $a + ib$ e una funzione C^∞ complessa $h(z, \bar{z}) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ definita in A , tale che $h(a + ib) = \alpha + i\beta$ e

$$F(z, h(z, \bar{z})) = 0 , \quad z \in A .$$

Ora derivando questa identità rispetto a \bar{z} , e ricordando che $F(z, w)$ è analitica si ottiene

$$\frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial w}(z, h(z, \bar{z})) \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0 , \quad z \in A .$$

Poiché per ipotesi $(\partial F / \partial w)(a + ib, h(a + ib)) \neq 0$ si può assumere, restringendo A se necessario, che $(\partial F / \partial w)(z, h(z, \bar{z})) \neq 0$ in A . Ma allora $\partial h / \partial \bar{z} = 0$ in A e quindi $h(z)$ è olomorfa in A . In conclusione se $(\partial F / \partial w)(p) \neq 0$ e se $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ è la proiezione definita da $\pi(z, w) = z$, allora esiste un intorno $A \subset \mathbb{C}$ di $\pi(p)$ tale che la restrizione π_U di π a un opportuno intorno U di p , è un omeomorfismo di U su A e inoltre

$$\pi^{-1}(z) = (z, h(z)) , \quad z \in A ,$$

con h olomorfa in A . Procedendo ora come nella sezione 4, si deduce che, se la condizione $((\partial F/\partial z)(p), (\partial F/\partial w)(p)) \neq (0, 0)$ è verificata per ogni punto p di X , allora X ha la struttura di varietà complessa di dimensione 1 e dunque anche di varietà differenziale di dimensione 2. Per esempio

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^n + w^n = 1\}$$

è una varietà complessa di dimensione 1. Infatti se $F(z, w) = z^n + w^n - 1$, allora $(\partial F/\partial z, \partial F/\partial w) = (nz^{n-1}, nw^{n-1})$ e il punto $(0, 0)$ non appartiene a X . In conclusione abbiamo dimostrato che le curve algebriche piane non singolari posseggono una struttura naturale di superficie di Riemann.

In modo del tutto simile se $F(z_1, \dots, z_n)$ è una funzione analitica, se

$$X = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid F(z_1, \dots, z_n) = 0\}$$

e se per ogni punto $p \in X$ esiste almeno una derivata parziale di F che non si annulla in p allora X è una varietà complessa di dimensione $n - 1$. Una tale varietà prende il nome di *ipersuperficie non-singolare*.

Più in generale, siano $F_1(z_1, \dots, z_n), \dots, F_m(z_1, \dots, z_n)$ funzioni analitiche. Sia

$$X = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid F_1(z_1, \dots, z_n) = \dots = F_m(z_1, \dots, z_n) = 0\}.$$

Se in ogni punto $p \in X$ lo jacobiano

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}(p)$$

ha rango massimo (uguale a m), allora, prendendo un atlante costituito di carte definite da opportune proiezioni su spazi coordinati, si dà a X una struttura di varietà complessa di dimensione $n - m$. Per esempio

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 - y = xy - z = 0\}$$

è una varietà complessa di dimensione 1 che è bianaliticamente isomorfa a \mathbb{C} secondo l'isomorfismo bianalitico

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow X \\ t &\mapsto (t, t^2, t^3). \end{aligned}$$

8 Sottovarietà immerse e immersioni non-singolari

Daremo la definizione di sottovarietà immersa simultaneamente nel caso differenziale e in quello analitico. Sia dunque X una varietà differenziabile (analitica) di dimensione n .

Definizione 8.1 *Un sottoinsieme $Y \subset X$ è una sottovarietà immersa di X di dimensione $n - m$, se Y è un chiuso di X e se per ogni punto $p \in Y$ esiste una carta locale (U, φ) definita in un intorno di p*

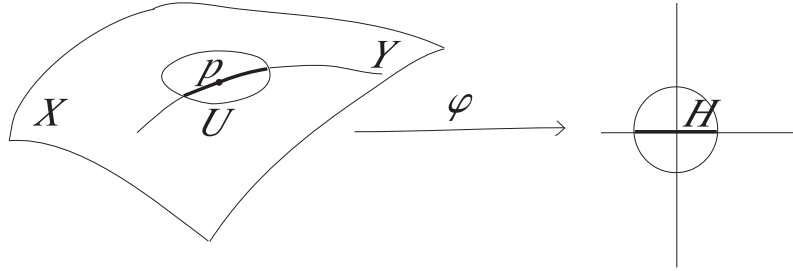
$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\text{risp. } \mathbb{C}^n)$$

tale che

$$U \cap Y = \varphi^{-1}(H) \tag{8.1}$$

dove

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ (risp. } \mathbb{C}^n) \mid x_1 = \dots = x_m = 0\}.$$



È chiaro che l'atlante $\{(U \cap Y, \varphi|_{U \cap Y}) : (U, \varphi) \text{ soddisfa (8.1)}\}$ definisce su Y una struttura di varietà differenziale (analitica) $(n - m)$ -dimensionale. Facciamo ora vedere che le varietà trattate nei paragrafi 4,5,6,7 sono sottovarietà immerse di \mathbb{R}^n , o di \mathbb{C}^n , nel senso appena specificato. Consideriamo il caso di \mathbb{R}^n . Sia

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_m(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

con le f_i funzioni C^∞ a jacobiano di rango massimo nei punti di X . Sia $p \in X$. Dobbiamo trovare una carta $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ in un intorno di p in \mathbb{R}^n , tale che

$$U \cap X = \varphi^{-1}(\{(y_1, \dots, y_n) \in \varphi(U) \mid y_1 = \dots = y_m = 0\}). \tag{8.2}$$

Supponiamo, per semplicità di notazione, che sia

$$\left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(p) \right| \neq 0$$

e consideriamo l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definita da

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n).$$

La matrice jacobiana dell'applicazione ψ rispetto a x_1, \dots, x_n è

$$J(\varphi) = \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_m, x_{m+1}, \dots, x_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} & 0 \\ * & I \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

e dunque $|J(\varphi(p))| \neq 0$. Per il *Teorema delle funzioni inverse* φ è localmente un diffeomorfismo. Esiste cioè un intorno U di p tale che

$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$$

è C^∞ , con inversa C^∞ . In particolare φ è una carta per \mathbb{R}^n intorno a p e dalla sua definizione segue immediatamente che la (8.2) è soddisfatta.

Prima di dare la definizione di immersione non-singolare, ricordiamo il fatto seguente. Date due applicazioni C^∞

$$\mathbb{R}^m \supset U \xrightarrow{F} V \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^n \supset V \xrightarrow{G} W \subset \mathbb{R}^k,$$

la matrice jacobiana di GF è il prodotto delle matrici jacobiane di G e di F :

$$J(GF) = J(G)J(F). \quad (8.4)$$

Se ora consideriamo una applicazione C^∞ tra due varietà differenziali:

$$f : Y \rightarrow X$$

e un punto $p \in Y$, ha senso parlare di *rango della matrice jacobiana di f in p* . Lo si definisce così: si considerano carte locali (U, φ) intorno a p e (V, ψ) intorno a $f(p)$, tali che $f(U) \subset V$ e si pone:

$$\text{rg}_p J(f) = \text{rg}_{\varphi(p)} J(\psi f \varphi^{-1}).$$

Che la definizione sia ben posta discende immediatamente dalla (??), perché se (U', φ') e (V', ψ') sono altre carte si ha

$$\psi' f \varphi'^{-1} = \psi' \psi^{-1} \circ \psi f \varphi^{-1} \circ \varphi \varphi'^{-1}$$

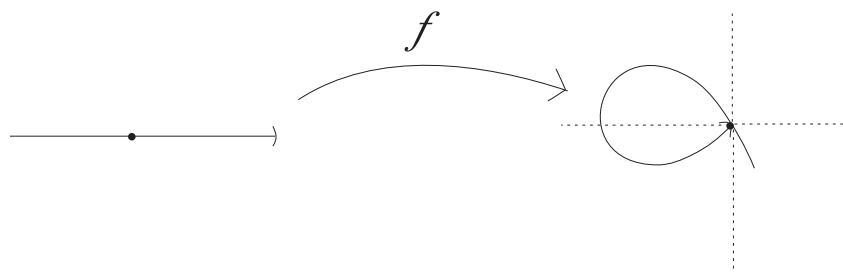
le matrici jacobiane $J(\psi' \psi^{-1})$ e $J(\varphi \varphi'^{-1})$ sono evidentemente matrici invertibili. Possiamo ora dare la definizione di immersione non-singolare.

Definizione 8.2 Sia $f : Y \rightarrow X$ una applicazione C^∞ (risp. analitica) tra due varietà differenziali (risp. complesse). Si dice che f è una immersione non-singolare se valgono le seguenti proprietà:

- i) f è un omeomorfismo tra Y e $f(Y)$, dove si dà a $f(Y)$ la topologia indotta.
- ii) in ogni punto di Y il rango di f è massimo.

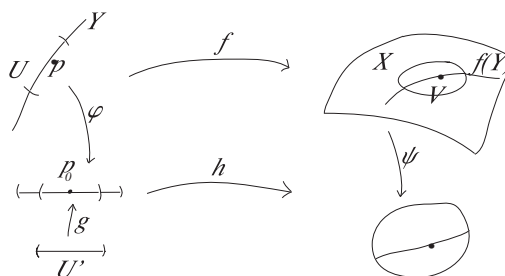
Per comprendere il senso di queste condizioni, diamo immediatamente un esempio di una applicazione C^∞ e *iniettiva* che soddisfi ii) ma non i). Si pone

$$Y = \{t \in \mathbb{R} \mid t < 1\}, \quad X = \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$$



Dimostriamo ora che se $f : Y \rightarrow X$ è una immersione non-singolare, e se $f(Y)$ è chiuso in X , allora $f(Y)$ ha, in modo naturale, una struttura di sottovarietà immersa in X . Tratteremo solo il caso C^∞ , essendo quello analitico del tutto simile. La condizione i) ci assicura che per ogni punto p in Y , e per ogni carta sufficientemente piccola (U, φ) intorno a p , esiste una carta (V, ψ) per X intorno a $f(p)$ tale che $f(U) = f(Y) \cap V$. A questo punto è sufficiente dimostrare che $\psi f(U)$ è una sottovarietà immersa di $\psi(V)$. Poniamo $h = \psi f \varphi^{-1}$ e $p_0 = \varphi(p)$,

$$\mathbb{R}^m \supset \varphi(U) \xrightarrow{h} \psi(V) \subset \mathbb{R}^n, \quad h = (h_1, \dots, h_n).$$



Ora, lo jacobiano di h ha rango massimo nel punto p_0 . Supponiamo per semplicità che

$$\left| \frac{\partial(h_1, \dots, h_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \right| (p_0) \neq 0.$$

Allora, per il teorema delle funzioni inverse, a meno di restringere U se necessario, possiamo trovare un aperto $U' \subset \mathbb{R}^m$ e un diffeomorfismo

$$g : U' \rightarrow \varphi(U)$$

tale che

$$h \circ g(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, R_{m+1}(x_1, \dots, x_m), \dots, R_n(x_1, \dots, x_m))$$

dove le R sono funzioni C^∞ . Chiaramente per dimostrare che $h\varphi(U)$ è una sottovarietà immersa basta dimostrare che $hg(U')$ lo è. Ma questo è quello che abbiamo mostrato all' inizio di questa sezione essendo:

$$hg(U') = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_i - R_i(y_1 \dots y_m) = 0, \quad i = m+1, \dots, n\}$$

ed essendo massimo il rango dello jacobiano delle funzioni

$$y_{m+1} - R_{m+1}(y_1 \dots y_m), \dots, y_n - R_n(y_1 \dots y_m)$$

rispetto alle variabili y_{m+1}, \dots, y_n .

