Capitolo 2

Nozioni di algebra multilineare

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita su un campo K ($K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). Sia $L(V, W)$ lo spazio vettoriale, di dimensione infinita, avente come base gli elementi di $V \times W$. Sia $R(V, W)$ il sottospazio di $F(V, W)$ generato dagli elementi

$$
\begin{aligned}
&(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\
&(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\
&(\alpha v, w) - \alpha(v, w) \\
&(v, \alpha w) - \alpha(v, w)
\end{aligned}
$$

dove $\alpha \in K$, $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$. Il *prodotto tensoriale* di V e W è definito da

$$V \otimes W = L(V, W)/F(V, W) \ .$$

Vi è una proiezione naturale

$$\pi : V \times W \to V \otimes W \ ,$$

e per costruzione π è *bilineare*. Si pone

$$\pi((v, w)) = v \otimes w \,,$$

cosicché

$$
\begin{aligned}
&(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\
&v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\
&\alpha v \otimes w = \alpha(v \otimes w) = v \otimes \alpha w \ .
\end{aligned}
$$

È immediato verificare che $V \otimes W$ soddisfa la seguente proprietà universale. Data comunque una applicazione bilineare $\varphi : V \times W \to U$ esiste un'unica applicazione lineare $f : V \otimes W \to U$ tale che $f\pi = \varphi$: È anche facile verificare che vi sono isomorfismi canonici tra $V \otimes W$ e $W \otimes V$ e tra $V \otimes (W \otimes U)$ e $(V \otimes W) \otimes U$. Per la proprietà universale, vi è un omomorfismo (canonico)

$$V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W) \tag{1}$$

definito sui generatori di $V^* \otimes W$ da

$$F(\varphi \otimes w)(v) = \varphi(v) \cdot w \ . \tag{2}$$

Questo è in realtà un *isomorfismo* . Per dimostrare ciò, basta fare la facile verifica che, se $v_1, \dots, v_n$ è una base di V, se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ne è la base duale, e se $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ allora

$$F^{-1}(f) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes f(v_i) \ .$$

Sia ora $w_1, \dots, w_m$ una base di W. Dalla (2) segue che, identificando $Hom(V, W)$ con lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$, tramite le basi $\{v_i\}$ e $\{w_j\}$, la matrice $F(\varphi_i \otimes w_j)$ coincide con la matrice elementare e_{ji}. Questa osservazione fa vedere che $V \otimes W$ *ha dimensione* $n \cdot m$ *e che* $\{v_i \otimes w_j\}$ *ne è una base.*

Se $f : V \to W$ e $g : V' \to W'$ sono applicazioni lineari si definisce una applicazione lineare

$$f \otimes g : V \otimes V' \to W \otimes W'$$

ponendo: $(f \otimes g)(v \otimes v') = f(v) \otimes g(v')$.
Definiamo ora la K-algebra associativa

$$T(V) = \oplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes^n} \ ,$$

dove:

$$\begin{aligned} V^{\otimes^n} &= V \overbrace{\otimes \dots \otimes}^{n\text{-volte}} V \\ V^{\otimes^0} &= k \end{aligned}$$

e dove il prodotto è definito sui generatori, e poi per estensione lineare, da:

$$\begin{aligned} &v_1 \otimes \dots \otimes v_n \cdot w_1 \otimes \dots \otimes w_m = v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m \ . \\ &1 \cdot w_1 \otimes \dots \otimes w_m = w_1 \otimes \dots \otimes w_m \cdot 1 = w_1 \otimes \dots \otimes w_m \ . \end{aligned} \tag{3}$$

L'algebra così definita è *l'algebra tensoriale di* V (è immediato verificare che il prodotto (3) definisce nello spazio vettoriale $T(V)$ una struttura di algebra associativa).
Il prossimo oggetto che definiremo è l'algebra esterna. Dato uno spazio vettoriale di dimensione finita V, consideriamo l'ideale $I(V)$ dell'algebra tensoriale $T(V)$ generato dagli elementi del tipo $v \otimes v$, con $v \in V$. Elemento di $I(V)$ sarà, per esempio

$$v_1 \otimes v_2 \otimes v \otimes v \otimes v_3 + v_4 \otimes w \otimes w \otimes v_5 \otimes v_6 \otimes v_7 \ ,$$

