

# Chapter 1

## Sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa

### 1.1 Funzioni olomorfe e Teorema di Cauchy

Consideriamo il piano complesso  $\mathbb{C}$ , con coordinata complessa  $z$ . Vogliamo studiare le funzioni  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , dove  $U$  è un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{C}$ .

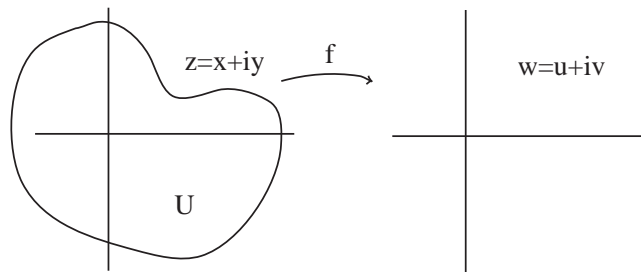


Fig.1

La funzione  $f$  assegna ad ogni punto  $z \in U$  un numero complesso  $w = f(z)$  di  $\mathbb{C}$ . Identificando  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ , possiamo anche pensare a  $f$  come a una coppia funzioni reali di due variabili reali  $x, y$  e dunque come a una applicazione che ad ogni punto  $(x, y)$  di  $U$  assegna un punto

$$f(x, y) \equiv (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2.$$

Spesso si scrive anche

$$f(x, y) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$$

e si dice che  $u$  è la *parte reale* di  $f$  e  $v$  quella *immaginaria*. In simboli si scrive

$$u = \Re(f), \quad v = \Im(f).$$

D'ora in poi assumeremo che  $f$  sia  $C^\infty$  (i.e. infinitamente derivabile) in  $U$ . L'anello delle funzioni  $C^\infty$  in  $U$  si denota con il simbolo  $C^\infty(U)$ , oppure con il simbolo  $\mathcal{E}^0(U)$ . Le derivate parziali prime di  $f \in \mathcal{E}^0(U)$  sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

La *derivata direzionale* di  $f$  rispetto a  $\mathbf{v} = \xi + i\eta$  è:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} \quad (1.1)$$

Ecco alcuni esempi di funzioni di  $z = x + iy$  :

1.  $f(z) = \pi + 2i$
2.  $f(z) = z$
3.  $f(z) = z^2 + 1$
4.  $f(z) = 1/z$
5.  $f(z) = 1/(z^2 - 1)$
6.  $f(z) = (\cos y + i \sin y) \exp x$
7.  $f(z) = x^3 + iy$
8.  $f(z) = \bar{z} = x - iy$
9.  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$
10.  $f(z) = \sin x + i \cos y$ .

Si ricorda che il *coniugato* di  $z$  è  $\bar{z} = x - iy$ , mentre il *valore assoluto* di  $z$  è  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ .

Ognuna delle funzioni precedenti è  $C^\infty$  nel proprio dominio di definizione, però solo alcune tra esse godono di una ulteriore notevole proprietà: qualsiasi sia il punto  $\zeta \in U$ , il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lim_{t \in \mathbb{R}} \frac{f(\zeta + t\mathbf{v}) - f(\zeta)}{t\mathbf{v}} \quad (1.2)$$

esiste ed è *indipendente dalla direzione  $\mathbf{v}$  scelta*.

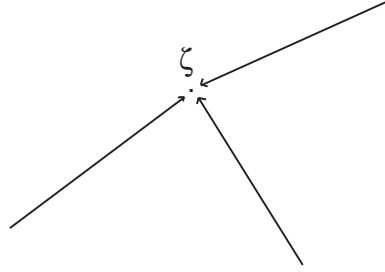


Fig. 2

Una funzione,  $C^\infty$  in  $U$ , che goda di questa proprietà si dice *olomorfa in  $U$* . Se si tenta di usare questa definizione per verificare se una data funzione (per esempio una di quelle scritte sopra) è, o non è, olomorfa si incontrano subito alcune difficoltà. Vi è però una maniera facile per farlo. Ritorniamo alla formula (1.1) e osserviamo che risulta

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + t\mathbf{v}) - f(\zeta)}{t\mathbf{v}} = \frac{1}{\mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.3)$$

Dunque:  $f$  è *olomorfa in  $U$*  se e solo se

$$\frac{1}{\mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{\mathbf{w}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \quad (1.4)$$

per ogni coppia di vettori non nulli  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  in  $\mathbb{C}$ . In particolare, prendendo  $\mathbf{v} = 1$  e  $\mathbf{w} = i$ , risulta che se  $f$  è olomorfa allora

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y},$$

o, se si vuole,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1.5)$$

Non è difficile far vedere che dalla relazione (1.5) si deduce la (1.4), per ogni coppia di vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ . Dunque *una funzione  $f$  è olomorfa in  $U$  se e solo se la relazione (1.5) vale in tutti i punti di  $U$* .

Scrivendo  $f = u + iv$  e separando nella relazione (1.5) la parte reale da quella immaginaria, si ottiene che questa relazione è equivalente al sistema

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.6)$$

Queste equazioni prendono il nome di *equazioni di Cauchy-Riemann*, esse esprimono la *condizione necessaria e sufficiente per l'olomorfia della  $f$* .

Dimostriamo ora che per una funzione  $f \in C^\infty(U)$  l'essere olomorfa in  $U$  è equivalente all'esistenza, in ogni punto  $z_0$  di  $U$ , del limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (1.7)$$

Che l'esistenza di questo limite implichi la relazione (1.5), e dunque le equazioni di Cauchy-Riemann è cosa ovvia. Viceversa, essendo  $f \in C^\infty(U)$ , in un intorno  $U'$  di  $z_0 = x_0 + y_0$ , si può scrivere

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= (x - x_0)f_x(z_0) + (y - y_0)f_y(z_0) + \\ &+ (x - x_0)^2h + (x - x_0)(y - y_0)k + (y - y_0)^2l \end{aligned} \quad (1.8)$$

con  $h, k, l \in C^\infty(U')$ . Se per  $f$  valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, allora si ha, per  $\xi = x - x_0$ ,  $\eta = y - y_0$

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)f_x(z_0) + \xi^2h + \xi\eta k + \eta^2l, \quad (1.9)$$

da cui segue che, in un intorno  $U''$  di  $z_0$  la cui chiusura è contenuta in  $U'$ , si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_x(z_0) \right| < 3M|z - z_0|,$$

$M$  essendo un numero reale maggiore dei massimi di  $|h|$ ,  $|k|$ , e  $|l|$  in  $\overline{U''}$ . Da ciò segue l'esistenza del limite (1.7).  $\square$

Se  $f$  è olomorfa in un aperto  $U \subseteq \mathbb{C}$ , è naturale definire la *derivata complessa*  $f'(\zeta)$  di  $f$  in  $\zeta \in U$ , come il seguente limite

$$f'(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Dunque, per una funzione  $C^\infty$  in un aperto  $U$ , l'essere olomorfa è equivalente al possedere in  $U$  la derivata complessa. Si verifica facilmente che se  $f$  e  $g$  sono olomorfe in  $U$  allora lo sono anche  $f + g$  e  $fg$ .

**Notazione 1** D'ora in poi, dato un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ , denoteremo con il simbolo  $\mathcal{O}(U)$  l'anello delle funzioni olomorfe in  $U$ , con il simbolo  $\mathcal{O}^*(U)$  il gruppo moltiplicativo delle funzioni olomorfe e mai nulle in  $U$ , e con il simbolo  $\mathcal{O}(\overline{U})$  l'insieme delle funzioni olomorfe in un intorno di  $\overline{U}$ .

Una funzione  $f \in C^\infty(U)$ , dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{C}$ , può pensarsi come funzione complessa di  $x$  e  $y$  oppure, tramite il cambiamento di coordinate

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

come funzione di  $z$  e  $\bar{z}$ . Scrivendo

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

e  $f(x, y) = f(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}))$ , si vede subito che è naturale definire

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Usando questa notazione, si vede che  $f$  è *olomorfa* se e solo se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Questa condizione è equivalente alla condizione

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0.$$

Si vede inoltre che, se  $f$  è *olomorfa* allora

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Infine, in accordo con le notazioni introdotte, data una funzione  $f$ , che sia  $C^\infty$ , il differenziale di  $f$  è dato da

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

e si può dire che  $f$  è *olomorfa* se e solo se

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Veniamo ora a un'altra fondamentale proprietà delle funzioni olomorfe. Vogliamo far vedere che le funzioni olomorfe sono analitiche e che, in effetti, olomorfia e

analiticità sono sinonimi. Prima di fare ciò ricordiamo cosa vuol dire che una funzione è analitica in un aperto  $U$  di  $\mathbb{C}$ . Vuol dire che per ogni punto  $\zeta$  di  $U$  c'è un disco  $\Delta$  di centro  $\zeta$ , la cui chiusura è contenuta in  $U$  e tale che, in  $\Delta$ , la funzione  $f$  può esprimersi in serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \zeta)^n,$$

dove, necessariamente,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}.$$

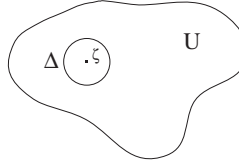


Fig. 3

Per esempio, la funzione  $1/z$  è analitica in  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Infatti, fissato  $\zeta \in U$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{(1/\zeta)}{1 - (-1)(z - \zeta)/\zeta} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\zeta^{n+1}} (z - \zeta)^n, \quad \text{non appena } |z - \zeta| < |\zeta|. \end{aligned}$$

Vedremo nel seguito un'utile applicazione di questo sviluppo in serie.

Dimostriamo ora che olomorfia e analiticità sono sinonimi. Intanto è chiaro che una funzione  $f$  analitica in un aperto  $U \subset \mathbb{C}$  vi è anche olomorfa. Infatti, dato  $\zeta \in U$  si può sviluppare  $f$  in serie di potenze vicino a  $\zeta$ , e cioè in somma di termini del tipo  $a_n(z - \zeta)^n$ . Ognuno di questi soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann, e gli usuali teoremi sulla convergenza uniforme ci assicurano che anche la loro somma le soddisfano [cf. Esercizio 7].

Dimostrare che una funzione olomorfa è anche analitica non è altrettanto semplice e coinvolge un fatto più profondo: il teorema di Stokes.

Il teorema fondamentale del calcolo ci dice che, se  $f$  è una funzione reale definita

e derivabile (e.g.  $C^\infty$ ) in un intorno di un intervallo  $I$  di estremi  $a$  e  $b$ , allora

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) ,$$

il che si può anche scrivere

$$\int_I df = \int_{\partial I} f .$$

Il teorema di Stokes è la versione bidimensionale di questo teorema. Per enunciarlo abbiamo bisogno della seguente definizione.

**Definizione 1** . Una regione (o dominio) regolare di  $\mathbb{C}$  è un aperto limitato  $U$  il cui bordo  $\partial U$  è costituito da un numero finito di curve chiuse, semplici e  $C^\infty$ .

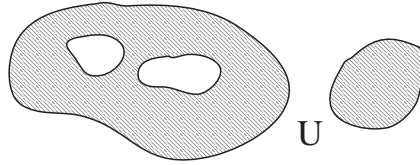


Fig. 4

Il teorema di Stokes può enunciarsi così: sia  $\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy$  una 1-forma differenziale definita e  $C^\infty$  in un intorno di una regione regolare  $U \subset \mathbb{R}^2$  allora

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega, \quad (1.10)$$

dove

$$d\omega = \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy.$$

Un'osservazione fondamentale è la seguente:

**Lemma 1** Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto, sia  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Allora la forma differenziale  $\omega = f(z)dz$  è chiusa in  $U$ , e cioè  $d\omega = 0$  in  $U$ .