9 Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$

Si consideri in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ la relazione di equivalenza \sim definita ponendo $v \sim v'$ se e solo se $v' = \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si definisce

$$\mathbb{P}^n\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

e si equipaggia $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ della topologia quoziente. Si denota con

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$$

la proiezione naturale e si pone per definizione

$$\pi(v) = [v]$$

Una volta scelte coordinate X_0, \dots, X_n in \mathbb{R}^{n+1} si pone:

$$\pi((X_0, \dots, X_n)) = [X_0, \dots, X_n]$$

e le X_0, \dots, X_n prendono il nome di *coordinate proiettive*, (*o omogenee*) in \mathbb{P}^n .

Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ può essere dunque considerato come l'insieme delle rette per l'origine in \mathbb{R}^{n+1} . Mostriamo che $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ è compatto. Osserviamo che un vettore $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è equivalente al vettore unitario $v/\|v\|$, e che due vettori unitari w e w' sono equivalenti se e solo se $w' = \pm w$. Ne segue che $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ si ottiene dalla sfera

$$S^n = \{w \in \mathbb{R}^{n+1} : \|w\| = 1\}$$

per identificazione dei punti antipodali

$$\mathbb{P}^n\mathbb{R} = S^n / \sim \quad w \sim w' \Leftrightarrow w' = \pm w .$$

Si denota ancora con π la proiezione naturale

$$\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R} .$$

Essendo $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ quoziente di uno spazio compatto anche $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ è compatto. Lasciamo al lettore la verifica che $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ è di Hausdorff. Denotiamo con $U_i, i = 0, \dots, n$, l'aperto di $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ definito da

$$U_i = \{[X_0, \dots, X_n] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R} \mid X_i \neq 0\} .$$

Definiamo

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ponendo

$$\varphi_i([X_0, \dots, X_n]) = \left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \left(\frac{\hat{X}_i}{X_i} \right), \dots, \frac{X_n}{X_i} \right) .$$

È chiaro che φ_i è una carta per $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ e che $\mathbb{P}^n\mathbb{R} = \bigcup_{i=0}^n U_i$. Dimostriamo che $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0, \dots, n}$ è un atlante per una struttura differenziale su $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$. Infatti si ha che

$$\begin{aligned} \varphi_j \varphi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \varphi_j(y_1, \dots, \overset{i\text{-esimo posto}}{1}, \dots, y_n) \\ &= \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{\hat{y}_j}{y_j}, \dots, \frac{1}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right) , \end{aligned}$$

e questa applicazione è C^∞ in $\varphi_i(U_i \cap U_j)$, dal momento che y_j è diverso da zero in $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. Osserviamo inoltre (il lettore farà le verifiche), che le proiezioni $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ e $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ sono C^∞ . In conclusione $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, con questa struttura, è una varietà differenziale compatta di dimensione reale uguale a n .

È anche utile pensare a $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ come ottenuto da \mathbb{R}^n aggiungendo un "iperpiano all'infinito". Consideriamo allo scopo U_0 , che è una copia di \mathbb{R}^n dentro $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$. Si ha

$$\mathbb{P}^n\mathbb{R} \setminus U_0 = \{[X_0, X_1, \dots, X_n] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R} \mid X_0 = 0\}$$

e dunque $\mathbb{P}^n\mathbb{R} \setminus U_0$ può essere identificato a un $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$. Questo è l'iperpiano all'infinito:

$$\mathbb{P}^n\mathbb{R} = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R} .$$

Procedendo di questo passo si vede che, insiemisticamente,

$$\mathbb{P}^n\mathbb{R} = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^0 .$$

Introduciamo infine una notazione spesso usata quando ci si vuole riferire a uno spazio proiettivo costruito a partire da uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita su cui non si sia fissato alcun sistema di coordinate (i.e. un isomorfismo tra V e un qualche \mathbb{R}^{n+1}). Si indica un tale spazio con il simbolo $\mathbb{P}V$, dove naturalmente

$$\mathbb{P}V = V - \{0\} / \sim, \quad v' \sim v \Leftrightarrow v' = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Una volta fissata una base e_0, \dots, e_n per V , si ha un isomorfismo tra $\mathbb{P}V$ e $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n+1}$.

10 Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$

Si procede in modo del tutto simile al caso di $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$. Si pone

$$\mathbb{P}^n\mathbb{C} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

dove $v \sim v'$ se e solo se $v' = \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e si da a $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ la topologia quoziente. Si ha la proiezione naturale

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C}$$

e si scrive $\pi(v) = [v]$, oppure in coordinate, $\pi((Z_0, \dots, Z_n)) = [Z_0, \dots, Z_n]$. Per vedere che $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ è compatto si procede così. Si osserva che un vettore $v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ è equivalente al vettore $v/\|v\|$ che è di norma unitaria. Poiché

$$\{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|v\| = 1\} = S^{2n+1}$$

si ha che $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ è quoziente di S^{2n+1}

$$\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C}. \quad (10.1)$$

Essendo S^{2n+1} compatta anche $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ lo è. L'applicazione (10.1) prende il nome di *fibrazione di Hopf*. Osserviamo che, a differenza del caso di $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, in cui la proiezione $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ è finito-a-uno, nella fibrazione di Hopf le preimmagini secondo π dei punti di $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ (le "fibre" di π) sono omeomorfe a delle copie di S^1 :

$$\pi^{-1}([v]) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\} \cong S^1.$$

Si introduce in $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ una struttura di varietà analitica di dimensione (complessa) n considerando l'atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ $i = 0, \dots, n$, dove

$$\begin{aligned} U_i &= \{[Z_0, \dots, Z_n] \in \mathbb{P}^n\mathbb{C} \mid Z_i \neq 0\}, \\ \varphi_i &: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

è l'omeomorfismo definito da

$$\varphi_i([Z_0, \dots, Z_n]) = \left(\frac{Z_0}{Z_i}, \dots, \frac{\hat{Z}_i}{Z_i}, \dots, \frac{Z_n}{Z_i} \right)$$

e osservando che le applicazioni

$$\varphi_j \varphi_i^{-1}((z_1, \dots, z_n)) = \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{\hat{z}_j}{z_j}, \frac{1}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right)$$

sono analitiche in $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. Analogamente al caso reale, si può osservare che, con questa struttura complessa, la proiezione $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ è analitica mentre la proiezione $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ è C^∞ . Anche nel caso complesso $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ si ottiene da \mathbb{C}^n aggiungendo un $\mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}$ “all’infinito”

$$\mathbb{P}^n \mathbb{C} = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}, \quad \mathbb{P}^n \mathbb{C} = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbb{C} \cup \mathbb{C}^0.$$

Notiamo inoltre che la retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ è isomorfa (analiticamente equivalente) alla sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. L’applicazione biantalitica f tra $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ e $\hat{\mathbb{C}}$ è data da

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1 \mathbb{C} &\rightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ [Z_0, Z_1] &\mapsto \frac{Z_1}{Z_0} \quad \text{se } Z_0 \neq 0 \\ [0, 1] &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Consideriamo ora una proiettività, e cioè una applicazione

$$T : \mathbb{P}^n \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$$

definita da: $T([v]) = [Tv]$, dove $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ è un isomorfismo lineare, e dimostriamo che T è una applicazione analitica. Per dimostrare ciò si procede nel modo che segue. Raffiniamo innanzitutto l’atlante di $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$. Per ogni forma lineare non-nulla $L : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ si consideri l’aperto di $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ definito da $U_L = \{[v] \in \mathbb{P}^n \mathbb{C} \mid L(v) \neq 0\}$, si identifichi \mathbb{C}^n con l’iperpiano $H_L = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid L(v) = 1\}$, per esempio tramite una opportuna proiezione e si definisca

$$\varphi_L : U_L \rightarrow H_L \cong \mathbb{C}^n$$

ponendo $\varphi_L([v]) = v/L(v)$. Date due forme lineari non nulle L e M si ha

$$\begin{aligned} \varphi_L(U_L \cap U_M) &= \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid L(v) = 1, M(v) \neq 0\}, \\ \varphi_M(U_L \cap U_M) &= \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid M(v) = 1, L(v) \neq 0\}, \end{aligned}$$

e $\varphi_M \varphi_L^{-1}(v) = v/M(v)$. Dal che segue che $\{(U_L, \varphi_L)\}$ è un raffinamento dell’atlante $\{(U_i, \varphi_i)\}$ di $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$. Scrivendo ora in coordinate

$$[T(v)] = [L_1(v), \dots, L_n(v)].$$

Si ha che $T(U_{L_i}) = U_i$, che la composizione

$$\varphi_i T \varphi_{L_i}^{-1}(v) = \left(\frac{L_1(v)}{L_i(v)}, \dots, \hat{1}, \dots, \frac{L_n(v)}{L_i(v)} \right)$$

è analitica in $\varphi_{L_i}(U_i \cap U_{L_i})$ e che dunque T (e T^{-1}) è analitica.

Infine anche nel caso complesso, dato uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita, si denoterà con $\mathbb{P}V$ lo spazio

$$\mathbb{P}V = V \setminus \{0\} / \sim, \quad v' \sim v \Leftrightarrow v' = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

cosicché, non appena si esibisca una base e_0, \dots, e_n per V si ha un isomorfismo tra $\mathbb{P}V$ e $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$.