dove v, w e $v_i = 1, \dots 7$ appartengono a V. *L'algebra esterna di* V è per definizione l'algebra quoziente

$$\Lambda(V) = T(V)/I(V)$$

e, dato un elemento $v_1 \otimes \dots \otimes v_k \in T(V)$, si denoterà con $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ la sua classe in $\Lambda(V)$. Si pone inoltre

$$\begin{aligned} I_k(V) &= I(V) \cap V^{\otimes^k}, \qquad k \geq 2 \\ \Lambda^k(V) &= V^{\otimes^k}/I_k(V), \qquad k \geq 2 \\ \Lambda^0(V) &= K \ , \ \Lambda^1(V) = V \ . \end{aligned}$$

Ne risulta facilmente una identificazione

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V) = K \oplus V \oplus \Lambda^2 V \oplus \dots \oplus \Lambda^n V \oplus \dots \ . \tag{4}$$

Notiamo subito che, dati v e w in V, risulta banalmente

$$v \wedge v = 0 \quad v \wedge w = -w \wedge v$$

(la seconda eguaglianza si ottiene dalla prima considerando che $(v+w)\wedge(v+w) = 0$). In modo altrettanto semplice si può osservare che

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha \quad \alpha \in \Lambda^k(V) \ , \ \beta \in \Lambda^l(V) \ .$$

Descriviamo ora la proprietà universale che $\Lambda^k(V)$ soddisfa. Innanzi tutto ricordiamo che una applicazione multilineare

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k\text{-volte}} \to W$$

si dice *alterna* se

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(v_1, \dots, v_k) \ , \quad \sigma \in \Sigma_k$$

dove $\varepsilon(\sigma)$ è il segno della permutazione σ.
La proprietà universale che $\Lambda^k(V)$ soddisfa è la seguente. Data una applicazione multilineare alterna

$$f : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-volte}} \to U$$

esiste un'unica applicazione *lineare*

$$\varphi : \Lambda^k V \to U$$

tale che $\varphi\pi = f$

dove $\pi(v_1, \ldots, v_k) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$. Data f, basterà infatti definire

$$\varphi(v_1, \wedge \ldots \wedge v_k) = f(v_1, \ldots, v_k)\,.$$

Occupiamoci ora di calcolare le dimensioni degli spazi $\Lambda^k(V)$. Sia $e_1, \ldots, e_n$ una base di V. Per ogni multiindice $I = \{i_1 < \ldots < i_k\}$, $I \subset \{1, \ldots, n\}$ poniamo

$$e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}\ .$$

Vogliamo mostrare che $\{e_I\}_{|I|=k}$ *è una base di* $\Lambda^k V$. È intanto ovvio che $\{e_I\}_{|I|=k}$ è un insieme di generatori, mostriamo che gli e_I sono linearmente indipendenti. Verifichiamo innanzitutto che $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \neq 0$. Per questo basta dimostrare che $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ non è un elemento di $I_n(V)$. Consideriamo l'applicazione lineare

$$P_k : V^{\otimes^k} \longrightarrow V^{\otimes^k}$$

(ben) definita, per estensione lineare, a partire da

$$P_k(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \epsilon(\sigma) v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}\,.$$

Chiaramente se $v_i = v_{i+1}$, per qualche i , allora $P_k(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = 0$, ciò implica che $I_k(V) \subseteq Ker\,(P_k)$. Dunque se $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ fosse un elemento di $I_n(V)$ si avrebbe $P(e_1 \otimes \ldots \otimes e_n) = 0$, e quindi

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) e_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes e_{\sigma^{-1}(n)} = 0\,.$$

Ma questo è assurdo perchè i tensori che appaiono in questa sommatoria appartengono a una base di $V^{\otimes^n}$.
Dimostriamo ora che gli e_I, $|I| = k$, sono linearmente indipendenti. Supponiamo che

$$\sum_{|I|=k} a_I e_I = 0 \qquad a_I \in K\ .$$

Fissato J con $|J| = k$, sia $J^c = \{j_1 < \ldots < j_{n-k}\}$ tale che $J \cup J^c = \{1, \ldots, n\}$ e dunque $J \cap J^c = \emptyset$. Poiché $J^c \cap I \neq \emptyset$ se $I \neq J$ si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= (\sum a_I e_I) \wedge e_{J^c} = \sum a_I e_I \wedge e_{J^c} \\ &= a_J e_J \wedge e_{J^c} \\ &= \pm a_J e_1 \wedge \ldots \wedge e_n\ , \end{aligned}$$

e quindi si ha che $a_J = 0$. Essendo J arbitrario ciò mostra che gli e_I, $|I| = k$ sono linearmente indipendenti. Possiamo quindi trarre le seguenti conclusioni.