*Dim.* Per le equazioni di Cauchy-Riemann scritte nella forma (1.5), si ha:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(fdz) \\ &= d(fdx + ifdy) \\ &= \left( i \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dal Lemma e dal teorema di Stokes segue subito il seguente teorema.

**Teorema di Cauchy 1** Sia  $U \subset \mathbb{C}$  una regione regolare, sia  $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ . Allora

$$\int_{\partial U} f dz = 0.$$

La prima fondamentale applicazione del Teorema di Cauchy è la seguente.

**Formola integrale di Cauchy 1** Sia  $U \subset \mathbb{C}$  una regione regolare, sia  $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ , sia  $\zeta \in U$ , allora

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

*Dim.* Sia  $\Delta = \Delta_\epsilon$  un disco di raggio  $\epsilon$ , di centro  $\zeta$ , la cui chiusura sia contenuta in  $U$  (come nella Fig. 3). Applicando il teorema di Cauchy alla funzione  $f(z)/(z - \zeta)$  e alla regione regolare  $U \setminus \Delta_\epsilon$ , si ottiene

$$\int_{\partial(U \setminus \Delta_\epsilon)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 0,$$

ovvero

$$\int_{\partial \Delta_\epsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz,$$

e quindi anche

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Delta_\epsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

D'altro canto per  $z \in \partial \Delta_\epsilon$ , si ha  $z - \zeta = \epsilon e^{i\theta}$ ,  $dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$ , e quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Delta_\epsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(\zeta + \epsilon e^{i\theta}) i d\theta \\
&= 2\pi i f(\zeta),
\end{aligned}$$

come si voleva. □

Siamo ora in grado di dimostrare che le funzioni olomorfe sono analitiche. Sia dunque  $f$  una funzione olomorfa in un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ . Sia  $z_0 \in U$ , e sia  $\Delta$  un



disco di centro  $z_0$  la cui chiusura è contenuta in  $U$ . Usando la formula integrale di Cauchy e gli usuali teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, otteniamo, per  $\zeta \in \Delta$ :

$$\begin{aligned}
 f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz, \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z - z_0 - (\zeta - z_0)} dz, \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{(z - z_0)(1 - (\zeta - z_0)/(z - z_0))} dz, \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n dz, \\
 &= \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right) (\zeta - z_0)^n.
 \end{aligned}$$

Ciò mostra che  $f(z)$  è sviluppabile in serie di potenze intorno a  $z_0$  ed è quindi analitica.  $\square$

Se ripercorriamo il ragionamento appena svolto ci accorgiamo che, tramite la formula integrale di Cauchy l'incarico di esprimere una funzione olomorfa in serie di potenze intorno a un punto  $z_0$ , lo assume la semplicissima funzione  $1/(1 - (\zeta - z_0)/(z - z_0))$ , scaricando  $f$  da ogni dovere. Questo è l'applicazione che avevamo anticipato dallo sviluppo in serie della funzione  $1/z$ . Vi è un'altra osservazione da fare. Una volta espressa la  $f(\zeta)$  in serie di potenze intorno al punto  $z_0$  si ha che questa serie è necessariamente la serie di Taylor-MacLaurin di  $f$  intorno al punto  $z_0$ , e quindi, paragonando i coefficienti, abbiamo ottenuto le seguenti formule che generalizzano la formula di Cauchy:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (1.11)$$

L'analiticità, e dunque l'olomorfia, deve evocare una proprietà di rigidità. Rian-  
dando per un istante al caso delle funzioni di una variabile reale, il solito esempio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

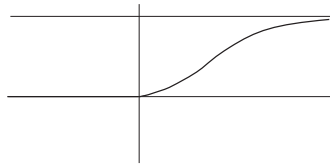


Fig. 5

che è funzione  $C^\infty$  in  $\mathbb{R}$ , non identicamente nulla, e dunque *non analitica*, (essendo per ogni  $n \geq 0$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ ), ci ricorda che le funzioni analitiche non possono distorcersi o appiattirsi a piacimento, e che dunque il di loro comportamento locale governa, in certa misura, il loro comportamento globale. Enunciamo formalmente questa fondamentale proprietà delle funzioni analitiche

**Principio di Continuazione Analitica 1** *Sia  $f$  una funzione analitica complessa non-nulla (il caso reale è analogo), definita in un aperto connesso  $U \subset \mathbb{C}$ . Allora l'insieme  $Z$  degli zeri di  $f$  è privo in  $U$  di punti di accumulazione, ed è quindi un insieme di punti isolati in  $U$ .*

Se, per esempio,  $U$  è un disco aperto, allora  $Z$  può apparire come nella seguenti figure:

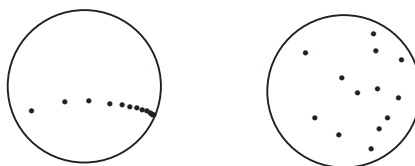


Fig. 6

ma non come nelle seguenti:

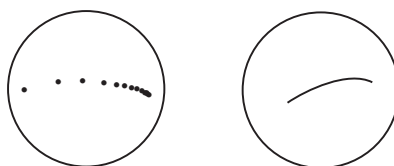


Fig. 7

Dimostriamo il principio di continuazione analitica. Sia  $\{\zeta_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset Z$  una successione non costante in  $Z$  convergente a  $\zeta \in Z \cap U$ , cosicché, in particolare,  $f(\zeta_\nu) = f(\zeta) = 0$ . In un intorno di  $\zeta$  si scrive

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - \zeta)^n.$$

Sia  $m$  il più piccolo intero per cui  $a_m \neq 0$ . Si ha:

$$0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{f(\zeta_\nu)}{(\zeta_\nu - \zeta)^m}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \{a_m + a_{m+1}(\zeta_\nu - \zeta) + a_{m+2}(\zeta_\nu - \zeta)^2 + \dots\} \\
&= a_m
\end{aligned}$$

La contraddizione mostra che  $f$  è identicamente nulla in un piccolo intorno di  $\zeta$ . Ora, usando un pò di topologia generale, si sfrutta l'ipotesi di connessione su  $U$ . Sia  $Z' \subset Z$  l'insieme di quei punti di accumulazione di  $Z$  che sono in  $U$ . L'argomento che abbiamo appena svolto dimostra che se  $\zeta \in Z'$  allora tutto un intorno di  $\zeta$  appartiene a  $Z'$ . Dunque  $Z'$  è aperto in  $U$ . D'altro canto, per ragioni generali,  $Z'$  è un chiuso di  $U$ . Essendo  $U$  connesso si deve avere  $Z' = U$ , oppure  $Z' = \emptyset$ . La prima eventualità si scontra con l'ipotesi che  $f$  sia non nulla, la seconda è quella prevista dalla tesi.  $\square$

Il principio di continuazione analitica ha una immediata, utilissima, applicazione. Consideriamo, per esempio, le funzioni (reali) classiche:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\exp x$ ,  $\log x$ . Si ha:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, & x \in \mathbb{R}, \\
\cos x &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, & x \in \mathbb{R}, \\
e^x &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, & x \in \mathbb{R}, \\
\log x &= \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, & x \in \mathbb{R}, \quad |x-1| < 1.
\end{aligned}$$

Dimentichiamo, per un momento, che ognuna di queste serie converge alla rispettiva funzione classica. Sostituiamo, ciecamente, in ognuna di esse, alla variabile reale  $x$ , la variabile complessa  $z$ . Ebbene si vede subito che la serie

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{1.12}$$

converge su tutto  $\mathbb{C}$ , e così fanno la seconda e la terza serie, mentre la quarta:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

converge non appena  $|z-1| < 1$ . Osserviamo la serie 1.12. Poiché essa converge su tutto  $\mathbb{C}$ , la funzione  $f(z)$  a cui converge è analitica su  $\mathbb{C}$ , e coincide con  $\sin z$  su  $\mathbb{R}$ . Questa è l'unica funzione analitica che ha il diritto di chiamarsi  $\sin z$ . Infatti, se ce ne fosse un'altra, che chiameremo  $g(z)$ , allora anch'essa coinciderebbe con  $\sin z$  su tutto  $\mathbb{R}$ , e la differenza  $f-g$  sarebbe una funzione analitica su tutto  $\mathbb{C}$  il cui insieme degli zeri conterrebbe  $\mathbb{R}$ , e dunque per il principio di continuazione

analitica,  $g$  non potrebbe che coincidere con  $f$ . Possiamo quindi definire senza ambiguità  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\exp z$ ,  $\log z$ , ponendo:

$$\begin{aligned}\sin z &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, & z \in \mathbb{C}, \\ \cos z &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, & z \in \mathbb{C}, \\ e^z &= \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, & z \in \mathbb{C}, \\ \log z &= \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}, & z \in \mathbb{C}, \quad |z-1| < 1.\end{aligned}$$

Diamo ora una importante applicazione della formula integrale di Cauchy e del principio di continuazione analitica.

**Teorema del Massimo 1** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  una regione regolare e connessa, sia  $f \in \mathcal{O}(\bar{U})$ . Allora il massimo di  $|f|$  in  $\bar{U}$  è necessariamente assunto in un punto del bordo  $\partial U$  di  $U$ .*

Prima di dare la dimostrazione di questo teorema abbiamo bisogno di un'altra semplice conseguenza del principio di continuazione analitica.

**Lemma 2** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto connesso, sia  $f \in \mathcal{O}(U)$  e sia  $|f|$  costante in  $U$ . Allora  $f$  è costante in  $U$ .*

*Dim.* Con la notazione introdotta in (1.10), si ha:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial |f|^2}{\partial z} \\ &= \frac{\partial (f\bar{f})}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} \bar{f} + f \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} \bar{f},\end{aligned}$$

essendo  $f$  olomorfa. Dal principio di continuazione analitica segue che o  $f = 0$  oppure  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ , [cf. Esercizio 10], e dunque  $f$  è costante in  $U$ .  $\square$

*Dim. del Teorema del massimo.* Sia per assurdo  $z_0 \in U$  un massimo di  $|f|$  e sia  $M = |f(z_0)|$ . Sia  $\Delta_\rho$  un cerchio di raggio  $\rho$  con centro  $z_0$ , la cui chiusura sia contenuta in  $U$ . Scrivendo, per  $z \in \Delta_\rho$ ,  $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ , dalla formula di Cauchy

segue, che

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

e dunque che

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta. \quad (1.13)$$

D'altro canto si ha che  $|f(z_0 + \rho e^{i\theta})| \leq M = |f(z_0)|$ . Mettiamoci allora su  $\partial\Delta_\rho$ , se vi fosse anche un solo punto  $z$  di  $\partial\Delta_\rho$  in cui quest'ultima diseuguaglianza valesse in senso stretto, allora, per continuità, essa varrebbe in senso stretto in tutto un intorno di  $z$  in  $\partial\Delta_\rho$ , e quindi si avrebbe

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta < M = |f(z_0)|,$$

il che contraddirebbe la 1.13. Si può concludere che  $|f(z)| = |f(z_0)|$  su  $\partial\Delta_\rho$ . Per l'arbitrarietà di  $\rho$  si ha dunque che il modulo di  $f$  è costante in un piccolo intorno di  $z_0$ , ma, per il lemma che abbiamo appena dimostrato, ciò implica che  $f$  è costante intorno a  $z_0$  e quindi in  $U$ , per il principio di continuazione analitica.  $\square$

Come corollario possiamo dimostrare il seguente teorema.