11 Ipersuperfici algebriche in $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$

Sia $F(Z_0, \dots, Z_n)$ un polinomio omogeneo di grado d . Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si ha

$$F(\lambda Z_0, \dots, \lambda Z_n) = \lambda^d F(Z_0, \dots, Z_n). \quad (11.1)$$

Ne segue che ha senso considerare il sottoinsieme

$$X = \{[Z_0, \dots, Z_n] \in \mathbb{P}^n\mathbb{C} \mid F(Z_0, \dots, Z_n) = 0\}.$$

Chiaramente, essendo F continua, X è chiuso e dunque compatto. Supponiamo ora che per ogni punto $p \in X$ almeno una delle derivate parziali di F rispetto a Z_0, \dots, Z_n non svanisca in p . In queste ipotesi l'ipersuperficie X ha una struttura naturale di varietà complessa (compatta) di dimensione $n - 1$. Dimosteremo ciò facendo vedere che per ogni $i = 0, \dots, n$ l'aperto $U_i \cap X$ ha una struttura di varietà complessa $n - 1$ dimensionale e che questa struttura coincide con quella di $U_j \cap X$ in $U_i \cap U_j \cap X$. Ricordiamo innanzitutto la formula di Eulero

$$d \cdot F(Z_0, \dots, Z_n) = Z_0 \frac{\partial F}{\partial Z_0} + \dots + Z_n \frac{\partial F}{\partial Z_n}, \quad (11.2)$$

(che si dimostra facilmente derivando rispetto a λ l'eguaglianza (11.1) e calcolando il risultato per $\lambda = 1$). Fissiamo ora $i \in \{0, \dots, n\}$, e consideriamo la carta $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$. Denotiamo con z_1, \dots, z_n coordinate in \mathbb{C}^n , poniamo

$$f(z_1, \dots, z_n) = F(z_1, \dots, 1, \dots, z_n),$$

e mostriamo che in ogni punto della ipersuperficie

$$X_i = \varphi_i(U_i \cap X) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(z_1, \dots, z_n) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$$

almeno una delle derivate parziali di f non si annulla. Se così non fosse esisterebbe un punto $[z_1, \dots, 1, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n\mathbb{C}$, tale che

$$0 = F(z_1, \dots, 1, \dots, z_n) = (\partial F / \partial Z_k)(z_1, \dots, 1, \dots, z_n), \quad \forall k \neq i.$$

Ma allora, per la formula di Eulero, dovrebbe risultare che anche $\partial F / \partial Z_i$ si annulla in $[z_1, \dots, 1, \dots, z_n]$, contro il supposto. Per quello che si è spiegato nella sezione 4, l'ipersuperficie $X_i = \varphi_i(U_i \cap X) \subset \mathbb{C}^n$ ha una struttura naturale di varietà complessa di dimensione $n - 1$. Essendo φ_i una applicazione bianalitica,

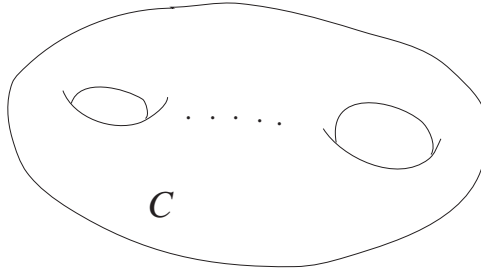
anche $U_i \cap X$ ha una struttura di varietà complessa di dimensione $n - 1$. Le carte di questa struttura complessa sono del tipo $\varphi\varphi_i$, dove φ è una carta per X_i , e cioè una proiezione su un iperpiano coordinato. Per dimostrare che la struttura analitica di $U_i \cap X$ coincide con quella $U_j \cap X$ in $U_i \cap U_j \cap X$, basta osservare che $(\psi\varphi_j)(\varphi\varphi_i)^{-1} = \psi\varphi_j\varphi_i^{-1}\varphi$ è la composizione dell' inversa della proiezione φ , della funzione analitica $\varphi_j\varphi_i^{-1}$ e della proiezione ψ ed è quindi analitica. Possiamo quindi concludere dicendo che l'ipersuperficie X è una sottovarietà analitica compatta di dimensione $n - 1$ di $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$. Essendo X definita dagli zeri di un polinomio si usa anche dire che X è una *ipersuperficie algebrica (non-singolare)*.

12 Curve algebriche piane non-singolari

Un caso particolarmente interessante è quello delle ipersuperfici in \mathbb{P}^2 . In questo caso l'ipersuperficie

$$C = \{[Z_0, Z_1, Z_2] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid F(Z_0, Z_1, Z_2) = 0\} \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$$

prende il nome di *curva algebrica piana non-singolare di grado d* , dove d è il grado di F . Per ciò che abbiamo detto, una curva algebrica piana non-singolare ha una struttura naturale di *superficie di Riemann compatta*. Più in generale si dirà *curva algebrica piana di grado d* l'insieme degli zeri di un qualsiasi polinomio omogeneo $F(Z_0, Z_1, Z_2)$ (ammettendo dunque il caso che le derivate parziali di F rispetto a Z_0, Z_1, Z_2 posseggano zeri comuni, cosicché una curva algebrica piana non è necessariamente una varietà topologica). Vedremo nel Cap.9 che, topologicamente una curva piana *non-singolare* di grado d è una ciambella con $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ buchi:



In particolare nei casi $d = 1$ e $d = 2$ si ha che C è omeomorfa a una sfera. Consideriamo dunque questi due primi casi, e cioè il caso delle rette e quello delle coniche. Per $d = 1$ si ha una forma lineare $L(Z_0, Z_1, Z_2)$ e la retta è data da

$$l = \{[Z_0, Z_1, Z_2] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid L(Z_0, Z_1, Z_2) = 0\} .$$

Ora data un'altra retta l' , per esempio la retta $Z_0 = 0$, esiste una proiettività di \mathbb{P}^2 che porta l in l' e ovviamente questa proiettività induce un isomorfismo

analitico tra l e l' . D'altro canto $l' = \{[0, Z_1, Z_2] \in \mathbb{P}^1\}$ è manifestamente una copia di $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Dunque ogni retta in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ è analiticamente equivalente alla sfera di Riemann $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

Consideriamo ora una conica non-singolare

$$C = \{[Z_0, Z_1, Z_2] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} Z_i Z_j = 0\} .$$

Poniamo $F(Z_0, Z_1, Z_2) = \sum a_{ij} Z_i Z_j$. E' immediato verificare che la condizione di non-singularità equivale alla non-singularità della matrice simmetrica (a_{ij}) . D'altro canto tutte le matrici simmetriche complesse non-singolari sono tra loro equivalenti e questo, detto in altro modo, vuol dire che le coniche non-singolari sono tutte proiettivamente equivalenti e dunque, a maggior ragione, tra loro isomorfe. Quindi la conica da cui eravamo partiti è isomorfa, per esempio, alla conica Γ di equazione

$$Z_0 Z_2 - Z_1^2 = 0 .$$

Ora, un isomorfismo tra Γ e $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ si ottiene, per esempio, proiettando Γ sull'asse $Z_2 = 0$ dal punto $P = [0, 0, 1]$:

$$\pi : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$$

$$\pi([Z_0, Z_1, Z_2]) = \begin{cases} [Z_0, Z_1] & \text{se } [Z_0, Z_1, Z_2] \neq [0, 0, 1] \\ [0, 1] & \text{se } [Z_0, Z_1, Z_2] = [0, 0, 1] . \end{cases} \quad (12.1)$$

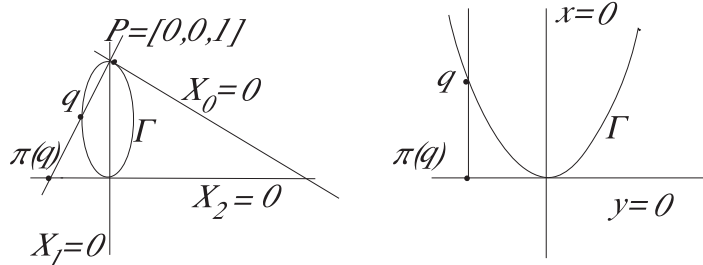
Verifichiamo che π è analitica. Sia, come al solito, $U_i \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ il luogo in cui $Z_i \neq 0$. Si osservi che $\Gamma \subset U_0 \cup U_2$. In U_0 la curva Γ ha equazione $y - x^2 = 0$, la coordinata locale è x , e quindi, in coordinate locali, π è data da $x \mapsto x$. In U_2 la curva Γ ha equazioni $\xi - \eta^2 = 0$, la coordinata locale è η , si ha

$$\pi([\eta^2, \eta, 1]) = [\eta^2, \eta] = [\eta, 1] \quad \text{per } \eta \neq 0 .$$

Dunque

$$\pi([\eta^2, \eta, 1]) = [\eta, 1] , \quad \text{per ogni } \eta \in \mathbb{C} ,$$

dal che segue che anche in queste coordinate locali π è del tipo: $\eta \mapsto \eta$. Ciò mostra che π è analitica. Si lascia al lettore il compito di provare che π^{-1} esiste ed è analitica.



In conclusione tutte le coniche non-singolari sono analiticamente equivalenti alla sfera di Riemann $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

13 Scoppiamenti e desingularizzazione di curve piane

In questa sezione introdurremo un procedimento algebro-geometrico molto utile che consente di desingularizzare le curve algebriche piane. Sia dunque $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ una curva algebrica piana. L' intento è quello di trovare una superficie di Riemann compatta C e una applicazione analitica $f : C \rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{C}$, che induca un isomorfismo tra $C \setminus f^{-1}(\Gamma_{sing})$ e $\Gamma \setminus \Gamma_{sing}$, dove Γ_{sing} è il luogo dei punti singolari di Γ .