$$\Lambda^h V = 0\ ,\ \ h > n\,,$$

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k} \quad , \quad 0 \le k \le n \, , \tag{5}$$

$$\dim \Lambda(V) = 2^n \, ,$$

$$\Lambda(V) = K \oplus V \oplus \Lambda^2(V) \oplus \ldots \oplus \Lambda^n(V) \ .$$

Studiamo infine *la k-sima potenza esterna di una applicazione lineare*. Se

$$f : V \to W$$

è una applicazione lineare, si definisce

$$\Lambda^k f : \Lambda^k V \to \Lambda^k W \, ,$$

ponendo

$$\Lambda^k f(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_k) \ .$$

È del tutto ovvio che $\Lambda^k f$ è un'applicazione lineare e che valgono le proprietà funtoriali

$$\Lambda^k(fg) \quad = \quad \Lambda^k(f)\Lambda^k(g) \ , \tag{6}$$

$$\Lambda^k(1_V) \quad = \quad 1_{\Lambda^k V} \ , \tag{7}$$

per ogni coppia di applicazioni lineari, $f : V \to W$ e $g : U \to V$. Vale inoltre

$$\Lambda^k(f)(v \wedge w) = \Lambda^s(f) \wedge \Lambda^{k-s}(f)(w) \ , \ \ \forall \, v \in \Lambda^s(V) \ , w \in \Lambda^{k-s}(V)$$

È particolarmente interessante studiare il caso di un endomorfismo

$$f : V \to V \ .$$

Incominciamo con lo studiare

$$\Lambda^n f : \Lambda^n V \to \Lambda^n V \ , \quad n = \dim V \ .$$

Ricordiamo che $\Lambda^n V$ è di dimensione 1. Ora, se U è uno spazio unidimensionale si ha la seguente catena di *isomorfismi canonici*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(U,U) & \cong & U^* \otimes U \to \cong K \\ & & \varphi \otimes v \mapsto \varphi(v) \ . \end{array}$$

Dunque si ha che $\Lambda^n f \in K$. Si è così definita una applicazione

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^n : \mathrm{End}(V) & \to & K \\ f & \mapsto & \Lambda^n(f) \end{array}$$

che soddisfa:

i) Λ^n è n-multilineare alterna

ii) $\Lambda^n(1) = 1$.

Una tale applicazione, è ben noto, non può che coincidere con il determinante

$$\Lambda^n(f) = det\,(f)$$

Ritroviamone le note formule. Se si introduce in V una base $e_1, \ldots, e_n$, a ogni endomorfismo $f : V \to V$ corrisponde una matrice $n \times n$ a coefficienti in K. Denotiamo con $A = (a_{ij})$ questa matrice cosicchè:

$$f(e_i) = \sum a_{ij} e_j \,.$$

Vogliamo calcolare la matrice dell'applicazione lineare

$$\Lambda^k(f) : \Lambda^k V \to \Lambda^k V \ , \quad k \leq n \ ,$$

nella base $\{e_I\}$. Se $I = \{i_1 < \ldots < i_k\}$, si ha

$$\begin{aligned} \Lambda^k(f)(e_I) &= (\sum a_{i_1 j} e_j) \wedge \ldots \wedge (\sum a_{i_k j} e_j) \\ &= \sum_{J=\{j_1<\ldots<j_k\}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \varepsilon(\sigma)(a_{i_1 j_{\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j_{\sigma(k)}}) e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k} \\ &= \sum_J |A_{IJ}| e_J \qquad (8) \end{aligned}$$

dove $|A_{IJ}|$ è il determinante del minore di A ottenuto considerando le righe $i_1, \ldots, i_k$ e le colonne $j_1, \ldots, j_k$. In particolare si ha

$$\Lambda^n(f)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = det\,(A)\,(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n)$$