**Teorema Fondamentale dell'Algebra 1** *Sia  $p(z) \in \mathbb{C}[z]$  un polinomio non costante. Allora  $p(z)$  ammette in  $\mathbb{C}$  almeno uno zero.*

*Dim.* Scriviamo

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0.$$

Per  $R \gg 0$ , e per  $|z| > R$  si ha:

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq |z^n| \left( |a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \frac{|a_{n-2}|}{|z|^2} - \dots - \frac{|a_0|}{|z^n|} \right) \\ &\geq c|z^n|. \end{aligned}$$

dove  $c$  è una opportuna costante positiva. Supponiamo ora che  $p(z)$  non abbia zeri. Allora  $1/p(z)$  è olomorfa su  $\mathbb{C}$  e, per  $|z| \gg 0$ , si ha:

$$\frac{1}{p(z)} \leq \frac{1}{|c|z^n}. \quad (1.14)$$

Per il principio del massimo, il massimo  $M_R$  di  $1/|p(z)|$  in un cerchio di raggio  $R \gg 0$  e centro in 0, è assunto sul bordo di questo cerchio, e quindi per la (1.14)

si ha che  $M_R \leq 1/|cR^n|$ . Ma questo vorrebbe dire che  $M_R$  tende a 0 per  $R$  tendente all'infinito, in contraddizione con il principio del massimo.  $\square$

## Esercizi

1. In ognuno dei casi elencati 1)-10) si determini l'aperto di  $\mathbb{C}$  in cui  $f$  è definita e  $C^\infty$ . Si calcolino la parte reale e immaginaria di  $f$  e le derivate parziali prime.
2. Far vedere che dalla relazione (1.5) si deduce la (1.4).
3. Verificare che le funzioni 1)-6) sono olomorfe, mentre le funzioni 7)-10) non lo sono.
4. Dimostrare che se  $f$  è olomorfa in  $U$  anche  $f'$  e le derivate complesse successive di  $f$  lo sono.
5. Dimostrare che se  $f, g \in \mathcal{O}(U)$  allora anche  $f + g, fg \in \mathcal{O}(U)$  e che se  $f \in \mathcal{O}^*(U)$  allora  $1/f \in \mathcal{O}^*(U)$ .
6. Dimostrare che per  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $z^n$  è olomorfa in  $\mathbb{C}$ , che la sua derivata complessa è  $nz^{n-1}$ . Dedurre che ogni polinomio è olomorfo in  $\mathbb{C}$ , e che ogni funzione razionale è olomorfa nel proprio dominio di definizione. Qual è il dominio di definizione di una funzione razionale?
7. Sia  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  una serie di potenze convergente in un disco  $D$  di raggio positivo. Dimostrare che  $f(z)$  è olomorfa in  $D$  e che  $f'(z) = \sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}$ , (si usino i teoremi standard sulla convergenza uniforme delle serie).
8. Dimostrare che

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ e^z &= e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \end{aligned}$$

9. Estendere al campo complesso le definizioni di tutte le funzioni trigonometriche e iperboliche.
10. Sia  $U \subseteq \mathbb{C}$  un aperto connesso. Dimostrare che  $\mathcal{O}(U)$  è un *anello di integrità*.
11. Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Si consideri l'insieme quoziente

$$\mathcal{O}_{z_0} = \left( \bigcup_{U \text{ intorno di } z_0} \mathcal{O}(U) \right) / \sim$$

dove  $f \in \mathcal{O}(U)$  è equivalente a  $g \in \mathcal{O}(V)$ , se esiste un intorno  $W$  di  $z_0$  contenuto nell'intersezione di  $U$  e  $V$ , tale che  $f = g$  in  $W$ . La classe di equivalenza di una

funzione  $f$  definita in un intorno di  $U$  prende il nome di *germe di  $f$  in  $z_0$*  e si denota con il simbolo  $\mathbf{f}$ . Dimostrare che si può introdurre in  $\mathcal{O}_{z_0}$  un'unica struttura di anello per la quale le applicazioni naturali (passaggio al quoziente) di  $\mathcal{O}(U)$  su  $\mathcal{O}_{z_0}$  sono omomorfismi di anelli. L'anello così definito prende il nome di *anello locale (analitico) nel punto  $z_0$* .

12. Dimostrare che  $\mathcal{O}_{z_0}$  è un anello locale e che è canonicamente isomorfo all'anello  $\mathbb{C}\{z\}$  delle serie di potenze convergenti.

13. A partire dai gruppi moltiplicativi  $\mathcal{O}^*(U)$ , e imitando la definizione di  $\mathcal{O}_{z_0}$ , si definisca il gruppo moltiplicativo  $\mathcal{O}_{z_0}^*$  e lo si identifichi con il gruppo moltiplicativo delle serie di potenze convergenti con termine costante non nullo.

## 1.2 Zeri, poli, residui.

Un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  è uno *zero di ordine  $n \geq 0$  per una funzione olomorfa  $f$*  se, in un intorno di  $z_0$ , si può scrivere

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots, \quad a_n \neq 0 \quad (2.1)$$

e cioè se si può scrivere, intorno a  $z_0$ ,

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z), \quad (2.2)$$

con  $h(z)$  olomorfa e tale che  $h(z_0) \neq 0$ . Per esempio, le funzioni  $z^3$  e  $(\sin z)(1 - \cos z)$  hanno entrambe uno zero triplo nel punto  $z_0 = 0$ .

I *punti singolari* per una funzione olomorfa sono quei punti in cui la funzione non è definita. Un punto  $z_0$  è un *punto singolare isolato per una funzione olomorfa  $f$* , se è singolare per  $f$  e se  $f$  è olomorfa in un intorno di  $z_0$  privato del punto  $z_0$  stesso (brevemente: *un intorno puntato di  $z_0$* ). Le singularità isolate più mansuete sono i *poli*. Un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  è un *polo di ordine  $n \geq 0$  per una funzione olomorfa  $f$* , se esiste un intorno di  $z_0$  in cui la funzione  $(z - z_0)^n f(z)$  è olomorfa (i.e. ammette una estensione olomorfa) e non nulla, ovvero se in un intorno puntato di  $z_0$  si può scrivere

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots, \quad a_{-n} \neq 0 \quad (2.3)$$

dove  $\sum_{i=-n}^{\infty} a_i \zeta^{n+i}$  è una serie di potenze convergente. Ciò si esprime anche dicendo che  $f(z)$  può scriversi, in un intorno puntato di  $z_0$ , nella forma

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z) \quad (2.4)$$

con  $h(z)$  olomorfa e non nulla in un intorno di  $z_0$ . Per esempio la funzione  $z/(\sin z)^2$  ha un polo semplice in 0 e poli doppi nei punti  $z_k = k\pi$ ,  $k \neq 0$ . L'espressione a destra dell'eguaglianza (2.3) prende il nome di *sviluppo in serie di Laurent della funzione  $f$  nel punto  $z_0$* . Ora, una funzione olomorfa ammette uno sviluppo in serie di Laurent non solo nell'intorno di un suo polo, ma, più in generale, nell'intorno di la sua qualsiasi singolarità isolata. Questo fatto, di cui non faremo uso nel seguito, e di cui non daremo dimostrazione, (lasciandola anzi come esercizio), si enuncia formalmente come segue.

*Sia  $z_0$  una singolarità isolata di una funzione olomorfa  $f$ , allora, in un intorno di  $z_0$ , privato del punto  $z_0$  stesso, la funzione  $f$  può scriversi in serie di Laurent (doppiamente infinita):*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n. \quad (2.5)$$

Fondamentale invariante di una singolarità isolata è il *residuo*. Sia dunque  $z_0$  una singolarità isolata, per esempio un polo, o anche un punto di regolarità, per una funzione olomorfa  $f$ . Sia  $U$  un intorno del punto  $z_0$ . Assumiamo che  $\bar{U}$  sia un dominio regolare tale che inoltre  $\bar{U} \setminus \{z_0\}$  sia contenuto nel dominio di olomorfia di  $f$ .

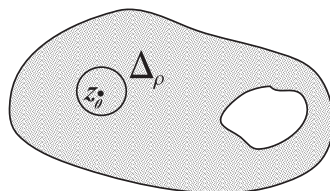


Fig. 8

Se  $\Delta_\rho \subset U$  è un qualsiasi disco di centro  $z_0$ , dal teorema di Cauchy segue che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} f dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_\rho} f dz. \quad (2.6)$$

Dunque il numero complesso

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} f dz \quad (2.7)$$

è indipendente dalla regione regolare  $U$  scelta, purché essa goda delle proprietà richieste. In effetti si potrà sempre scegliere come  $U$  un disco opportunamente piccolo e centrato nel punto  $z_0$ . Il numero complesso definito da (2.6) prende il nome di *residuo della forma differenziale  $f(z)dz$  nel punto  $z_0$*  e si denota con il simbolo

$$\text{Res}_{z_0} f(z) dz$$



Naturalmente se  $z_0$  è un punto regolare per  $f$  il residuo di  $f(z)dz$  in  $z_0$  è nullo. Poiché  $z_0$  è una singolarità isolata per  $f$  possiamo scrivere  $f$  in serie di Laurent intorno a  $z_0$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (2.8)$$

Ebbene mostriamo subito che

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z)dz = a_{-1}. \quad (2.9)$$

Infatti

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} (z - z_0)^n dz,$$

e, per il teorema di Cauchy, il termine corrispondente a un intero  $n \geq 0$  svanisce, mentre, per la formula (1.11), quello corrispondente a un intero  $n < 0$  eguaglia la derivata  $(-n + 1)$ -sima della funzione 1.

Concentriamoci ora sullo studio delle funzioni olomorfe che possiedono al più singolarità polari. Funzioni di questo tipo si dicono *meromorfe*. Formalmente la frase “ $f$  è una funzione meromorfa in  $U$ ”, vuol dire che esiste un sottoinsieme  $A \subseteq U$ , costituito da punti isolati, tale che  $f$  è olomorfa in  $U \setminus A$ , e possiede, al più, singolarità polari nei punti di  $A$ .

**Notazione 2** D’ora in poi indicheremo con il simbolo  $\mathcal{M}(U)$  il campo delle funzioni meromorfe in un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ , e con il simbolo  $\mathcal{M}(\bar{U})$  l’insieme delle funzioni meromorfe in un intorno di  $\bar{U}$  e olomorfe in un intorno di  $\partial U$ . Denotiamo infine con  $\mathcal{M}^*(U)$  il gruppo moltiplicativo delle funzioni meromorfe non identicamente nulle in  $U$ .

Esempio fondamentale di funzione meromorfa su tutto  $\mathbb{C}$  è quello di una funzione razionale. Una tale funzione si scrive come quoziente  $f = p/q$  di due polinomi  $p$  e  $q$ . Per il teorema fondamentale dell’algebra possiamo scrivere

$$f(z) = c \frac{\prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)^{\nu_i}}{\prod_{j=1}^m (z - \beta_j)^{\mu_j}}$$

dove  $c, \alpha_i, \beta_j$  sono numeri complessi, e dove si può supporre che gli  $\alpha_i$  e i  $\beta_j$  siano tutti distinti, cosicché  $\alpha_i, (\beta_j)$  è uno zero (risp. un polo) di ordine  $\nu_i$  (risp.  $\mu_j$ ) per  $f$ . Questi sono tutti e soli gli zeri e i poli di  $f$  in  $\mathbb{C}$ .