Incominciamo con una costruzione locale. Consideriamo il piano affine \mathbb{C}^2 , con coordinate z e w , e in esso un intorno U dell' origine $P = (0, 0)$. Vogliamo definire lo *scoppiamento di U in P* . Poniamo

$$\tilde{U} = \{((z, w), [\xi, \eta]) \in U \times \mathbb{P}^1\mathbb{C} \mid z\eta = w\xi\}.$$

Mostriamo che \tilde{U} è una varietà complessa di dimensione due. Chiaramente \tilde{U} è un chiuso in $U \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Consideriamo su \tilde{U} la topologia indotta. Si può ricoprire \tilde{U} con due aperti

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 \cup \tilde{U}_1$$

dove

$$\tilde{U}_0 = \{((z, w), [\xi, \eta]) \in \tilde{U} \mid \eta \neq 0\} \cong \mathbb{C}^2,$$

$$\tilde{U}_1 = \{((z, w), [\xi, \eta]) \in \tilde{U} \mid \xi \neq 0\} \cong \mathbb{C}^2.$$

In \tilde{U}_0 porremo $x = \xi/\eta$, in \tilde{U}_1 porremo $y = \eta/\xi$. Dunque w e x sono coordinate locali in \tilde{U}_0 , mentre z e y sono coordinate locali in \tilde{U}_1 . Si definisce la proiezione

$$\pi : \tilde{U} \longrightarrow U,$$

ponendo $\pi((z, w), [\xi, \eta]) = (z, w)$. Esprimendo π nelle carte locali si ha

$$\pi((w, x)) = (wx, w), \quad \text{in } \tilde{U}_0, \quad (13.1)$$

$$\pi((z, y)) = (z, zy), \quad \text{in } \tilde{U}_1. \quad (13.2)$$

Dalla definizione segue immediatamente che \tilde{U} contiene una copia di $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$

$$\tilde{U} \supset E =: \pi^{-1}(P) = \{((0, 0), [\xi, \eta])\} \cong \mathbb{P}^1\mathbb{C},$$

e segue inoltre che π stabilisce un isomorfismo analitico tra $\tilde{U} \setminus E$ e $U \setminus \{P\}$. Dunque si può dire che \tilde{U} è stato ottenuto da U sostituendo il punto P con una copia E della retta proiettiva $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. In effetti i punti di E hanno una interpretazione molto intuitiva. Essi rappresentano le direzioni delle rette per P . Per

vedere ciò, consideriamo in U una retta l di equazione $az + bw = 0$, e consideriamo quella che si chiama la *trasformata propria* \tilde{l} di l . Questa è, per definizione, l'insieme

$$\tilde{l} = \overline{\pi^{-1}(l \setminus \{P\})}.$$

Si vede subito che

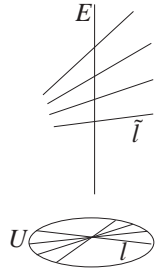
$$\tilde{l} = \{(z, w), [b, -a]\},$$

e che quindi π stabilisce un isomorfismo tra \tilde{l} e l . Inoltre è chiaro che

$$\pi^{-1}(l) = \tilde{l} \cup E,$$

$$\tilde{l} \cap E = ((0, 0), [b, -a]).$$

Ne segue che l'applicazione $l \mapsto \tilde{l} \cap E$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di E e l'insieme delle rette per l'origine in \mathbb{C}^2 . Si può quindi raffigurare \tilde{U} come una "spirale infinita" in cui le rette per l'origine in \mathbb{C}^2 si "staccano", e in cui il punto P "esplode" per diventare una copia E della retta proiettiva $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$.



Consideriamo ora il caso in cui $U = \mathbb{C}^2$, e sia data in U una curva algebrica Γ con un *nodo* nell'origine P . Dunque, a meno di un cambiamento di riferimento, l'equazione di Γ è data da

$$zw + p(z, w) = 0,$$

dove $p(z, w)$ è una combinazione di monomi di grado almeno 3. Supponiamo, per fissare le idee, che, al di fuori di P , la curva Γ sia non-singolare. Consideriamo la trasformata propria

$$C = \overline{\pi^{-1}(\Gamma \setminus \{P\})}.$$

L'equazione di C in \tilde{U}_0 è

$$C \cap \tilde{U}_0 = \{(x, w) \mid x + \frac{p(wx, w)}{w^2} = 0\},$$

mentre quella in \tilde{U}_1 è

$$C \cap \tilde{U}_1 = \{(z, y) \mid y + \frac{p(z, zy)}{z^2} = 0\}.$$

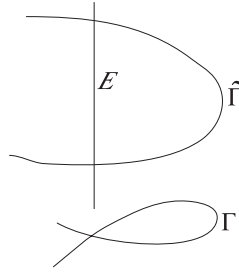
Ne segue che

$$C \cap E = \pi^{-1}(P) = \{((0, 0), [0, 1]), ((0, 0), [1, 0])\},$$

che C è una sottovarietà complessa di \tilde{U} , e che, posto $Q = ((0, 0), [0, 1])$, e $R = ((0, 0), [1, 0])$,

$$\pi : C \setminus \{Q, R\} \longrightarrow \Gamma \setminus \{P\},$$

è un isomorfismo. Abbiamo dunque desingularizzato la curva Γ (supponendo che Γ avesse solo il nodo come sua singolarità).



È importante osservare che si possono scoppiare punti su di una qualsiasi varietà complessa di dimensione 2. Sia infatti X una tale varietà, e P un suo punto. Sia (U, φ) una carta locale intorno a P , con $\varphi(P) = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Identificando U con un intorno di $(0, 0)$, tramite φ , possiamo scoppiare U nel punto P , ottenendo una varietà complessa \tilde{U} e una applicazione analitica π da \tilde{U} a U , che induce un isomorfismo tra $\tilde{U} \setminus \pi^{-1}(P)$ e tale inoltre che $E =: \pi^{-1}(P)$ è una copia di $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Si può allora “attaccare” X a \tilde{U} lungo $U \setminus \{P\} \cong \tilde{U} \setminus E$ e ottenere una varietà complessa bidimensionale \tilde{X} e una applicazione analitica da \tilde{X} a X , ancora denotata con π , che induce un isomorfismo tra $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(P)$ e $X \setminus \{P\}$, e tale inoltre che $E =: \pi^{-1}(P)$ è una copia di $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Questo è lo scoppio di X in P . Quando, in questa costruzione, abbiamo parlato di attaccare due varietà complesse ci si è implicitamente riferiti al seguente lemma generale, la cui dimostrazione lasciamo come esercizio

Lemma 13.1 . *Siano X e Y due varietà complesse. Sia f un isomorfismo di un aperto A di X su un aperto B di Y . Sia Z lo spazio topologico ottenuto quotizzando $X \cup Y$ per la relazione di equivalenza generata dalla relazione che dichiara equivalenti un punto x di X e uno y di Y se e solo se $x \in A$ e $y = f(x)$. Si assuma che Z sia di Hausdorff. Allora esiste un’ unica struttura complessa su Z che rende analitiche le iniezioni di X e Y in Z .*

Lasciamo come esercizio anche il seguente fatto:

Lemma 13.2 . *Sia X una varietà complessa compatta di dimensione 2. Sia \tilde{X} lo scoppio di X in un suo punto. Allora \tilde{X} è compatta.*

Da ciò segue in particolare che, data una curva algebrica piana Γ , le cui singolarità siano δ nodi P_1, \dots, P_δ , essa può essere desingularizzata. Più precisamente, esistono una superficie di Riemann compatta C e una applicazione analitica $\pi : C \longrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{C}$, con $\pi(C) = \Gamma$, tali che

$$\pi^{-1}(P_i) = \{P'_i, P''_i\} \subset C, \quad i = 1, \dots, \delta,$$

mentre

$$\pi : C \setminus \pi^{-1}(\{P_1, \dots, P_\delta\}) \longrightarrow \Gamma \setminus \{P_1, \dots, P_\delta\},$$

è un isomorfismo. Per ottenere C si scoppia $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$, simultaneamente, in P_1, \dots, P_δ . Per l' esercizio precedente, la varietà X che si ottiene alla fine di questo procedimento, è una varietà complessa compatta di dimensione 2, e si può prendere come C la trasformata propria di Γ in questo scoppio simultaneo. In quanto chiusa in X , la superficie di Riemann C è compatta, e, per costruzione, soddisfa tutte le proprietà richieste.

Vogliamo ora dimostrare un teorema generale di desingularizzazione per le curve piane proiettive. Facciamo alcune osservazioni preliminari.

Sia $F(z, w)$ una funzione analitica in un intorno U di un punto $P \equiv (z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$. Si consideri il luogo $V(F) = \{(z, w) \in U \mid F(z, w) = 0\}$. Diremo che $V(F)$ ha in P un punto di molteplicità r , se lo sviluppo di Taylor di F intorno a P è del tipo

$$F(z, w) = F_r(z - z_0, w - w_0) + F_{r+1}(z - z_0, w - w_0) + \dots,$$

con $F_i(x, y)$ polinomio omogeneo di grado i e $F_r \neq 0$. E' immediato verificare che la nozione di molteplicità è invariante per cambiamenti analitici di coordinate intorno a P . Si noti però che la nozione di molteplicità dipende dalla funzione analitica F e non solo dal luogo dei suoi zeri. I punti di $V(F)$ di molteplicità maggiore di uno, si chiamano i *punti singolari* di $V(F)$. L'insieme dei punti singolari di $V(F)$ si denota con $V(F)_{sing}$.

Lemma 13.3 *Sia $F(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio con $F(0, w) \neq 0$. Allora F è privo di fattori con molteplicità maggiore di 1 (i.e. fattori del tipo P^k con $\deg P \geq 1$ e $k > 1$), se e solo se F e $\partial F / \partial w$ non hanno fattori a comune. Inoltre, ciò accade se e solo se la curva piana definita dall' equazione $F(z, w) = 0$ ha un numero finito di punti singolari.*

Dimostreremo questo Lemma nel Capitolo 4, per ora lo assumiamo. Il teorema che vogliamo dimostrare è il seguente.