Questo calcolo conferma che nell'identificazione canonica di $\Lambda^n(f)$ con un elemento di K si ha

$$\Lambda^n(f) = det\,(f)\,.$$

Come esercizio, si possono ora ritrovare le ben note formule per il calcolo del determinante di una matrice. Dimostriamo, come semplice applicazione delle cose dette, la formula

$$\det A = \sum_J (-1)^{[I]+[J]} |A_{IJ}||A_{I^c J^c}| \ , \quad [I] = \sum_{s=1}^{k} (i_s - s)$$

che generalizza lo sviluppo di un determinante secondo una riga e una colonna. Si ha

$$\begin{aligned} (\det A) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n &= (-1)^{[I]} f(e_I \wedge e_{I^c}) \\ &= (-1)^{[I]} (\sum_J |A_{IJ}| e_J) \wedge (\sum |A_{I^c K}| e_K) \\ &= (-1)^{[I]} \sum_J |A_{IJ}||A_{I^c J^c}| e_J \wedge e_{J^c} \\ &= (-1)^{[I]} (\sum_J (-1)^{[J]} |A_{IJ}||A_{I^c J^c}|) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Usando le proprietà funtoriali di Λ^k, si ottengono i ben noti risultati sul determinante del prodotto di matrici e si ritrova che il non annullarsi del determinante equivale alla invertibilità dell'applicazione.

Vogliamo ora dare un'altra caratterizzazione dello spazio $\Lambda^k(V)$. Denotiamo con $A_k(V)$ lo spazio vettoriale delle *forme multilineari alterne*

$$f : V \times \ldots \times V \to K \ .$$

Vogliamo mostrare che c'è un isomorfismo canonico

$$A^k(V) \cong (\Lambda^k(V))^* \ . \tag{9}$$

Se si considera la proprietà universale (A.5) nel caso in cui $U = K$, la corrispondenza biunivoca tra forme multilineari su $V \times \ldots \times V$ e forme lineari su $\Lambda^k V$ fornisce il desiderato isomorfismo lineare

$$\begin{array}{ccc} A_k(V) & \stackrel{\cong}{\to} & (\Lambda^k V)^* \\ f & \mapsto & \varphi \end{array} \tag{10}$$

Stabiliamo ora un isomorfismo

$$(\Lambda^k V)^* \cong \Lambda^k(V^*) \tag{11}$$

osservando che la forma bilineare

$$\det : \ \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \to K$$

definita sui generatori da

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \ , \ v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \mapsto \det \varphi_i(v_j)$$

è ben definita e non-degenere. Dunque, tenendo conto degli isomorfismi sopra scritti si ottiene un isomorfismo canonico

$$A_k(V) \cong \Lambda^k(V^*) \ . \tag{12}$$

Tramite questo isomorfismo si identifica dunque lo spazio delle forme k-multilineari alterne su V con la k-sima potenza esterna del duale di V.

Terminiamo questa discussione sull'algebra esterna con una osservazione elementare ma istruttiva. In geometria elementare dati due vettori $v = (a_1, a_2, a_3)$, $w = (b_1, b_2, b_3)$ di $\mathbb{R}^3$ si definisce il prodotto vettoriale $v \times w \in \mathbb{R}$ ponendo

$$v \times w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

dove $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ formano una base *ortonormale* e *positivamente orientata* di $\mathbb{R}^3$. Non solo, si mostra con semplici calcoli che la *definizione* di $v \times w$ è *indipendente dalla base ortonormale e positivamente orientata scelta.* Vorremmo ora spiegare questa costruzione in termini più astratti, facendo vedere perchè essa sia propria di uno spazio 3-dimensionale orientato e dotato di prodotto scalare. Incominciamo col fare delle considerazioni generali. Sia V, uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Definiamo una applicazione bilineare

$$\psi : \Lambda^k V \times \Lambda^{n-k} V \to \Lambda^n V \tag{13}$$

ponendo

$$\psi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k,\ w_1 \wedge \ldots \wedge w_{n-k}) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_{n-k}\ .$$