Una immediata applicazione del teorema di Cauchy ci dà il seguente fondamentale teorema.

**Teorema dei Residui 1** Sia  $U \subset \mathbb{C}$  una regione regolare e sia  $f \in \mathcal{M}(\bar{U})$ , allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} f dz = \sum_{\zeta \in U} \operatorname{Res}_{\zeta} f(z) dz.$$

*Dim.* La somma che appare nell'enunciato ha senso perché i soli termini non nulli corrispondono ai punti  $z_0 \in U$  che sono poli di  $f$ , e questi sono in numero finito (costituendo un sottoinsieme di punti isolati di un insieme limitato). Il teorema si dimostra applicando il teorema di Cauchy alla funzione  $f$  e alla regione regolare  $U \setminus \cup_{i=1}^n \bar{\Delta}_i$ , dove  $\bar{\Delta}_i$  è un disco chiuso centrato in  $z_i$ , disgiunto da  $\bar{\Delta}_j$ , per  $i \neq j$ , e contenuto in  $U$ , e dove  $z_1, \dots, z_n$  sono i poli di  $f$  contenuti in  $U$ . Si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} f dz &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_j} f dz \\ &= \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{z_j} f(z) dz \\ &= \sum_{\zeta \in U} \operatorname{Res}_{\zeta} f(z) dz. \end{aligned}$$

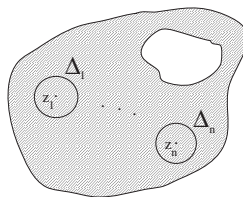


Fig. 9

Daremo ora alcune applicazioni del teorema dei residui. Queste applicazioni si basano sulla seguente osservazione. Sia  $U$  l'intorno di un punto  $z_0$  in  $\mathbb{C}$ , sia  $f \in \mathcal{M}(U)$ , sia  $g \in \mathcal{O}(U)$ , allora

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) \right) dz = \nu_{z_0}(f) g(z_0) \quad (2.10)$$

dove  $\nu_{z_0}(f)$  è uguale all'ordine di  $f$  in  $z_0$ , se  $z_0$  è un punto regolare per  $f$ , e ne è l'opposto se  $z_0$  ne è un polo.

*Dim.* Si può assumere che  $U$  sia un disco di centro  $z_0$ , e che in  $U$  risulti  $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$  con  $h(z)$  olomorfa e non nulla in  $U$ . Ovviamente si ha  $n = \nu_{z_0}(f)$ . Ora:

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) &= \frac{(n(z - z_0)^{n-1} h(z) + (z - z_0)^n h'(z)) g(z)}{(z - z_0)^n h(z)} \\ &= n \frac{g(z)}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)} g(z). \end{aligned}$$

D'altro canto  $h'/h$  è olomorfa in  $U$  e dunque il suo residuo in  $z_0$  è nullo. Si ha

quindi

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_0} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) \right) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{ng(z)}{z - z_0} dz \\ &= ng(z_0), \end{aligned}$$

□

Dal teorema dei residui e dalla osservazione precedente segue il seguente Corollario

**Corollario 1** Sia  $U \subset \mathbb{C}$  una regione regolare e siano  $f \in \mathcal{M}(\bar{U})$  e  $g \in \mathcal{O}(\bar{U})$ . Si assuma inoltre che  $f$  non abbia né zeri né poli su  $\partial U$ . Allora risulta:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'}{f} g dz = \sum_{\zeta \in U} g(\zeta) \nu_{\zeta}(f).$$

Dunque, ponendo  $g(z) = z$  si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'}{f} z dz = \sum_{\zeta \in U} \zeta \nu_{\zeta}(f),$$

mentre, ponendo  $g(z) = 1$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'}{f} dz &= \sum_{\zeta \in U} \nu_{\zeta}(f) \\ &= \#\{\text{zeri di } f \text{ in } U, \text{ contati ognuno con la propria molteplicità}\} - \\ &\quad \#\{\text{poli di } f \text{ in } U, \text{ contati ognuno con la propria molteplicità}\}. \end{aligned}$$

Iniziamo lo studio del comportamento di una funzione olomorfa all'infinito. Introduciamo a questo fine la *sfera di Riemann*. È questa, per definizione, la compattificazione a un punto del piano complesso  $\mathbb{C}$ , ed è quindi l'insieme

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

equipaggiato della topologia in cui i sistemi fondamentali di intorno dei punti  $p$  di  $\hat{\mathbb{C}}$  che appartengono a  $\mathbb{C}$  sono quelli usuali, mentre un sistema fondamentale di intorno del punto  $\infty$  è dato dagli insiemi

$$U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$$

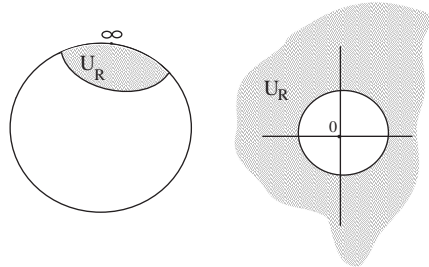


Fig. 10

Sia ora  $f$  una funzione olomorfa in  $U_R \setminus \{\infty\}$ . Diremo che  $\infty$  è un punto regolare (risp. uno zero, un polo, di ordine  $n$ ) per  $f$  se  $f(1/z)$  si estende a una funzione meromorfa in un intorno di 0 e se 0 è, per  $f(1/z)$ , un punto regolare (risp. uno zero, un polo, di ordine  $n$ ). Per esempio la funzione  $(z^2 - 1)/(z^3 + 3)$ , ha nel punto  $\infty$ , uno zero del primo ordine, la funzione  $(2z^4 + 1)/(z^4 - 2)$  vi è regolare e non nulla, e la funzione  $z^5 + 1$  vi ha un polo di ordine 5. È ormai chiaro quale debba essere la definizione di funzione olomorfa o meromorfa in un aperto  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ : si dirà che  $f$  è olomorfa (risp. meromorfa) in  $U$  se lo è in  $U \cap \mathbb{C}$  e se inoltre è regolare (risp. ha al più un polo) nel punto  $\infty$ , (nel caso in cui  $\infty$  appartenga a  $U$ ). In simboli si scriverà:

$$f \in \mathcal{O}_{\hat{\mathbb{C}}}(U), \quad (\text{risp. } f \in \mathcal{M}_{\hat{\mathbb{C}}}(U)), \quad \text{o, più semplicemente,}$$

$$f \in \mathcal{O}(U), \quad (\text{risp. } f \in \mathcal{M}(U)).$$

Si definisce infine il *residuo all'infinito* di una funzione meromorfa in un intorno di  $\infty$ , ponendo

$$\text{Res}_{\infty} f(z) dz = \text{Res}_0 f(1/z) d(1/z). \quad (2.11)$$

Nella prossima sezione spiegheremo la ragione (non solo operativa) di questa definizione.

Come corollario del teorema dei residui dimostreremo il seguente teorema.

**Teorema 1** *Le funzioni meromorfe su  $\hat{\mathbb{C}}$  sono tutte e sole le funzioni razionali. In simboli*

$$\mathcal{M}_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z).$$

Alla dimostrazione di questo teorema anteponiamo quella del seguente risultato fondamentale.

**Teorema dei Residui (per  $\hat{\mathbb{C}}$ ) 1** *Sia  $f \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ , allora*

$$\sum_{\zeta \in \hat{\mathbb{C}}} \text{Res}_{\zeta} f(z) dz = 0.$$

*Dim.* Supponiamo che i poli di  $f$  contenuti in  $\mathbb{C}$  siano tutti contenuti in un disco  $\Delta_R$ , di raggio  $R$  centrato nell'origine e sia  $R$  tale che il disco  $\Delta_{1/R}$  di raggio  $1/R$  e centro 0 non contenga poli di  $f(1/z)$  tranne, al più, il punto 0 stesso. Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned} \sum_{\zeta \in \mathbb{C}} \text{Res}_{\zeta} f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_R} f(z) dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_{\frac{1}{R}}} f(1/z) d(1/z) \\ &= -\text{Res}_{\infty} f(z) dz. \end{aligned}$$

□

Osserviamo (e questa è una ulteriore giustificazione della definizione di  $\text{Res}_\infty$ ) che se  $f$  è olomorfa intorno a  $\infty$ , allora

$$\text{Res}_\infty \frac{f'}{f} dz = \nu_\infty(f).$$

Infatti

$$\begin{aligned} \text{Res}_\infty \frac{f'}{f} dz &= \text{Res}_0 \frac{f'(1/z)}{f(1/z)} d(1/z) \\ &= \text{Res}_0 \frac{[f(1/z)]'}{f(1/z)} dz \\ &= \nu_0(f(1/z)) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \nu_\infty(f). \end{aligned}$$

Dal lemma precedente, dal conto appena fatto, e dal Corollario (2.3) segue il seguente Corollario.

**Corollario 2** *Una funzione meromorfa su  $\hat{\mathbb{C}}$  ha tanti zeri quanti poli, (ognuno contato con la propria molteplicità).*

Possiamo ora descrivere le funzioni meromorfe su tutto  $\hat{\mathbb{C}}$ , e cioè dare la dimostrazione del teorema (2.4). Iniziamo dalle funzioni olomorfe:

**Lemma 3** *Le uniche funzioni olomorfe su  $\hat{\mathbb{C}}$  sono le costanti. In simboli*

$$\mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$$

*Dim.* Sia  $f \in \mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}})$ . Essendo  $\hat{\mathbb{C}}$  compatta  $|f|$  ammette un massimo in  $\hat{\mathbb{C}}$ . Per il principio del massimo, o  $f$  è costante, oppure il punto di massimo deve essere  $\infty$ . Se questo è il caso, allora 0 è un punto di massimo per  $|f(1/z)|$  e quindi, ancora per il principio del massimo,  $f(1/z)$ , e perciò anche  $f(z)$  è costante. □

Da questo lemma si può dedurre il teorema fondamentale dell'algebra, o meglio un risultato che lo implica.