Teorema 13.4 *Sia $F(X, Y, Z)$ un polinomio privo di fattori con molteplicità maggiore di 1. Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ la curva piana definita dall' equazione $F(X, Y, Z) = 0$. Allora esiste una superficie di Riemann compatta C , eventualmente sconnessa, un sottoinsieme finito $S \subset C$ e una applicazione analitica $\sigma : C \rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ tale che $\sigma(C) = \Gamma$ e tale che σ induce un isomorfismo tra $C \setminus S$ e $\Gamma \setminus \Gamma_{sing}$.*

Dim. Dimostreremo il teorema eseguendo scoppiamenti successivi. Partiamo da un punto singolare P di Γ . Assumiamo $P \in U_Z = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid Z \neq 0\}$. L'equazione locale di Γ in U_Z è data da $F(z, w) = 0$, dove poniamo per semplicità $F(z, w) = F(z, w, 1)$. Se $r > 1$ è la molteplicità di $P \equiv (z_0, w_0)$ si ha

$$F(z, w) = F_r(z - z_0, w - w_0) + F_{r+1}(z - z_0, w - w_0) + \dots,$$

dove F_i è un polinomio omogeneo di grado i e $F_r \neq 0$. Naturalmente, a meno di passare dalle coordinate z e w alle coordinate $z - z_0$ e $w - w_0$, si può assumere che $P \equiv (0, 0)$. Sempre a meno di un cambiamento di coordinate affini, si può assumere che

$$F_r(z, w) = \prod_{i=1}^s (w - \alpha_i z)^{r_i}$$

dove $\alpha_i \in \mathbb{C}$ e $\sum r_i = r$. Consideriamo lo scoppiamento π di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ in P e descriviamolo localmente in un intorno U di P . Usando le notazioni e le convenzioni adottate fino ad ora, consideriamo la trasformata propria di Γ

$$\tilde{\Gamma} = \overline{\pi^{-1}(\Gamma \setminus 0)}.$$

Per ipotesi abbiamo che

$$\pi^{-1}(P) \cap \tilde{\Gamma} = \{(0, 0), [1, \alpha_i]\}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Scrivendo l'applicazione $\pi|_{\tilde{U}_0}$ nella forma $\pi(u, v) = (u, uv)$, l'equazione di $\tilde{\Gamma}$ in \tilde{U}_0 è data da $G(u, v) = 0$, dove

$$G(u, v) = u^{-r} F(u, uv) = \prod_{i=1}^s (v - \alpha_i)^{r_i} + u F_{r+1}(1, v) + u^2 F_{r+2}(1, v) + \dots$$

Dal Lemma precedente segue che $G(u, v)$ è ancora un polinomio privo di fattori di molteplicità maggiore di uno. Infatti, se così non fosse, la curva $F = 0$ avrebbe un numero infinito di punti singolari (qui si usa il fatto che la retta $u = 0$ e la curva $G(u, v) = 0$ si incontrano in numero finito di punti). Nelle coordinate u e v di \tilde{U}_0 , si ha che $\pi^{-1}(P) \cap \tilde{\Gamma} = \{P_1, \dots, P_s\}$, dove $P_i \equiv (1, \alpha_i)$, per $i = 1, \dots, s$. Chiaramente P_i è un punto di molteplicità minore o uguale a r_i per $\tilde{\Gamma}$. Due casi possono presentarsi.

- 1) $r_i < r$
- 2) $r_i = r$

Supponiamo che si presenti il secondo caso. Evidentemente si deve avere $s = 1$ e si può assumere, cambiando coordinate, che $\alpha_1 = 0$. Dunque si può assumere che $F_r(z, w) = w^r$, con $r \geq 2$. Possiamo quindi scrivere

$$F(z, w) = H_0(z) + H_1(z)w + \dots + H_{r-1}(z)w^{r-1} + (1 + Q(z, w))w^r \quad (13.3)$$

con $Q(0, 0) = 0$,

$$H_i(z) = a_i z^{r-i+1} + b_i z^{r-i+2} \dots$$

$$\sum_{i=0}^{r-1} H_i(z)w^i \neq 0.$$

Possiamo allora scrivere

$$G(u, v) = u^{-r}F(u, uv) = K_0(u) + K_1(u)v + \cdots + K_{r-1}(u)v^{r-1} + v^r(1 + Q(u, uv))$$

e dove $K_i(u)$ è il polinomio definito da

$$K_i(u) = H_i(u)/u^{r-i}, \quad i = 0, \dots, r-1.$$

Si ha inoltre che $\pi^{-1}(P) = P_0 = (0, 0)$ e la molteplicità di $\tilde{\Gamma}$ in P_0 è minore o uguale ad r . Supponiamo che la molteplicità sia ancora uguale a r e che si sia ricaduti nel caso 2). Ciò vuole dire che $G(u, v)$ non contiene monomi di grado inferiore a r e che l'unico monomio di grado r è v^r . Ma questo può accadere solo se i polinomi $K_i(u)$ verificano le stesse condizioni soddisfatte dai polinomi $H_i(z)$. Continuando a scoppiare, questa situazione può ripresentarsi solo un numero finito di volte, perché il grado in u di questi polinomi ogni volta diminuisce. Se ne conclude che, dopo un numero finito di passi, la molteplicità di ogni punto in $\pi^{-1}(P)$ è minore o uguale a $r-1$. Iterando il processo, si ottiene una composizione τ di scoppiamenti per cui tutti i punti di $\tau^{-1}(P)$ sono lisci per la trasformata propria di Γ . Ripetendo questo procedimento per tutti i punti singolari di Γ , si ottiene una superficie di Riemann C con tutte le proprietà richieste. La compattezza di C segue dal Lemma (13.2).

Q.E.D.

Esercizi

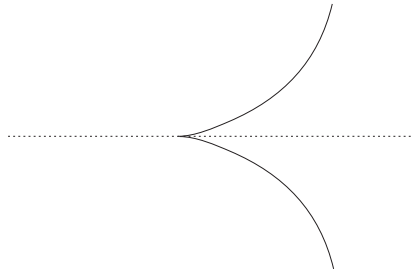
Esercizio 1. Dimostrare il Lemma (13.1).

Esercizio 2. Dimostrare il Lemma (13.2)

Esercizio 3. La cuspidale ordinaria è la singolarità data dall'equazione

$$w^2 + p(z, w) = 0, \tag{13.4}$$

dove $p(z, w)$ è una somma di monomi di grado maggiore di 2.

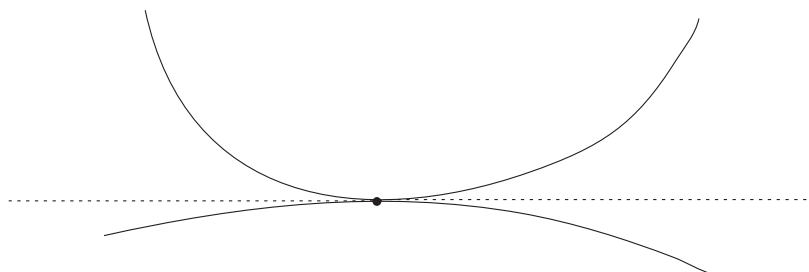


Dimostrare che la cuspidale (13.4) si desingularizza scoppiando l'origine $O \in \mathbb{C}^2$.

4. Il tacnodo è la singolarità data dall'equazione

$$w(w - z^2) + q(z, w) = 0, \quad (13.5)$$

dove $q(z, w)$ è una somma di monomi di grado maggiore di 3.



Esercizio 4. Dimostrare che il tacnodo (13.5) si desingularizza dopo due scoppiamenti. (Prima si scoppia un intorno U di $O \in \mathbb{C}^2$ nel punto O . Sia $\pi : \tilde{U} \longrightarrow U$ questo scoppimento. La trasformata propria C' di Γ tramite π , ha un nodo nel punto $P = ((0, 0), [1, 0]) \in \tilde{U}$. Basta allora scoppiare \tilde{U} nel punto P .)

Esercizio 5. Descrivere gli scoppiamenti che sono necessari per desingularizzare la singolarità $y^2 = x^{2n+1}$.

14 Immersione di Veronese

Ai prodotti simmetrici di uno spazio vettoriale [cf. Capitolo 2], è legata la cosiddetta immersione di Veronese. Sia V uno spazio $(n+1)$ -dimensionale complesso, sia

$$\psi : V \rightarrow S^d V$$

definita da

$$v \mapsto v \cdot v \cdots v.$$

Poiché $\psi(\alpha v) = \alpha^d \psi(v)$ si può definire

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}V &\rightarrow \mathbb{P}S^d V \\ [v] &\mapsto [v \cdot v \cdots v]. \end{aligned}$$

Questa è l'*immersione di Veronese*. In coordinate Z_0, \dots, Z_n si ha

$$\psi([Z_0, \dots, Z_n]) = [\dots, Z_0^{k_0} Z_1^{k_1} \cdots Z_n^{k_n}, \dots],$$

dove $\sum k_i = d$. La ψ associa cioè al punto di coordinate omogenee $[Z_0, \dots, Z_n]$ il punto le cui coordinate omogenee sono i monomi di grado d in Z_0, \dots, Z_n .

Dimostriamo che ψ è una immersione. Scriviamo

$$\psi([Z_0, \dots, Z_n]) = [Z_0^d, Z_0^{d-1}Z_1, \dots, Z_0^{d-1}Z_n, \dots] . \quad (14.1)$$

Verifichiamo intanto che ψ è iniettiva. Supponiamo che

$$\psi([Z_0, \dots, Z_n]) = \psi([W_0, \dots, W_n]) . \quad (14.2)$$

Per un qualche i , deve risultare $Z_i \neq 0$ e assumiamo per semplicità $i = 0$. Dalle (14.1) e (14.2) segue che anche $W_0 \neq 0$ e naturalmente possiamo assumere $Z_0 = W_0 = 1$. Deve allora risultare

$$Z_i = Z_0^{d-1}Z_i = W_0^{d-1}W_i = W_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n .$$

Nella carta U_0 di $\mathbb{P}V$ si ha:

$$\psi([1, z_1, z_2, \dots, z_n]) = [1, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots] .$$

Analoghe espressioni valgono in U_i , per $i \neq 0$, e queste espressioni mostrano immediatamente che ψ è un omeomorfismo locale, che è analitica e che ha ovunque jacobiano di rango massimo, e che dunque è una immersione. Il caso $n = 1$, ci dà una immersione della sfera di Riemann $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ in $\mathbb{P}^d\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^1\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{P}^d\mathbb{C} \\ [Z_0, Z_1] &\mapsto [Z_0^d, Z_0^{d-1}Z_1, \dots, Z_1^d] . \end{aligned}$$

La ψ in U_0 è semplicemente data da

$$[1, t] \mapsto [1, t, t^2, \dots, t^d]$$

e questo è una generalizzazione della applicazione introdotta alla fine della sezione 6.

15 Grassmanniane complesse

Sia V uno spazio n -dimensionale complesso e sia $k \leq n$. Poniamo

$$B_k(V) = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in V, v_1, \dots, v_k \text{ lin. indipendenti}\} .$$

Definiamo in $B_k(V)$ una relazione di equivalenza \sim ponendo

$$\begin{aligned} (v'_1, \dots, v'_k) \sim (v_1, \dots, v_k) &\Leftrightarrow \exists \text{ una matrice invertibile } g = (g_{ij}) \in GL(k, \mathbb{C}) \\ &\text{tale che } v'_i = \sum g_{ij}v_j . \end{aligned}$$

Poniamo

$$G(k, V) = B_k(V) / \sim$$

Dotiamo $G(k, V)$ della topologia quoziente e denotiamo con $[v_1, \dots, v_k]$ la classe di (v_1, \dots, v_k) in $G(k, V)$. Si può identificare $[v_1, \dots, v_k]$ con il k -sottospazio lineare π di V generato da v_1, \dots, v_k . Coticché, insiemisticamente,

$$G(k, V) = \{k\text{-sottospazi lineari di } V\}.$$

$G(k, V)$ prende il nome di *Grassmanniana dei k -piani in V* . Vi è anche una ovvia identificazione

$$G(k, V) = \{\text{sottospazi lineari } (k-1)\text{-dim di } \mathbb{P}V\}.$$

Naturalmente, quando $k = 1$, si ha $G(1, V) = \mathbb{P}V$ e ciò che segue è una generalizzazione di questo caso.