Se $e_1, \ldots, e_n$ è una base di V, dati $v_1, \ldots, v_k$ e scelti $v_{k+1}, \ldots, v_n$ in modo che $v_1, \ldots, v_n$ sia una base di V, si ha $\psi(v_1, \wedge \ldots \wedge v_k,\ v_{k+1} \wedge \ldots \wedge v_n) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \neq 0$. Ne discende che ψ è non-degenere. Se poi V è dotato di un prodotto scalare $B(\ ,\ )$ si può identificare $\Lambda^n V$ con $\mathbb{R}$ in modo canonico ponendo

$$\begin{aligned} \varphi_B : \qquad & \Lambda^n V \to \mathbb{R} \\ & e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \mapsto 1 \end{aligned} \tag{14}$$

dove $e_1, \ldots, e_n$ è una base ortonormale rispetto a B e positivamente orientata. L'applicazione φ_B è ben posta, poiché se $e'_1, \ldots, e'_n$ è un'altra base dello stesso tipo, allora

$$e'_i = \sum a_{ij} e_j\ ,\ \det(a_{ij}) = 1\ ,$$

e dunque

$$e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_n = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n\ .$$

Dalla applicazione bilineare non-degenere (13) e dall'isomorfismo (14) si deduce che se V è uno spazio vettoriale reale n-dimensionale dotato di prodotto scalare $B(\ ,\ )$ vi è un isomorfismo

$$\psi_B : \Lambda^k(V) \to (\Lambda^{n-k}(V))^*\ . \tag{15}$$

D'altro canto si ha un isomorfismo canonico (11)

$$(\Lambda^{n-k}(V))^* = \Lambda^{n-k}(V^*) \tag{16}$$

ed un isomorfismo

$$\eta_B : V^* \cong V$$

dato dal prodotto scalare, e dunque un isomorfismo

$$\Lambda^{n-k}\eta_B : \Lambda^{n-k}(V^*) \to \Lambda^{n-k} V\ . \tag{17}$$

Componendo (15), (16), (17) si ottiene un isomorfismo

$$\xi_B : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$$

che dipende solo da B. Consideriamo ora l'applicazione bilineare

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & \Lambda^2 V \\ (v,w) & \mapsto & v \wedge w \end{array}$$

Nel caso in cui la dimensione n di V è eguale a 3, *e solo in questo caso* la dimensione di $\Lambda^2 V$ coincide con quella con V. Sia dunque V *uno spazio 3-dimensionale* e supponiamo V dotato di un prodotto scalare B. Si ha allora una applicazione bilineare

$$V \times V \to \Lambda^2 V \overset{\xi_B}{\to} V \tag{18}$$

$$v \wedge w \mapsto \xi_B(v \wedge w) \ .$$

Ebbene un calcolo semplice ed istruttivo mostra che

$$v \times w = \xi_B(v \wedge w) \ .$$

Questa è la relazione intercorrente tra il prodotto wedge, che si definisce indipendentemente da un prodotto scalare su V, e il prodotto vettoriale, in uno spazio 3-dimensionale euclideo.

Presentiamo un'altra costruzione di algebra multilineare: l'algebra simmetrica. Si consideri nell'algebra tensoriale l'ideale $J(V)$ generato dagli elementi $u \otimes v - v \otimes u$, $u, v \in V$. L'algebra quoziente

$$S(V) = T(V)/J(V)$$

prende il nome di *algebra simmetrica*. Denoteremo con $v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n$ la classe, in $S(V)$, di $v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_k$. Naturalmente, se si pone

$$\begin{array}{rcl} J^d(V) & = & J(V) \cap V^{\otimes^d} \\ S^d(V) & = & V^{\otimes^d}/J^d(V) \quad d \geq 2 \\ S^1(V) & = & V \ , \ S^0(V) = K \ , \end{array}$$

si ottiene

$$S(V) = \bigoplus_{d \geq 0} S^d(V) \ .$$

Se $e_1, \ldots, e_n$ è una base di V, si vede facilmente che

$$\{e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_d}\} \quad i_1 \leq \ldots \leq i_d$$