**Corollario 3** *Sia  $f$  una funzione meromorfa su  $\hat{\mathbb{C}}$ , e olomorfa su  $\mathbb{C}$ , ( per esempio un polinomio), allora*

$$f(z) = c(z - \alpha_1)^{\nu_1} \cdots (z - \alpha_n)^{\nu_n}$$

*per opportuni numeri complessi  $c, \alpha_i$ , con  $\alpha_i \neq \alpha_j$ , per  $i \neq j$ , e per opportuni interi positivi  $\nu_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .*

*Dim.* Siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  gli zeri di  $f$  e sia  $\nu_i$  l'ordine di  $\alpha_i$ . Dunque la funzione  $g = f/(z - \alpha_1)^{\nu_1} \dots (z - \alpha_n)^{\nu_n}$  è olomorfa e non nulla in  $\mathbb{C}$ , e meromorfa in  $\hat{\mathbb{C}}$ . Per il corollario (2.6),  $g$  non ha poli (nè) zeri in  $\hat{\mathbb{C}}$ , e quindi per il lemma (2.7), è costante.  $\square$

Da questo corollario si deduce, in modo del tutto analogo, il teorema (2.4). Sia infatti  $f \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ . Siano  $\beta_1 \dots \beta_m$  i poli di  $f$  in  $\mathbb{C}$ , e sia  $\mu_j$  l'ordine di  $\beta_j$ . Allora la funzione

$$h = (z - \beta_1)^{\mu_1} \dots (z - \beta_m)^{\mu_m} f,$$

è olomorfa in  $\mathbb{C}$  e meromorfa in  $\hat{\mathbb{C}}$ , ed è quindi un polinomio per ciò che abbiamo appena dimostrato. Dunque  $f$  è una funzione razionale.  $\square$

## Esercizi

1. Determinare zeri e poli della funzione  $\cos z/(z \sin z)$ .
2. Mostrare che il punto 0 non è una singolarità isolata per la funzione  $(\sin 1/z)^{-1}$ .
3. Mostrare che la funzione  $e^{1/z}$  ha in 0 una singolarità isolata che non è polare, (queste singolarità prendono il nome di *singolarità essenziali*).
4. Dimostrare che il campo dei quozienti dell'anello d'integrità  $\mathbb{C}\{z\}$  è il campo delle serie di Laurent tronche

$$\mathbb{C}\{\{z\}\} = \left\{ \sum_{n \geq N} a_n z^n : N \in \mathbb{Z}, \sum_{n \geq N} a_n z^{n-N} \in \mathbb{C}\{z\} \right\}.$$

5. Trovare zeri e poli ( e relativi ordini) della funzione

$$z(\cos z - 1)/(z^2 + 1)$$

6. Trovare il residuo di  $e^{iz}/z(z - i)$  nel punto  $i$ .
7. Sia  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 2\}$ , calcolare

$$\int_{\Gamma} \frac{z}{(z-1)\sin z} dz$$

8. Sia  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ , calcolare

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z(z-1)}{(z-2)z^2} dz$$

## 2.3 Logaritmi

Abbiamo visto il significato della *derivata logaritmica*  $f'/f$  di una funzione meromorfa  $f$ . È questo un buon momento per parlare di logaritmi. Ciò che abbiamo fatto fino ad ora, a questo proposito, è stato semplicemente di designare con il simbolo  $\log z$  la funzione analitica definita nel disco di centro 1 e raggio 1 dalla serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n. \quad (3.1)$$

D'altro canto, fissato un numero complesso  $z \neq 0$ , e scrittolo in coordinate polari<sup>1</sup>

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos \theta + i \sin \theta),$$

appare del tutto naturale definire il *logaritmo principale del numero complesso*  $z$  ponendo

$$\operatorname{Log}(z) = \log |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad -\pi \leq \operatorname{Arg} z < \pi, \quad (3.2)$$

poiché per esso vale la relazione

$$e^{\operatorname{Log}(z)} = z. \quad (3.3)$$

Mostriamo ora che  $\operatorname{Log}(z)$  è una funzione olomorfa in tutto il piano complesso privato del semiasse dei reali non positivi, (aperto che denoteremo con  $U$ ), e che coincide con la funzione  $\log z$ , definita dalla (3.1) nel disco unitario di centro 1.

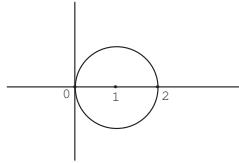


Fig. 11

Che  $\operatorname{Log}(z)$  sia olomorfa lo si vede subito osservando, innanzi tutto che è  $C^\infty$  in  $U$ , e poi derivando la (3.3) rispetto a  $\bar{z}$ :

$$0 = \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = z \frac{\partial \operatorname{Log}(z)}{\partial \bar{z}}.$$

<sup>1</sup>il che comporta una scelta di *argomento* e cioè la decisione, arbitraria, ma necessaria, di fissare il limite di variabilità di  $\theta$  in un intervallo semichiuso  $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ . Faremo questa scelta fissando  $\theta_0 = -\pi$ . Chiameremo  $\theta$  l'*argomento principale* di  $z$ , e lo denoteremo col simbolo  $\operatorname{Arg} z$

D'altro canto segue dalla (3.3), sempre per derivazione, che

$$\frac{\partial \text{Log}(z)}{\partial z} = \frac{1}{z}.$$

Ma anche derivando la serie (3.1) si ottiene:

$$\frac{\partial \log(z)}{\partial z} = \frac{1}{z},$$

cosicché  $\text{Log}(z)$  e  $\log(z)$  differiscono per una costante che non può che essere nulla, coincidendo le due funzioni nel punto 1.

Osserviamo ancora una volta che avremmo potuto fare una diversa scelta per l'argomento principale, avremmo potuto per esempio decidere che

$$\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}^* z < \frac{7\pi}{3},$$

con il che saremmo pervenuti a una funzione  $\text{Log}^*(z)$ , che coincide con  $\text{Log}(z)$  nell'intervallo  $\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg} z < \pi$ , e differisce da questa per  $2\pi i$  nell'intervallo  $-\pi < \text{Arg} z \leq \frac{\pi}{3}$ .

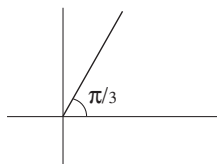


Fig. 12

Diamo ora la seguente definizione generale.

**Definizione 2** Sia  $U$  un aperto connesso di  $\mathbb{C}$ . Data una funzione  $f \in \mathcal{O}^*(U)$ , diremo che una funzione  $g$  è un logaritmo di  $f$  in  $U$  se:

- (1)  $g \in \mathcal{O}(U)$
- (2)  $e^g = f$ , in  $U$ .

Una tale funzione si denota con il simbolo  $\log f$ .

Naturalmente segue dalla definizione che

$$(\log f)' = \frac{f'}{f}. \quad (3.4)$$

Sempre dalla definizione segue che se  $g$  e  $h$  sono logaritmi di  $f$  in  $U$ , allora  $g$  e  $h$  differiscono per un multiplo intero di  $2\pi i$ . Infatti dalla (2) segue che



$g - h \in 2\pi i\mathbb{Z}$ , e dunque per continuità, e per la connessione di  $U$ , deve esistere un qualche intero  $k$  per cui  $g - h = 2k\pi i$ .

\*\*\*\*\*

Facciamo ora una breve digressione per studiare un esempio particolare: quello del logaritmo della funzione  $z$ . La nostra trattazione avrà un carattere intuitivo. Esistono, nell'aperto  $U$  ottenuto da  $\mathbb{C}$  asportandone il semiasse dei reali non positivi, infiniti logaritmi o, come si suol dire, infinite determinazioni del logaritmo. Ognuna di esse è del tipo

$$g_k = \text{Log}(z) + 2k\pi i,$$

dove  $k$  è un intero. A questo punto è opportuno fare la seguente osservazione che contiene l'essenza dell'idea di superficie di Riemann. Consideriamo, per ogni intero  $k$ , una copia dell'aperto  $U$  e chiamiamola  $U_k$ . Pensiamo a  $U_k$  come al dominio di  $g_k$ . Ora immaginiamo per un momento di poter vedere i lembi dei "tagli" presenti in  $U_k$  e in  $U_{k+1}$ , e consideriamo in  $U_k$  un cammino circolare  $\sigma_k$  che, iniziando in un punto  $P_k$ , giri intorno a 0 in senso antiorario. Denotiamo con  $\sigma_{k+1}$  e con  $P_{k+1}$ , il cammino e il punto in  $U_{k+1}$  corrispondenti, rispettivamente, a  $\sigma_k$  e  $P_k$ .

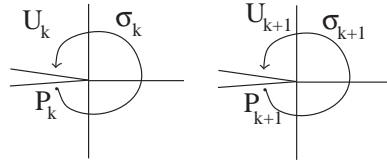


Fig. 13

Seguiamo l'andamento di  $g_k$  lungo il cammino  $\sigma_k$ . Il taglio di  $U_k$  non ci consente di ritornare a  $P_k$ . Poiché nel percorrere il cammino  $\sigma_k$  l'argomento subisce un incremento pari all'angolo sotteso dall'arco percorso, se pure potessimo ritornare a  $P_k$ , noi ci ritroveremmo in  $P_k$ , con l'argomento aumentato di  $2\pi i$ . Dunque in realtà ci troveremmo in  $P_{k+1}$ ! Ma questo vuol dire che attraversando il taglio di  $U_k$ , nel senso antiorario, la determinazione  $g_k$  "sbuca fuori" nel piano  $U_{k+1}$  sotto le vesti di  $g_{k+1}$ , arriva in  $P_{k+1}$ , proseguendo poi il suo viaggio su  $\sigma_{k+1}$ . L'idea allora è questa: invece di pensare a tanti logaritmi  $g_k$ , ognuno definito in un dominio  $U_k$ , contenuto in  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , pensiamo a un solo "logaritmo" definito in un solo *nuovo* dominio. Un dominio che non vive più in  $\mathbb{C}^*$  e che si ottiene attaccando il lembo superiore (ci riferiamo alla figura) del taglio di  $U_k$  con quello inferiore del taglio di  $U_{k+1}$ , per ogni  $k$ . Si ottiene così una specie di "piano a chiocciola" infinito di cui qui raffiguriamo solo tre piani e che chiamiamo  $\tilde{\mathbb{C}}^*$ . Questo spazio (per ora lo abbiamo definito solo insiemisticamente) si proietta in modo naturale su  $\mathbb{C}^*$ , (semplicemente ricordandosi che ogni  $U_k$  è una copia

di  $U$ ). Chiameremo questa proiezione  $\pi$ . È questo un esempio di *rivestimento topologico*.

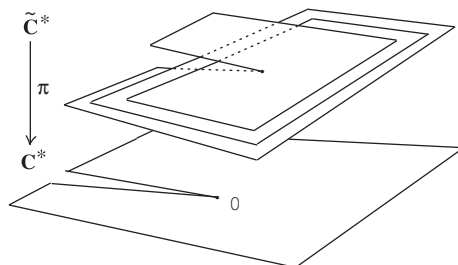


Fig. 14

Sullo spazio  $\tilde{\mathbb{C}}^*$  si può definire una funzione  $\widetilde{\text{Log}}$  "attaccando" le funzioni  $g_k$ . Per fare ciò si considera, per ogni  $k$ , la funzione  $g_k$  in  $U_k$  e la si estende in modo continuo al lembo inferiore del taglio in  $U_k$ . In questo modo si può attaccare la funzione  $g_k$  alla funzione  $g_{k+1}$  e così procedendo si definisce una applicazione

$$\widetilde{\text{Log}} : \tilde{\mathbb{C}}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

Il punto fondamentale, in questa costruzione è il seguente. Abbiamo costruito uno spazio  $\tilde{\mathbb{C}}^*$  che può essere descritto come l'insieme dei valori di una funzione polidroma (in questo caso la funzione logaritmo)

$$\tilde{\mathbb{C}}^* = \{ (z, g_k(z)) : z \in \tilde{\mathbb{C}}^*, k \in \mathbb{Z} \}$$

Qui  $g_k$  è considerata come funzione discontinua su  $\mathbb{C}^*$ . Lo spazio  $\tilde{\mathbb{C}}^*$  si proietta su  $\mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{\mathbb{C}}^* &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ (z, g_k(z)) &\mapsto z. \end{aligned}$$

L'applicazione  $\widetilde{\text{Log}}$  è data da

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Log}} : \tilde{\mathbb{C}}^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, g_k(z)) &\mapsto g_k(z) \end{aligned}$$

Questa applicazione "scioglie" la polidromia della funzione  $\log(z)$ . Si dimostrerà che, una volta assegnata a  $\tilde{\mathbb{C}}^*$  una sua naturale struttura complessa, l'applicazione  $\widetilde{\text{Log}}$  è un isomorfismo che realizza l'equivalenza tra il rivestimento  $\pi$  e il rivestimento definito dall'applicazione esponenziale

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*,$$

In effetti si ha

$$\exp \circ \widetilde{\text{Log}} = \pi$$

Il punto di questo esempio però, non consiste tanto nel fatto che il nuovo dominio  $\widetilde{\mathbb{C}}^*$  della funzione logaritmo risulti, alla fine, non essere altro che una copia di  $\mathbb{C}$ , quanto invece l'aver imparato a vedere  $\mathbb{C}$  come un rivestimento di  $\mathbb{C}^*$ .