Fissiamo una base e_1, \dots, e_n di V . Possiamo pensare alla k -pla (v_1, \dots, v_k) come a una matrice $k \times n$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix} \quad (15.1)$$

in cui la riga i -sima è costituita dalle coordinate di v_i . Scriveremo allora

$$[v] = [X].$$

Se X è una matrice $k \times n$, dato un multiindice $I = (i_1, \dots, i_k)$ denotiamo con X_I la matrice $k \times k$ ottenuta da X considerando le colonne i_1, \dots, i_k . Definiamo

$$U_I = \{[X] \in G(k, V) : |X_I| \neq 0\}$$

la definizione è ben posta perché, se $g \in GL(k, \mathbb{C})$ allora $(gX)_I = gX_I$. Chiaramente U_I è aperto in $G(k, V)$ e inoltre

$$G(k, V) = \cup_I U_I.$$

Vogliamo ora definire un omeomorfismo

$$\varphi_I : U_I \rightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)}.$$

Dato $[X] \in U_I$ si ha

$$[X] = [X_I^{-1}X].$$

Per semplicità supponiamo che $I = \{1, \dots, k\}$, allora

$$X_I^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_{11} & \dots & z_{1,n-k} \\ \dots & \dots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & z_{k1} & \dots & z_{k,n-k} \end{pmatrix}. \quad (15.2)$$

Si definisce

$$\varphi_I([X]) = (z_{ij}).$$

Se I è un arbitrario multiindice la matrice $X_I^{-1}X$ è una matrice $k \times n$ in cui le colonne $i_1 \dots i_k$ formano la matrice identica. Tolle queste colonne si ottiene una matrice $k(n-k)$ che è, per definizione $\varphi_I([X])$. È chiaro che φ_I è un omeomorfismo di U_I su $\mathbb{C}^{k(n-k)}$. È anche chiaro che

$$\varphi_J \varphi_I^{-1} : \varphi_I(U_I \cap U_J) \rightarrow \varphi_J(U_I \cap U_J)$$

è analitica. Infatti si può prendere come rappresentante di $\varphi_I^{-1}((z_{ij}))$ la matrice ottenuta dalla matrice (z_{ij}) inserendo opportunamente una matrice identità, $k \times k$, (la prima colonna dopo la (i_1-1) -esima di (z_{ij}) la seconda dopo la (i_2-2) -esima e così via). Sia X è la matrice così ottenuta. Si consideri la matrice $X_J^{-1}X$. Gli elementi di questa matrice sono quozienti di polinomi quadratici nelle z_{ij} e del determinante di X_J che è un polinomio nelle z_{ij} che non si annulla in U_J . Da questo segue che $\varphi_J \varphi_I^{-1}$ è analitica e dunque $G(k, V)$ è una varietà complessa di dimensione $k(n-k)$.

Dimostriamo che le Grassmanniane sono compatte. Per questo basta osservare che un punto (v_1, \dots, v_k) di $B_k(V)$ è equivalente al punto

$$\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_k}{\|v_k\|} \right) \in S^{2n-1} \times \dots \times S^{2n-1}$$

e dunque $G(k, V)$ è il quoziente di un prodotto di sfere ed è quindi è compatta. Costruiamo ora una immersione di $G(k, V)$ in uno spazio proiettivo, la cosiddetta *immersione di Plücker*. Si definisca

$$\gamma : G(k, V) \longrightarrow \mathbb{P}\Lambda^k V \quad (15.3)$$

$$[v_1, \dots, v_k] \mapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k].$$

La definizione è ovviamente ben posta perché se $v'_i = \sum g_{ij} v_j$ allora $v'_1 \wedge \dots \wedge v'_k = \det(g) v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. In coordinate si ha

$$\gamma([X]) = [\dots, X_I, \dots].$$

Per capire come è fatta γ localmente, supponiamo per un momento che $I = (1, \dots, k)$ allora $[X] = [X_I^{-1}X]$ e $X_I^{-1}X$ è data dalla (16.1). Possiamo quindi supporre che X stessa sia della forma (16.1)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_{11} & \dots & z_{1,n-k} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & z_{k1} & \dots & z_{k,n-k} \end{pmatrix}. \quad (15.4)$$

Si ha allora

$$|X_I| = 1, \quad |X_{(1, \dots, l-1, l+1, \dots, k, k+h)}| = (-1)^{k-l} z_{lh}$$

e dunque

$$\gamma([X]) = [1, (-1)^{k-1} z_{11}, (-1)^{k-2} z_{12}, \dots, (-1)^n z_{k,n-k}, \dots].$$

Nelle altre carte si ha una simile espressione. Da questa espressione si deduce facilmente che γ è iniettiva, continua, che è analitica e che ha ovunque jacobiano di rango massimo, e cioè che è una immersione non-singolare.

16 Prodotti

Date due varietà differenziali V e W si può equipaggiare il prodotto cartesiano $V \times W$ di un'unica struttura di varietà differenziale tale che le due proiezioni $\pi_V : V \times W \rightarrow V$ e $\pi_W : V \times W \rightarrow W$ siano applicazioni C^∞ . Se $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{V} = \{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ sono atlanti per V e W rispettivamente, è immediato verificare che l'insieme $\mathcal{W} = \{(U_\alpha \times V_i, \varphi_\alpha \times \psi_i)\}$ è un atlante per una struttura differenziale in cui π_V e π_W sono C^∞ , e che tale proprietà individua univocamente questa struttura. Si lascia al lettore la facile verifica del fatto che

$$\dim V \times W = \dim V + \dim W ;$$

gli lasciamo inoltre il compito di estendere la nozione di prodotto al caso delle varietà complesse.

Come primo esempio consideriamo il prodotto di $\mathbb{P}V$ e $\mathbb{P}W$, dove V e W sono \mathbb{C} -vettoriali. Questo esempio ci conduce naturalmente all'*immersione di C. Segre*

$$s : \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W \rightarrow \mathbb{P}(V \otimes W)$$

definita da

$$s([v], [w]) = [v \otimes w] .$$

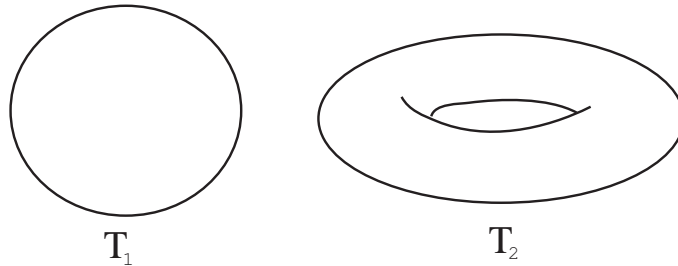
Se $\dim V = n$, e $\dim W = m$, introdotte coordinate x_1, \dots, x_n su V e y_1, \dots, y_m su W si potrà scrivere

$$s([x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_m]) = [x_1 y_1, x_1 y_2, \dots, x_n y_m] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^{nm-1} .$$

Diamo ora un altro esempio notevole di varietà ottenuta come prodotto; quello del toro. Un *toro n -dimensionale* T_n è per definizione il prodotto di n copie di S^1 :

$$T_n = S^1 \times \dots \times S^1 .$$

Raffiguriamo qui un toro 1-dimensionale e uno bidimensionale



Vi è un'altra maniera di introdurre una struttura differenziale sullo spazio topologico T_n . Consideriamo in \mathbb{R}^n il reticolo \mathbb{Z}^n dei punti a coordinate intere. Poiché

\mathbb{Z}^n è un sottogruppo del gruppo abeliano \mathbb{R}^n , ha senso considerare il gruppo quoziente

$$A_n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$$

che equipaggiamo con la topologia quoziente. Denotiamo con

$$\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow A_n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$$

la proiezione naturale. Scriveremo $\pi(a) = [a]$. Sia V l'ipercubo aperto di \mathbb{R}^n definito da

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_i < 1/2\}.$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^n$ poniamo $V_\lambda = \{v + \lambda \mid v \in V\}$, cosicché $V = V_0$. Osserviamo che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^n$ la restrizione π_λ di π a V_λ stabilisce un omeomorfismo

$$\pi_\lambda : V_\lambda \longrightarrow \pi(V_\lambda).$$

Poniamo $U_\lambda = \pi(V_\lambda)$ e

$$\varphi_\lambda = \pi_\lambda^{-1} - \lambda : U_\lambda \longrightarrow V,$$

e verifichiamo che $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ è l'atlante di una struttura differenziale su A_n . Che φ_λ sia un omeomorfismo di U_λ su $V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ risulta dalla costruzione. È anche ovvio che $A_n = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^n} U_\lambda$. Supponiamo ora che $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$, si verifica subito che $\varphi_\mu \varphi_\lambda^{-1}(v) = v + \lambda - \mu + \gamma$, con $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ e che dunque $\varphi_\mu \varphi_\lambda^{-1}$ è C^∞ . Consideriamo ora l'applicazione

$$f : A_n \longrightarrow T_n$$

definita da

$$f([x_1, \dots, x_n]) = (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n}).$$

Lasciamo al lettore la facile verifica che f è un diffeomorfismo tra A_n e T_n . Abbiamo così presentato un'altra maniera di vedere un toro n -dimensionale. Questa raffigurazione ci fa vedere, per esempio, che il toro $2n$ -dimensionale $\mathbb{C}^n / (\mathbb{Z}^n + i\mathbb{Z}^n)$ ha una naturale struttura di varietà analitica di dimensione (complessa) n ; le carte di questa struttura sono date, come sopra, da

$$\{U_\lambda = \pi(V_\lambda), \varphi_\lambda = \pi_\lambda^{-1} - \lambda\}$$

dove ora

$$V = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| < \frac{1}{2} \right\}, \quad V_\lambda = \{v + \lambda \mid v \in V\}.$$

Sia riguardando un toro T come prodotto di S^1 , che come quoziente di \mathbb{R}^n per \mathbb{Z}^n , risulta che T possiede una struttura di gruppo (abeliano) compatibile con la struttura C^∞ nel senso seguente

a) L'applicazione

$$\begin{aligned} T \times T &\longrightarrow T \\ ([a], [b]) &\longmapsto [a + b] \end{aligned}$$

è C^∞ (qui pensiamo T come $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$).

b) L'applicazione

$$\begin{aligned} T &\rightarrow T \\ [a] &\longmapsto [-a] \end{aligned}$$

è C^∞ .