è una base di $S^d(V)$. Ora le d-ple di indici $(i_1, \ldots, i_d)$ tali che $i_1 \leq \ldots \leq i_d$, $1 \leq i_k \leq n$, sono in corrispondenza biunivoca con le d-ple di indici $(j_1, \ldots, j_d)$ tali che $j_1 < \ldots < j_d$, $1 \leq j_k \leq n + d - 1$, la corrispondenza essendo data da:

$$(i_1, \ldots, i_d) \mapsto (i_1, i_2 + 1, i_3 + 2, \ldots, i_d + d - 1) \ .$$

Ne segue che, se n è la dimensione di V,

$$\dim S^d(V) = \binom{n+d-1}{d} \ , \ n = \dim V \tag{19}$$

Un'altra base di $S^d(V)$ è data dagli elementi

$$e_1^{h_1} \cdot \ldots \cdot e_n^{h_n}$$

dove $e^h = e \cdot \ldots \cdot e$, h-volte e dove $\sum i_k = d$. La scelta di questa base stabilisce un isomorfismo di K-algebre

$$S(V) \cong K[e_1, \ldots, e_n].$$

Osservazione (A.17) Osserviamo che tutte le costruzioni e le considerazioni fatte in questo capitolo si trasportano senza alcun cambiamento quando si passi dalla categoria degli spazi vettoriali su un campo a quella dei *moduli liberi su di un anello commutativo con unità*.

Esercizi

Esercizio 1. Siano $\{e_1, e_3, e_3, e_4, e_5)\}$ e $\{v_1, v_2\}$ le basi standard di $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^2$ rispettivamente. Siano $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$le applicazioni lineari definite da

$$f(e_1) = v_1 \ , \ f(e_2) = v_1 + v_2 \ , \ f(e_3) = v_1 - v_2 \ , \ f(e_4) = v_2 \ , \ f(e_5) = 2v_1 - v_2 \, ,$$

$$g(v_1) = e_1 + e_3 \ , \ g(v_2) = e_2 + e_4 \, .$$

Sia $h = g \circ f$. Descrivere

$$\bigwedge^3 h : \bigwedge^3 \mathbb{R}^5 \to \bigwedge^3 \mathbb{R}^5 \, . \tag{20}$$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale. Stabilire un isomorfismo canonico tra $V \otimes V$ e $\bigwedge^2 V \oplus S^2 V$.

Esercizio 3. Sia $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ la base standard di $\mathbb{R}^4$ e $v_1,\ v_2,\ v_3$ la base standard di $\mathbb{R}^2$. Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $f(e_1) = v_1 + v_2,\ f(e_2) = v_1 - v_2,\ f(e_3) = v_1 - v_3,\ f(e_4) = v_1 + v_3,$ Calcolare

$$\bigwedge^2 (f) \, , \ \bigwedge^3 (f) \, , \ \bigwedge^4 (f) \, .$$

Esercizio 4. Siano V e W spazi vettoriali con basi $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{f_1, \dots, f_m\}$ rispettivamente. Siano $f : V \to V$ e $g : W \to W$ due applicazioni lineari le cui matrici associate, rispetto alle basi suddette, siano A e B, rispettivamente. Descrivere la matrice $A \otimes B$ di $f \otimes g : V \otimes W \to V \otimes W$ nella base $\{e_i \otimes f_j\}$.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{C}^4$ e sia $A : V \to V$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Determinare, se esiste, il più piccolo intero n tale che

$$A^{\otimes^n} : V^{\otimes^n} \longrightarrow V^{\otimes^n}$$

possegga almeno 18 autovalori distinti.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 4$. Si mostri che, dato $w \in \Lambda^2 V$, esiste una base $e_1, \dots, e_n$ di V tale che

$$w = \sum_{i=1}^{r} e_i \wedge e_{r+i} \ , \quad \text{con} \quad 0 \leq r \leq \frac{n}{2} \, . \tag{22}$$

(Si consideri una espressione $w = \sum_{i=1}^{r} v_i \wedge w_i$ con r minimo.)

Esercizio 7. Sia A una matrice $n \times m$ e B una matrice $m \times n$, con $m \geq n$, entrambi a coefficienti in un campo K. Trovare una espressione di $det\,(A \cdot B)$ in termini dei determinanti dei minori di ordine n di A e di B.

Esercizio 8. Dato uno spazio vettoriale V e due applicazioni multilineari alterne $f \in A_h(V)$ e $g \in A_k(V)$, si usi l'isomorfismo canonico $A_m(V) \cong \Lambda^m(V^*)$ per dimostrare la formula

$$f \wedge g(v_1, \dots, v_{h+k}) = \frac{1}{h!\,k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}h+k} \epsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(h)}) g(v_{\sigma(h+1)}, \dots, v_{\sigma(h+k)}) \, .$$