Uno degli scopi che ci prefiggiamo è quello di fornire il linguaggio necessario per poter parlare con chiarezza e precisione di questi concetti. Specificamente, in questo caso, il concetto centrale è quello di *rivestimento*, perché è intorno ad esso che ruota l'intera questione della monodromia e delle funzioni poldrome.

\*\*\*\*\*

Ritorniamo ora al problema generale di determinare sotto quali condizioni una funzione olomorfa ammetta un logaritmo. Per fare ciò abbiamo bisogno di fare alcune considerazioni preliminari. Sia  $\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy$  una forma differenziale  $C^\infty$  definita in un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ . Tra le forme *chiuse*  $\omega$ , quelle cioè per cui  $d\omega = 0$ , si distinguono quelle che sono anche *esatte*, quelle cioè della forma  $\omega = dh = (\partial h/\partial x)dx + (\partial h/\partial y)dy$ , dove  $h \in C^\infty(U)$ . Ricordiamo che: *condizione necessaria e sufficiente perché una forma  $\omega$  sia esatta in  $U$  è che l'integrale di  $\omega$  esteso a un qualsiasi cammino  $\gamma$  contenuto in  $U$  dipenda solo dagli estremi di  $\gamma$  e non da  $\gamma$  stesso*. Infatti, se una tale condizione è verificata, si può scrivere senza ambiguità

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{P_0}^P \omega, \quad P_0 = \gamma(0), P = \gamma(1),$$

e si può quindi definire una funzione  $h$  in  $U$  ponendo

$$h(x, y) = \int_{P_0}^P \omega, \quad P \equiv (x, y). \quad (3.5)$$

ed è allora immediato verificare che  $h$  è  $C^\infty$  in  $U$ , e che  $dh = \omega$ . Viceversa, se  $\omega = dh$ , risulta:

$$\int_{\gamma} \omega = h(P) - h(P_0),$$

e quindi l'integrale a sinistra non dipende da  $\gamma$ .

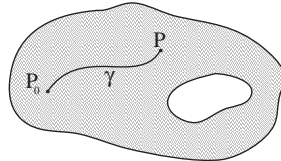


Fig. 15

Ricordiamo ora che se  $f \in \mathcal{O}(U)$ , il differenziale  $\omega = f dz$  è chiuso, (equazioni di Cauchy-Riemann), e osserviamo inoltre che se questo differenziale è esatto, allora la funzione  $h$  definita dalla (3.5), è non solo  $C^\infty$  ma anche *olomorfa* in  $U$ . L'esempio standard di forma differenziale chiusa ma non esatta è quello della forma  $\omega = (1/z)dz$ , definita nell'aperto  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Questa forma è chiusa, perché  $f \in \mathcal{O}(U)$ , e non è esatta perché, per esempio, si ha:

$$\int_{\partial\Delta} \frac{1}{z} dz = 2\pi i, \quad \Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Consideriamo ora l'aperto

$$U' = U \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = 0, x < 0\}.$$

Vi sono forme, come ad esempio  $(1/z)dz$ , che sono  $C^\infty$  in  $U$ , esatte in  $U'$ , ma non esatte in  $U$ . Ciò non accade per la proprietà di chiusura delle forme, perché ogni forma  $C^\infty$  in  $U$  e chiusa in  $U'$ , è automaticamente chiusa in  $U$ . Dunque, a differenza della chiusura, l'esattezza è una proprietà dell'aperto che si decide di considerare come dominio di definizione della forma in esame (in effetti queste considerazioni ci inducono, in modo naturale, a capovolgere il problema suggerendoci di studiare la geometria di un dato dominio  $U$ , cercando di capire "quante" siano, in questo dominio, le forme chiuse che non sono esatte: più ce ne saranno più questo dominio sarà lontano dall'essere omeomorfo a un disco; questa è, in germe, l'idea della coomologia di De Rham).

Ritorniamo ora ai logaritmi.

**Lemma 4** *Dato un aperto connesso  $U \subset \mathbb{C}$ , condizione necessaria e sufficiente perché una funzione  $f \in \mathcal{O}^*(U)$  ammetta in  $U$  un logaritmo, è che la forma differenziale  $(f'/f)dz$  sia esatta in  $U$ .*

*Dim.* Che la condizione sia necessaria ce lo dice la formula (3.4) esprime la derivata logaritmica. Per verificarne la sufficienza, definiremo in  $U$ :

$$g(z) = \int_{z_0}^z \frac{f'}{f} dz + \log f(z_0).$$

Questa funzione è certo olomorfa in  $U$ , dobbiamo quindi verificare che  $\exp g = f$  in  $U$ . Scegliamo un aperto non vuoto  $V \subset U$  la cui immagine secondo  $f$  sia interamente contenuta in un disco  $\Delta \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Scegliendo opportunamente un dominio di variabilità per l'argomento principale, e cioè privando il piano complesso di una opportuna semiretta, si può fare in modo che  $\Delta$  sia interamente contenuto nel dominio di definizione della funzione  $\text{Log} z$ .

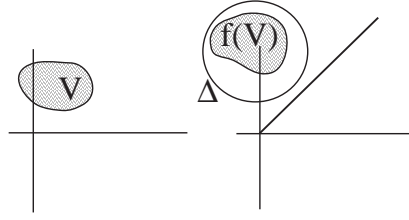


Fig. 16

Ha quindi senso considerare in  $V$  la funzione composta  $\text{Log} \circ f$ . Ora, dalla definizione di  $g$  segue subito che  $g$  e  $\text{Log} \circ f$  hanno la stessa derivata in  $V$  e differiscono quindi in  $V$  per una costante. Ne segue che, sempre in  $V$ ,  $\exp g = cf$ , per una qualche costante  $c$  non nulla. Per continuazione analitica questa relazione deve valere in tutto  $U$ , ma allora la costante  $c$  deve valere 1 poiché  $\exp g$  e  $f$  coincidono in  $z_0$ . *Q.E.D.*

Cerchiamo ora di riassumere con un linguaggio algebrico alcune delle considerazioni svolte sino ad ora. Innanzi tutto possiamo dire che vi è una successione esatta di gruppi abeliani:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\exp 2\pi i} \mathcal{O}(\mathbb{C}^*), \quad (3.6)$$

in cui l'applicazione  $\exp 2\pi i$  è quella che ad ogni funzione  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  associa la funzione  $\exp 2\pi i f$ . Possiamo poi osservare che  $\exp 2\pi i$  non è suriettiva: perché vi sono funzioni in  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ , come ad esempio la funzione  $z$ , che non ammettono un logaritmo in  $\mathbb{C}$ . Per contro, preso comunque un punto  $z_0 \in \mathbb{C}^*$ , si ha una successione esatta di gruppi (i primi due additivi e l'ultimo moltiplicativo)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{z_0} \xrightarrow{\exp 2\pi i} \mathcal{O}_{z_0}^* \longrightarrow 1. \quad (3.7)$$

Per dimostrare questa asserzione, basta verificare che, in questo caso, a differenza che in quello precedente, l'applicazione  $\exp 2\pi i$  è suriettiva, (le altre verifiche essendo del tutto ovvie). Preso un germe  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_{z_0}^*$ , esso è rappresentato da una funzione  $f \in \mathcal{O}(U)$ , dove  $U$  è un disco di centro  $z_0$  interamente contenuto in  $\mathbb{C}^*$ , e quindi esiste in  $U$  un logaritmo  $g$  di  $f$ , il cui germe  $\mathbf{g}$  in  $z_0$  è tale che, per l'appunto,  $\exp 2\pi i \mathbf{g} = \mathbf{f}$ .

Una volta costruiti i logaritmi si possono agevolmente costruire le radici  $n$ -esime. Diremo che  $g$  è una radice  $n$ -esima di  $f \in \mathcal{O}(U)$  se

- (1)  $g \in \mathcal{O}(U)$
- (2)  $g^n = f$  in  $U$ ,

Ovviamente vi sono tante radici  $n$ -esime distinte quante sono le radici  $n$ -esime dell'unità, e cioè  $n$ . È anche chiaro che se  $f$  ammette un logaritmo in  $U$ , allora ammette in  $U$  tutte le radici  $n$ -esime, poiché basta porre:

$$g = \varepsilon e^{\frac{1}{n} \log f}, \quad (3.8)$$

dove  $\varepsilon$  è una radice primitiva  $n$ -esima di 1. È possibile però che  $f$  non ammetta in  $U$  un logaritmo ma che vi ammetta invece una qualche radice  $n$ -esima. Facciamo un esempio. Consideriamo la funzione  $f(z) = z(z-1)$ . Per ciò che abbiamo detto sui logaritmi, una regione in cui  $f$  ammette un logaritmo, e quindi anche una radice quadrata, è, per esempio, quella che si ottiene privando  $\mathbb{C}$  di due semirette, come nella figura che segue

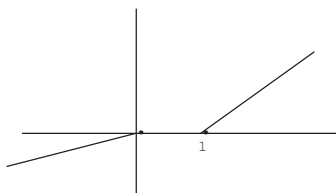


Fig. 17

Consideriamo invece la regione  $U$  che si ottiene togliendo da  $\mathbb{C}$  il segmento  $[0, 1]$ . Si vede subito che  $f$  non ammette logaritmo in  $U$ . Se infatti  $\gamma$  è un cammino come quello della figura successiva, e se si richiede inoltre che  $\gamma$  non contenga zeri di  $f$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz &= \#\{\text{zeri di } f \text{ nella regione che ha } \gamma \text{ per bordo}\} \quad (3.9) \\ &= 2. \end{aligned}$$

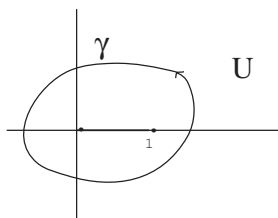


Fig. 18

Questo fatto ci dice che l'integrale

$$\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{f'}{f} dz$$

non è ben definito in  $U$ . Però la relazione (3.9) ci dice che questo stesso integrale è ben definito a meno di multipli interi di  $2\pi i$ ! Dunque la funzione

$$g(z) = e^{\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{f'}{f} dz}$$

è ben definita in  $U$ . È poi ovvio che  $g$  è olomorfa e che  $g^2 = f$ . Si può quindi concludere che  $f$  ammette una radice quadrata in  $U$ , pur non ammettendo in  $U$  un logaritmo.