L'esempio del toro ci conduce in modo naturale nel regno dei gruppi di Lie a cui è dedicata la prossima sezione.

Esercizi

Esercizio 1. Verificare che l'applicazione di Segre è una immersione (analitica) non-singolare.

Esercizio 2. Si consideri il caso $n = m = 2$:

$$\begin{aligned} s : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{P}^3\mathbb{C} \\ ([x_0, x_1], [y_0, y_1]) &\longrightarrow [x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1]. \end{aligned}$$

Siano z_0, z_1, z_2, z_3 coordinate omogenee in $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$.

i) Si dimostri che la ipersuperficie quadrica

$$Q_0 = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \mid z_0z_3 = z_1z_2\}$$

è una sottovarietà complessa di \mathbb{P}^3 .

ii) si dimostri che s stabilisce un isomorfismo tra $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ e Q_0 .

iii) In generale una ipersuperficie quadrica Q non-singolare di $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ è, per definizione, il luogo degli zeri di una equazione

$$\sum a_{ij}z_i z_j = 0, \quad i, j = 0, \dots, 3,$$

in cui (a_{ij}) è una matrice complessa, simmetrica e a determinante non-nullo. Mostrare che Q è una sottovarietà analitica di $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$, e che tutte le quadriche non-singolari sono tra loro isomorfe, (e ciò mostra che una quadrica non-singolare di $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ è isomorfa a $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$).

Esercizio 3. Nel caso del toro, verificare le affermazioni a) e b).

Esercizio 4. Riscrivere le affermazioni a) e b) pensando T come prodotto di S^1 , e dimostrarle in questo contesto.

Esercizio 5. Descrivere un diffeomorfismo tra T_2 e

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid [(x^2 + y^2)^{1/2} - 2]^2 + z^2 = 1\}.$$

17 Gruppi di Lie

Una importante classe di esempi che gioca un ruolo fondamentale in molti campi della matematica e che costituisce la base di una intera teoria è quella dei *gruppi di Lie*. Un gruppo di Lie è per definizione un gruppo astratto G equipaggiato di una struttura differenziale tale che, sia la moltiplicazione

$$\begin{aligned} \mu : \quad G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

che e l'inversione

$$\begin{aligned} i : \quad G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sono applicazioni C^∞ .

Notazione: Dato un elemento $g \in G$ denotiamo con l_g la moltiplicazione a sinistra per g , e cioè l'applicazione di G in G definita da $\lambda_g(x) = gx$. È del tutto ovvio che l_g è un diffeomorfismo il cui inverso è $l_{g^{-1}}$.

Osservazione: I gruppi di Lie hanno la seguente proprietà di omogeneità. Dato un punto $g \in G$, una base di intorno $\{V_i\}$ di g può sempre ottenersi da una base di intorno $\{U_i\}$ dell'identità $e \in G$ per moltiplicazione per g

$$V_i = \{l_g(U_i)\}.$$

Ovvi esempi di gruppi di Lie (abeliani) sono \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n e i tori n -dimensionali T_n . Vogliamo ora introdurre i gruppi classici di matrici che definiamo immediatamente. Poniamo $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e denotiamo con $M_n(k)$ il k -vettoriale delle matrici $n \times n$ a coefficienti in k . Poniamo

$$\begin{aligned} GL(n, k) &= \{X \in M_n(k) \mid \det X \neq 0\} \\ SL(n, k) &= \{X \in M_n(k) \mid \det X = 1\} \\ O(n) &= \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^t X = I\} \\ SO(n) &= \{X \in O(n) \mid \det X = 1\} \\ U(n) &= \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^t \bar{X} = I\} \\ SU(n) &= \{X \in U(n) \mid \det X = 1\} \\ Sp(2n, k) &= \{X \in M_{2n}(k) \mid X J^t X = I\} \end{aligned}$$

dove $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ e $I \in M_n(k)$ è la matrice identità. $GL(n, k)$ si chiama il *gruppo lineare*, $SL(n, k)$ il *gruppo lineare speciale*, $O(n)$ il *gruppo ortogonale*, $SO(n)$ il *gruppo ortogonale speciale*, $U(n)$ il *gruppo unitario*, $SU(n)$ il *gruppo*

unitario speciale, $Sp(2n, k)$ il *gruppo simplettico*. Dimostreremo ora che questi gruppi hanno una struttura di gruppo di Lie.

Incominciamo con $GL(n, \mathbb{R})$. È evidente che $GL(n, \mathbb{R})$ è un aperto di $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, e in quanto tale ha una naturale struttura di varietà differenziale. Se $X = (x_{ij})$ e $Y = (y_{ij})$ sono matrici in $GL(n, \mathbb{R})$ allora i coefficienti $\sum_{j=1}^n x_{sj}y_{jt}$ della matrice prodotto XY sono funzioni C^∞ delle x_{ij} e delle y_{hk} , e dunque vale la a) della definizione di Gruppo di Lie. Per quanto riguarda la b) basta osservare che i coefficienti della matrice inversa X^{-1} sono del tipo $\pm \det(X)_{ij} / \det X$ dove $(X)_{ij}$ è il minore di X ottenuto togliendo la i -sima riga e la j -sima colonna. Dunque questi coefficienti sono funzioni C^∞ nell'aperto $GL(n, \mathbb{R})$ di $M_n(\mathbb{R})$. Ne segue che l'inversione è C^∞ . In conclusione $GL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie di dimensione n^2 . Lo stesso ragionamento vale per $GL(n, \mathbb{C})$.

Consideriamo ora $SL(n, \mathbb{R})$. Per definizione $SL(n, \mathbb{R})$ è l'ipersuperficie di $M_n(\mathbb{R})$ definita dall'equazione $\det X - 1 = 0$. Poniamo $F(X_{ij}) = \det X - 1$. Vogliamo verificare come prima cosa che, per ogni $A \in SL(n, \mathbb{R})$,

$$\frac{\partial F}{\partial X_{ij}}(A) \neq 0 \quad \text{per qualche } i, j. \quad (17.1)$$

È facile vedere che questo è vero quando $A = I$. Infatti scrivendo

$$\det X = \sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon(\sigma) X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)}$$

ci si accorge subito che

$$\frac{\partial F}{\partial X_{ij}}(I) = \delta_{ij}. \quad (17.2)$$

Per dimostrare la (17.1), osserviamo innanzitutto che, data $A \in SL(n, \mathbb{R})$, si ha $\det AX = \det X$ e dunque anche $F(AX) = F(X)$. Ciò si può anche esprimere dicendo che

$$Fl_A = F. \quad (17.3)$$

Ricordando la (8.4) si ha

$$J(F)_I = J(Fl_A)_I = J(F)_A J(l_A)_I. \quad (17.4)$$

Poiché $l_A : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ è un diffeomorfismo, si ha che il rango di $J(F)$ in A è uguale al rango di $J(F)$ in I . La (17.2) ci dice che questo rango è massimo e dunque la (17.1) è dimostrata. In conclusione $SL(n, \mathbb{R})$ è unaipersuperficie non-singolare in $M_n(\mathbb{R})$. Il fatto che la moltiplicazione e l'inversione siano applicazioni C^∞ lo si dimostra esattamente come nel caso di $GL(n, \mathbb{R})$ e in effetti

segue da quel caso per restrizione. Il gruppo $SL(n, \mathbb{C})$ si tratta in modo simile. In conclusione $SL(n, \mathbb{R})$ (risp. $SL(n, \mathbb{C})$) è un gruppo di Lie di dimensione reale (risp. complessa) $n^2 - 1$.

Passiamo ora a considerare il gruppo ortogonale $O(n)$. Denotiamo con X_1, \dots, X_n le colonne di una matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$. Si vede subito che la condizione ${}^t X X = I$ è equivalente alla condizione

$${}^t X_i X_j = \delta_{ij}, \quad i \leq j,$$

che esprime la ortonormalità dei vettori X_1, \dots, X_n , rispetto all'usuale metrica euclidea di \mathbb{R}^n . Poniamo

$$F_{ij} = {}^t X_i X_j - \delta_{ij} \quad i \leq j$$

e $F = (F_{ij})$. Possiamo pensare a F come a una applicazione C^∞ da \mathbb{R}^{n^2} a $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Le equazioni di $O(n)$ in $M_n(\mathbb{R})$ sono date da $F = 0$ e sono dunque $n(n+1)/2$ equazioni in n^2 incognite. Per dimostrare che $O(n)$ ha una struttura di varietà basterà mostrare che in ogni punto $A \in O(n)$ lo jacobiano di F ha rango massimo. Osserviamo che se $A \in O(n)$ si ha

$${}^t (A X_i)(A X_j) = {}^t X_i X_j$$

e che dunque, come nel caso di $SL(n, \mathbb{R})$, ma con nuovo significato dei simboli, si ha

$$Fl_A = F.$$

Usando la formula (17.4), vera anche in questo contesto, possiamo di nuovo concludere che, per dimostrare che lo jacobiano $J(F)$ ha rango massimo in A , basta dimostrare che $J(F)$ ha rango massimo in I . Ma questo è del tutto ovvio. Infatti un conto immediato porge

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial X_{st}}(I) = \delta_{is} \delta_{tj}, \quad i \leq j.$$

Di nuovo il fatto che moltiplicazione e inversione siano C^∞ lo si dimostra come nel caso di $GL(n, \mathbb{R})$, e si può così concludere che $O(n)$ è un gruppo di Lie di dimensione (reale)

$$n(n-1)/2 = n^2 - \#\{\text{equazioni } F_{ij}\}.$$

Consideriamo ora $SO(n)$. Le matrici di $O(n)$ hanno determinante uguale a ± 1 . Sia H una qualsiasi matrice in $O(n)$ con determinante uguale a -1 . Si può allora esprimere $O(n)$ come unione disgiunta

$$O(n) = SO(n) \sqcup H \cdot SO(n).$$

Ne segue che anche $SO(n)$ è un gruppo di Lie e che la sua dimensione è $n(n-1)/2$. Facciamo vedere anzi che la decomposizione appena scritta è la decomposizione di $O(n)$ in componenti connesse. Basta vedere che $SO(n)$ è connesso per archi, e quindi che, date due basi ortonormali e positivamente orientate di \mathbb{R}^n , si può passare dall'una all'altra con un cammino continuo in $SO(n)$. Procediamo per induzione. Innanzitutto $SO(1)$ è un punto ed è quindi connesso. Assumiamo $SO(n-1)$ connesso per archi. Siano X_1, \dots, X_n e Y_1, \dots, Y_n due basi ortonormali positivamente orientate. Esiste un cammino continuo che congiunge X_1, \dots, X_n a una base ortonormale $X'_1, \dots, X'_{n-1}, Y_n$, (per questo basta una rotazione qualsiasi che porti X_n in Y_n). A questo punto X'_1, \dots, X'_{n-1} e Y_1, \dots, Y_{n-1} sono due basi ortonormali e positivamente orientate dello stesso \mathbb{R}^{n-1} (l'iperpiano ortogonale a Y_n) e quindi si conclude per induzione.