Ripetiamo per le radici le considerazioni fatte su  $\text{Log}(z)$  e sulle sue determinazioni. Consideriamo, come primo esempio, quello appena trattato della funzione  $z(z-1)$ . Vi sono due determinazioni della radice di  $z(z-1)$  e cioè

$$g_1 = \sqrt{z(z-1)} \quad e \quad g_2 = -\sqrt{z(z-1)}.$$

Siano  $U_1$  e  $U_2$  due copie del dominio  $U$  rappresentato nella figura precedente. Procedendo come nel caso del logaritmo, si vede che, seguendo lungo il cammino  $\sigma_1$ , (resp.  $\sigma_2$ ), la determinazione  $g_1$ , (resp.  $g_2$ ), quando si attraversa il taglio  $[0, 1]$ , si passa alla determinazione  $g_2$ , (resp.  $g_1$ ).

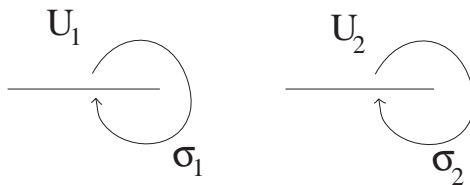


Fig. 19

Procedendo sempre per analogia al caso del logaritmo, è allora naturale costruire uno spazio  $C = \tilde{U}$ , identificando i lembi dei due tagli in  $U_1$  e  $U_2$  nel modo qui raffigurato



Fig. 20

Per vedere cosa succede dal punto di vista topologico pensiamo ai nostri piani costituiti di tessuto elastico e partendo dai due tagli creiamo due tubicini

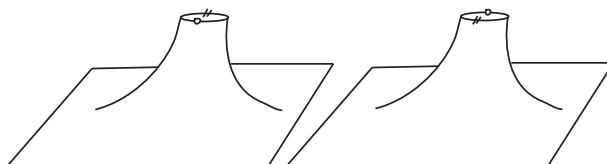


Fig. 21

che poi ruotiamo per rendere agevoli le identificazioni che stiamo per fare,

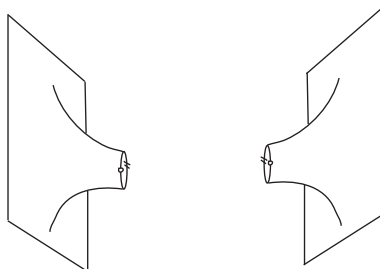


Fig. 22

identificazioni che successivamente attuiamo ottenendo uno spazio  $C$ :

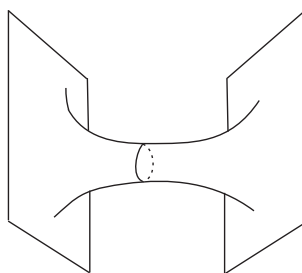


Fig. 23

che topologicamente possiamo raffigurare come segue:



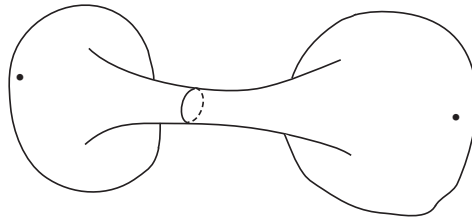


Fig. 24

e dunque anche come segue:

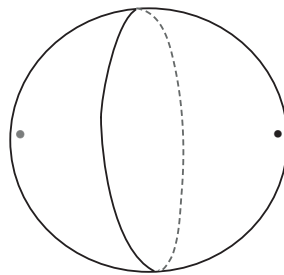


Fig. 25

esibendo  $C$  come una sfera privata di due punti. Ora si può osservare che i punti di  $C$  sono in corrispondenza biunivoca con i possibili valori di  $\pm\sqrt{z(z-1)}$ , ovvero con le possibili coppie  $(z, \pm\sqrt{z(z-1)})$ , e cioè ancora con i punti della curva algebrica

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = z(z-1)\} \subset \mathbb{C}^2,$$

di cui raffiguriamo il *grafico reale*:

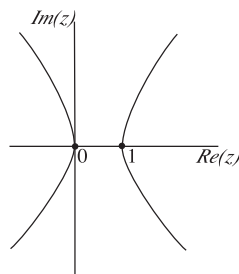


Fig. 26

Identifichiamo ormai  $C$  con questo insieme e denotiamo con i simboli  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{w}$  le

restrizioni a  $C$  delle proiezioni di  $\mathbb{C}^2$  sull'asse  $z$  e sull'asse  $w$ , e denotiamo inoltre con il simbolo  $\iota$  l'involuzione di  $C$  indotta dall'involuzione  $(z, w) \mapsto (z, -w)$  di  $\mathbb{C}^2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}: \quad C &\longrightarrow \mathbb{C}, & \mathbf{w}: \quad C &\longrightarrow \mathbb{C}, & \iota: \quad C &\longrightarrow C \\ (z, w) &\mapsto z & (z, w) &\mapsto w & (z, w) &\mapsto (z, -w) \end{aligned}$$

Ebbene, in analogia con il caso del logaritmo, vediamo che, mentre la radice quadrata della funzione  $z(z-1)$  è una funzione *polidroma* su  $\mathbb{C}$ , le funzioni che si ottengono componendo  $\pm\sqrt{z(z-1)}$  con la proiezione  $\mathbf{z}$  sono *ben definite su tutta  $C$* , e si ha:

$$\sqrt{\mathbf{z}(\mathbf{z}-1)} = \mathbf{w}, \quad -\sqrt{\mathbf{z}(\mathbf{z}-1)} = \iota \circ \mathbf{w}.$$

Vale inoltre la pena di notare che, ritornando alla costruzione di  $C$  fatta per attaccamento di due "fogli" lungo opportuni tagli, l'involuzione  $\iota$ , che fa corrispondere a una determinazione della radice quadrata di  $z(z-1)$  la determinazione opposta, corrisponde allo scambio dei due fogli. In effetti si vedrà che è possibile identificare (la chiusura di)  $C$  con la sfera di Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  in modo tale che il punto 0 corrisponda al punto 0, il punto -1 corrisponda al punto  $\infty$  e l'involuzione  $\iota$  corrisponda all'applicazione:  $t \mapsto -t$ .

In modo del tutto simile, se fossimo partiti dalle due determinazioni

$$g_1 = \sqrt{z(z-1)(z+1)(z-2)} \quad e \quad g_2 = -\sqrt{z(z-1)(z+1)(z-2)},$$

della radice quadrata della funzione  $z(z-1)(z+1)(z-2)$ , ognuna definita nell'aperto  $U$  qui raffigurato,

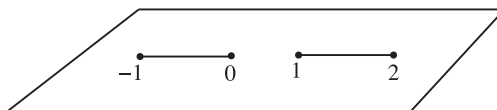


Fig. 27

si sarebbe seguito il procedimento descritto dalla seguente serie di figure, ottenendo però alla fine, non più una sfera privata di due punti, ma bensì un *toro* privato di due punti:

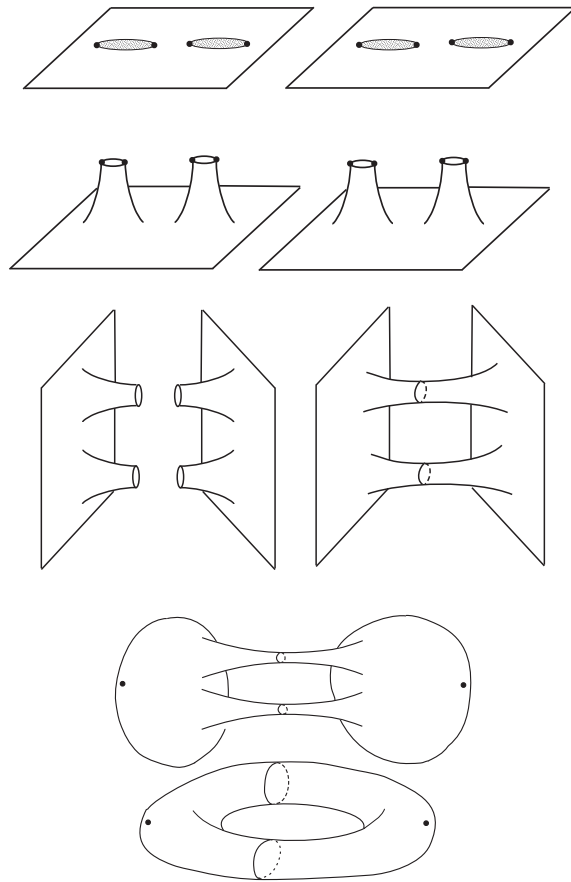


Fig. 28

Anche in questo caso i punti dello spazio  $C$  così ottenuto si possono identificare con quelli di una curva algebrica piana, e precisamente della curva

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = z(z-1)(z+1)(z-2)\} \subset \mathbb{C}^2.$$

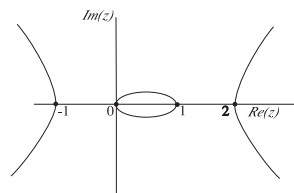


Fig. 29

Similmente, con inalterato significato dei simboli, si hanno le formule

$$\sqrt{\mathbf{z}(\mathbf{z}-1)(\mathbf{z}+1)(\mathbf{z}-2)} = \mathbf{w}, \quad -\sqrt{\mathbf{z}(\mathbf{z}-1)(\mathbf{z}+1)(\mathbf{z}-2)} = \iota \circ \mathbf{w},$$

che mostrano come si risolve, su  $C$ , la polidromia della radice quadrata di  $z(z-1)(z+1)(z-2)$ . Anche in questo caso si vedrà che, esibendo in modo opportuno il toro come un rettangolo coi lati opposti identificati, l' involuzione  $\iota$  può di nuovo relizzarsi come l'applicazione:  $t \mapsto -t$ . A questo punto è ormai chiaro che i punti della curva algebrica piana

$$C = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (z - e_i)\} \subset \mathbb{C}^2,$$

del cui grafico reale diamo la seguente raffigurazione qualitativa:

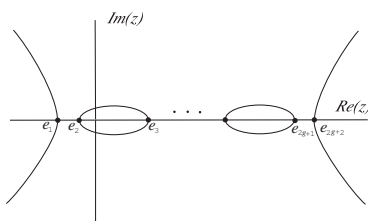


Fig. 30

debbono rappresentarsi (cosa a priori per nulla ovvia o intuitiva) come i punti di un toro con  $g$  buchi privato di due punti:

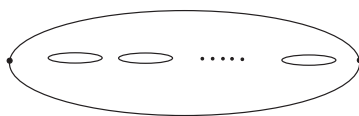


Fig. 31

che si hanno inoltre le formule:

$$\sqrt{\prod_{i=1}^{2g+2} (z - e_i)} = \mathbf{w}, \quad -\sqrt{\prod_{i=1}^{2g+2} (z - e_i)} = \iota \circ \mathbf{w},$$

e che l'involuzione  $\iota$  su  $C$  si può raffigurare come una simmetria del toro con  $g$  buchi avente  $2g + 2$  punti fissi

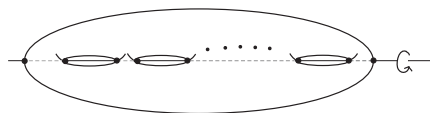


Fig. 32

Queste considerazioni, ancora piuttosto vaghe, ci indicano che lo studio delle funzioni algebriche polidrome su  $\mathbb{C}$  (quelle cioè che si ottengono estraendo radici  $n$ -esime) può convenientemente essere sostituito con lo studio delle funzioni su un'opportuna curva algebrica (o superficie di Riemann)

$$C = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 : P(z, w) = 0 \} \subset \mathbb{C}^2, \quad P(z, w) \in \mathbb{C}[z, w].$$

Scopo di questi appunti è di fornire gli strumenti matematici, il linguaggio, e il quadro generale in cui questo studio si svolge.