Suggeriamo al lettore di trattare i rimanenti casi.

Capita di frequente che i gruppi di Lie agiscano su varietà differenziabili. Ricordiamo che dato un gruppo astratto G e un insieme S , si dice che G *agisce su* S se vi è una applicazione

$$\begin{aligned} G \times S &\rightarrow S \\ (g, s) &\mapsto g \cdot s \end{aligned}$$

tale che $g \cdot (h \cdot s) = gh \cdot s$. L'azione si dice *transitiva* se per ogni $s, s' \in S$ esiste $g \in G$ tale che $s' = gs$. Se $s \in S$ lo stabilizzatore G_s di s è il sottogruppo di G definito da $G_s = \{g \in G \mid gs = s\}$. È banale verificare che, se G agisce transitivamente su S , vi è una biiezione, $\forall s \in S$,

$$\begin{aligned} G/G_s &\xrightarrow{\cong} S \\ [g] &\mapsto g \cdot s. \end{aligned}$$

Diremo che un gruppo di Lie G agisce in modo C^∞ su di una varietà differenziale X , se agisce su X , e se l'azione $G \times X \rightarrow X$ è un'applicazione C^∞ . Daremo ora vari esempi di tale azione. In ognuno di questi, l'azione di G sarà transitiva cosicché risulterà che X è in corrispondenza biunivoca con G/G_{x_0} , dove G_{x_0} è lo stabilizzatore di un punto $x_0 \in X$. Risulterà inoltre che G_{x_0} è un *sottogruppo chiuso* di G . In effetti è vero un risultato generale secondo cui, dato un sottogruppo chiuso H di un gruppo di Lie G , si può equipaggiare il quoziente G/H con una struttura differenziale "naturale". Non dimostriamo questo risultato generale, limitandoci per l'appunto a darne vari esempi. Gli esempi che abbiamo in mente sono i seguenti:

$$O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$$

$$SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}$$

$$U(n)/U(n-1) \cong S^{2n-1} \cong SU(n)/SU(n-1)$$

$$SO(n)/O(n-1) \cong \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$$

$$SU(n)/U(n-1) \cong \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$$

$GL(n, \mathbb{C})/P_{n,k} \cong Gr(k, \mathbb{C}^n)$, dove

$$P_{n,k} = \left\{ g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g = \begin{pmatrix} AB \\ OD \end{pmatrix}, A \in GL(k, \mathbb{C}) \right\}$$

$$U(n)/U(k) \times U(n-k) \cong Gr(k, \mathbb{C}^n).$$

Esaminiamo questi esempi.

(1) Il gruppo $O(n)$ agisce in modo C^∞ su \mathbb{R}^n , e porta S^{n-1} in sé. Dunque agisce in modo C^∞ su S^{n-1} . Mostriamo che l'azione è transitiva e che lo stabilizzatore di un punto è isomorfo a $O(n-1)$. Sia e_1, \dots, e_n la base standard di \mathbb{R}^n . Dato un punto $v = v_1 \in S^{n-1}$ sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di \mathbb{R}^n contenente v_1 come primo elemento e sia $g = (g_{ij}) \in O(n)$ t.c.

$$v_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} e_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si ha dunque, in particolare, $g(e_1) = v_1$ il che dimostra la transitività. Inoltre è evidente che lo stabilizzatore di e_1 in $O(n)$ è il sottogruppo *chiuso* delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & h & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad h \in O(n-1) \quad (17.5)$$

e dunque in definitiva $S^{n-1} \cong O(n)/O(n-1)$.

(2) Questo caso si tratta esattamente come il precedente.

(3) Si consideri l'azione naturale di $U(n)$ su \mathbb{C}^n data da $g \cdot v = \sum g_{ij} v_j$, dove $g = (g_{ij}) \in U(n)$ e $v = (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{C}^n$. Questa azione è ovviamente C^∞ . Per definizione g conserva la metrica hermitiana standard su \mathbb{C}^n , definita da:

$$\langle v, w \rangle = \sum v_i \bar{w}_i, \quad v = (v_1, \dots, v_n), \quad w = (w_1, \dots, w_n).$$

Si ha cioè: $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$. Ne segue che g porta in sé la sfera unitaria di \mathbb{C}^n e cioè la sfera:

$$S^{2n-1} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \langle v, v \rangle = 1\}.$$

Si ha dunque un'azione C^∞ di $U(n)$ su S^{2n-1} . Che l'azione sia transitiva lo si dimostra come nel caso precedente sfruttando il fatto che due riferimenti ortonormali di \mathbb{C}^n , rispetto alla metrica hermitiana standard, si ottengono l'uno

dall'altro tramite una matrice unitaria e cioè tramite un elemento di $U(n)$. Considerando anche in questo caso lo stabilizzatore del vettore $e_1 \in \mathbb{C}^n$ ci si accorge che esso è il sottogruppo chiuso di $U(n)$ costituito dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & h \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad h \in U(n-1). \quad (17.6)$$

Dunque $S^{2n-1} \cong U(n)/U(n-1)$. Il caso di $SU(n)$ si tratta nello stesso modo.

(4) Consideriamo $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$ come il quoziente di S^{n-1} per l'azione antipodale. L'azione di $SO(n)$ su S^{n-1} discende a una azione C^∞ e transitiva su $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$ nel modo ovvio: se $g = (g_{ij}) \in SO(n)$ allora

$$g \cdot [X_1, \dots, X_n] = [\sum g_{ji}X_i, \dots, \sum g_{jn}X_n].$$

Ne segue che lo stabilizzatore del punto $[1, 0, \dots, 0]$ è il sottogruppo chiuso di $SO(n)$ costituito dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \pm h \\ 0 & \end{pmatrix} \quad h \in SO(n-1), \quad (17.7)$$

o, ciò che è lo stesso, da quelle del tipo

$$\begin{pmatrix} \det(k) & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & k \\ 0 & \end{pmatrix} \quad k \in O(n-1). \quad (17.8)$$

Questo mostra che $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R} \cong SO(n)/O(n-1)$.

(5) Questo caso si tratta in modo completamente analogo a quello precedente. Qui si considera $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$ come quoziente di S^{2n-1} e si fa discendere a $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$ l'azione di $SU(n)$ su S^{2n-1} . In questo caso lo stabilizzatore del punto $[1, 0 \dots 0]$ è il sottogruppo di $SU(n)$ costituito dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} \det(k)^{-1} & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & k \\ 0 & \end{pmatrix} \quad k \in U(n-1). \quad (17.9)$$

(6) L'azione di $GL(n, \mathbb{C})$ su \mathbb{C}^n si estende in modo naturale e un'azione C^∞ su $\Lambda^k \mathbb{C}^n$ ponendo

$$g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = gv_1 \wedge \cdots \wedge gv_k . \quad (17.10)$$

Questa azione, così definita sui generatori di $\Lambda^k \mathbb{C}^n$, ed estesa per linearità a tutto $\Lambda^k \mathbb{C}^n$ non è transitiva. Però la stessa definizione (17.10) ci dice che essa è transitiva se la pensiamo come un'azione sull'insieme dei k -piani di \mathbb{C}^n . A questo punto è naturale far discendere l'azione di $GL(n, \mathbb{C})$ su $\Lambda^k \mathbb{C}^n$, ad un'azione su $\mathbb{P}\Lambda^k \mathbb{C}^n$ e poi restringerla alla Grassmanniana $Gr(k, \mathbb{C}^n) \subset \mathbb{P}\Lambda^k \mathbb{C}^n$. Otteniamo così un'azione C^∞ e transitiva di $GL(n, \mathbb{C})$ su $Gr(k, \mathbb{C}^n)$. Sia ora e_1, \dots, e_n la base standard di \mathbb{C}^n e consideriamo lo stabilizzatore del punto $[e_1 \wedge \cdots \wedge e_k] \in Gr(k, \mathbb{C}^n)$. Questo stabilizzatore è formato da quelle trasformazioni invertibili di \mathbb{C}^n che portano il k -spazio generato da e_1, \dots, e_k in se stesso e dunque dalle matrici g che soddisfano la proprietà:

$$g \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.11)$$

dove I è la matrice identità $k \times k$ e $A \in GL(k, \mathbb{C})$. Scrivendo g a blocchi, se ne deduce che deve risultare

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A \in GL(k, \mathbb{C}) \quad (17.12)$$

il che dimostra quello che volevamo.

(7) Facciamo qui un ragionamento identico a quello precedente. Nel calcolare lo stabilizzatore in $U(n)$ di $[e_1 \wedge \cdots \wedge e_k]$ troveremo ancora matrici del tipo (17.12), ma queste dovranno soddisfare l'ulteriore proprietà di essere matrici *unitarie*. Si avrà quindi, necessariamente, $B = 0$, $A \in U(k)$, $D \in U(n - k)$, come si voleva.

Esercizi

Esercizio 1. Dimostrare che $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(2n, \mathbb{R})$ sono gruppi di Lie.

Esercizio 2. Dimostrare che $\dim_{\mathbb{R}} U(n) = n^2$, $\dim_{\mathbb{R}} SU(n) = n^2 - 1$, $\dim_{\mathbb{R}} Sp(2n, \mathbb{R}) = 2n^2 + n$.

Esercizio 3. Dimostrare che $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, sono compatti (sono chiusi e limitati in un \mathbb{R}^N).

Esercizio 4. Dimostrare che $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(2n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$ sono connessi e che $GL(n, \mathbb{R})$ ha due componenti connesse.

Esercizio 5. Stabilire i seguenti diffeomorfismi: $SO(2) \cong S^1$, $SO(3) \cong \mathbb{P}^3\mathbb{R}$, $U(n) \cong S^1 \times SU(n)$, $SU(2) \cong S^3$.

Esercizio 6. Dimostrare che $SL(2, \mathbb{R})/U(1) \cong \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Osservazione. In relazione all'esercizio 5) è possibile dimostrare che le uniche sfere che ammettono una struttura di gruppo di Lie sono S^1 e S^3 .