### 3.4 Le funzioni oloomorfe come applicazioni.

Ogni geometria ha i propri “cambiamenti di coordinate”. La geometria affine ha le affinità, quella proiettiva le proiettività e così via. Una nozione o una proprietà è affine (o proiettiva) a seconda che essa sia *invariante* per cambiamento di coordinate affini (o proiettive). Cosicché se si vuole dimostrare un qualche teorema in geometria affine (o proiettiva) potremo sempre cambiare il nostro riferimento con delle affinità (o delle proiettività) ogni qualvolta ciò possa facilitarci il lavoro.

Vogliamo ora interessarci *alla geometria analitica di un intorno arbitrariamente piccolo di un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$* . Innanzi tutto è chiaro che, con una traslazione, si può sempre passare a un intorno di 0. Dopodiché ci permetteremo di “cambiare coordinate in 0” con un arbitrario *omeomorfismo bianalitico*

$$\varphi : U \longrightarrow U, \quad (4.1)$$

definito in un qualche intorno  $U$  di 0 e tale che  $\varphi(0) = 0$ . Dicendo *bianalitico* noi intendiamo dire che, sia  $\varphi$  che  $\varphi^{-1}$  sono analitiche in  $U$ . Stabiliamo subito sotto quali condizioni una applicazione analitica  $\varphi$ , definita in un intorno di 0, è un omeomorfismo analitico intorno a 0. Per fare ciò abbiamo bisogno di un analogo analitico del teorema delle funzioni inverse.

**Lemma 5** Sia  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  un'applicazione analitica tale che  $\varphi(0) = 0$ . Si supponga che  $\varphi'(0) \neq 0$ . Allora esiste un intorno  $V$  di  $0$  in  $\mathbb{C}^2$ , in cui  $\varphi$  ammette un' inversa analitica (e quindi  $\varphi$  è un omeomorfismo bianalitico di  $\varphi^{-1}(V)$  in  $V$ ).

*Dim.* Scriviamo;

$$\varphi(z) = \zeta(z) = u(x, y) + iv(x, y) .$$

La semplice, ma fondamentale, osservazione è che, per le equazioni di Cauchy-Riemann, lo jacobiano di  $\varphi$  si scrive in modo particolarmente semplice

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \\ &= u_x^2 + v_x^2 \\ &= |\varphi'|^2 . \end{aligned} \tag{4.2}$$

La condizione  $\varphi'(0) \neq 0$ , ci consente dunque di applicare l'usuale teorema delle funzioni inverse (per le funzioni  $C^\infty$ ) deducendone l'esistenza di una inversa di  $\varphi$ , definita in un opportuno intorno  $V'$  di  $0$ , e anch' essa infinitamente differenziabile. Chiamiamo  $\psi$  questa inversa. Si ha dunque, in  $V'$ :

$$\varphi(\psi(\zeta, \bar{\zeta})) = \zeta .$$

Ne segue che

$$\varphi' \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} = 0 .$$

Sia ora  $V \subset V'$  un intorno di  $0$  in cui  $\varphi' \circ \psi$  non sia mai nulla. La relazione appena scritta ci mostra che, in  $V$ , la derivata parziale di  $\psi$  rispetto a  $\bar{\zeta}$  è nulla, e cioè che  $\psi$  è analitica in  $V$ .  $\square$

Dato un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ , chiameremo *carta locale analitica in  $z_0$* , un omeomorfismo bianalitico  $\varphi$  definito in un intorno di  $z_0$  tale che  $\varphi(z_0) = 0$ .

**Osservazione 1** Quando abbiamo introdotto il concetto di residuo, abbiamo detto che esso è l' invariante fondamentale di una funzione olomorfa nell' intorno di una sua singolarità isolata. Possiamo ora spiegare il senso di quella affermazione mostrando che se  $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{0\})$ , e se  $\varphi$  è una carta locale analitica in  $0$ , allora

$$\text{Res}_0 f(z) dz = \text{Res}_0 f(\varphi(z)) d\varphi \tag{4.3}$$

Si potrebbe essere tentati di dimostrare questa invarianza espandendo in serie di Laurent la  $f$ , in serie di Taylor la  $\varphi$  e poi confrontare i coefficienti di  $z^{-1}$  nei due membri dell'eguaglianza da dimostrare. E' utile tentare di usare questo metodo puramente algebrico e accorgersi che non funziona, almeno in maniera così diretta. La dimostrazione di 4.3 è, in effetti, una conseguenza banale del teorema di Stokes. Si ha

$$\text{Res}_0 f(\varphi(z)) d\varphi = \int_{\partial U} f(\varphi(z)) d\varphi = \int_{\partial \varphi(U)} f(z) dz = \text{Res}_0 f(z) dz .$$

Avvalendoci dei cambiamenti di coordinate analitici vogliamo ora studiare il comportamento delle funzioni analitiche definite in un intorno arbitrariamente piccolo di un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dimostriamo il seguente lemma che, a prima vista può apparire sorprendente.

**Lemma 6** *Sia  $f$  una funzione analitica definita in un intorno di  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Allora esiste una carta locale analitica  $\varphi$  intorno a  $z_0$ , una  $\psi$  intorno a  $f(z_0)$  e un intero positivo  $n$  tali che*

$$\psi f \varphi^{-1}(\zeta) = \zeta^n . \quad (4.4)$$

*Inoltre l'intero  $n$  non è altro che l'ordine della funzione  $f - f(z_0)$  nel punto  $z_0$ :*

$$n = \nu_{z_0}(f - f(z_0)) .$$

*Dim.* Siano  $\varphi_0$  e  $\psi$  carte locali analitiche arbitrarie intorno a  $z_0$  e  $f(z_0)$ , rispettivamente, cosicché si ha:

$$\psi f \varphi_0^{-1}(z) = z^n h(z) ,$$

dove  $n$  è un intero positivo e  $h$  è una funzione olomorfa e mai nulla in un intorno  $U'$  di 0. In questo intorno esiste quindi una radice  $n$ -esima  $k$  di  $h$  e si può quindi scrivere

$$\psi f \varphi_0^{-1}(z) = (zk(z))^n .$$

D'altro canto, essendo  $k(0) \neq 0$ , la funzione  $\varphi_1(z) = zk(z)$  ha derivata non nulla in 0, e quindi, per il lemma precedente, è una carta locale analitica in un intorno  $U \subset U'$  di 0 e si ha:

$$\psi f \varphi_0^{-1}(z) = \varphi_1(z)^n .$$

Ponendo  $\varphi = \varphi_1 \varphi_0$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \psi f \varphi^{-1}(\zeta) &= \psi f \varphi_0^{-1} \varphi_1^{-1}(\zeta) \\ &= \psi f \varphi_0^{-1}(\varphi_1^{-1}(\zeta)) \\ &= [\varphi_1(\varphi_1^{-1}(\zeta))]^n \\ &= \zeta^n . \end{aligned}$$

Per dimostrare l'ultima asserzione basta osservare che, comunque si scelga una carta locale  $\varphi$  intorno a  $z_0$  e una  $\psi$  intorno a  $f(z_0)$ , si ha che

$$\nu_0(\psi f \varphi^{-1}) = \nu_{z_0}(f - f(z_0)) .$$

Infatti, ponendo  $\nu = \nu_{z_0}(f - f(z_0))$ ,

$$\varphi^{-1}(\zeta) = z_0 + \zeta L(\zeta) , \quad f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^\nu M(z) , \quad \psi(w) = (w - f(z_0))N(w) ,$$

con  $L, M, N$  olomorfe e  $L(0) \neq 0, M(z_0) \neq 0, N(f(z_0)) \neq 0$ , un calcolo immediato mostra che

$$\psi f \varphi^{-1}(\zeta) = \zeta^\nu h(\zeta) ,$$

con  $h$  olomorfa e  $h(0) \neq 0$ . Q.E.D.

**Esempio 1** Sia  $f = z - z \cos z$  e sia  $z_0 = 0$ , allora

$$f(z) = z^3 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n!} z^{2n-2} \right).$$

Se si pone

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sqrt[3]{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n!} \zeta^{2n-2}} \\ \psi(w) &= w, \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\psi f \varphi^{-1}(\zeta) = \zeta^3.$$

Vogliamo ora dare una rappresentazione visiva del Lemma (4.3). Descriviamo con una figura l'applicazione  $z \mapsto z^n$ . Prendiamo come esempio il caso  $n = 3$ . L'applicazione  $z \mapsto z^3$  nel disco unitario  $\Delta$  può essere raffigurata così:

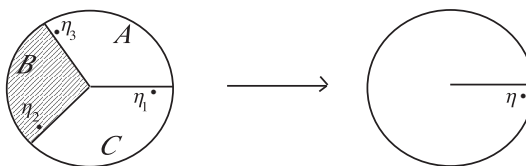


Fig. 33

Ognuno dei tre settori A,B,C si "avvolge" intorno al disco di arrivo  $\Delta$ . Nella figura,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ , sono le tre radici terze di  $\eta$ , e cioè le tre preimmagini di  $\eta$ , nell'applicazione  $z \mapsto z^3$ . Raffiguriamo ora il disco di partenza in questo modo:

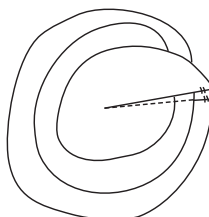


Fig. 34

dove i due lati liberi si intendono identificati (ottenendo così una rappresentazione del disco topologicamente legittima). In questa raffigurazione l'applicazione  $z \mapsto z^3$  può essere pensata come una proiezione:



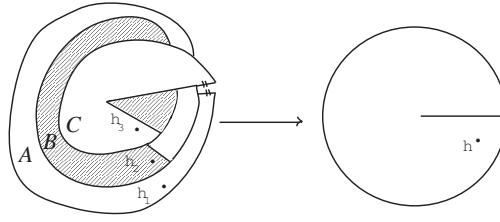


Fig. 35

Per ottenere il disco di partenza, lo si è tagliato lungo un raggio, e poi lo si è avvolto a "elica" su se stesso, stirandolo come se fosse di materiale elastico, e infine si sono identificati (astrattamente) i due lembi del taglio. In questo processo anche i tre settori sono stati stirati fino a ricoprire, ognuno, l'intero cerchio. Tutto ciò è solo una rappresentazione, ma è molto utile. Ora, sempre proseguendo l'esame del caso  $n = 3$ , il Lemma (4.3) ci dice che, data una funzione  $f(z)$  tale che  $f(z) - f(z_0)$  abbia uno zero di ordine 3, allora esistono carte locali  $\phi$  e  $\psi$  che rendono commutativo il seguente diagramma:

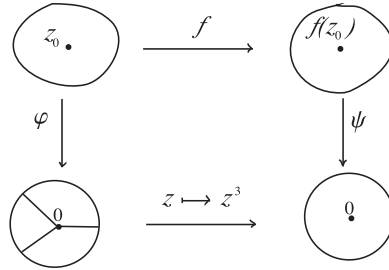


Fig. 36

Il passare da  $f$  a  $\psi f \phi^{-1}$  è un'operazione che noi eseguiamo frequentemente. Supponiamo per esempio di voler studiare un'applicazione  $f : T \rightarrow T'$  tra due porzioni della superficie terrestre. Rappresentiamo le porzioni di superficie terrestre con carte geografiche, le carte geografiche possono essere pensate come omeomorfismi  $\phi : T \rightarrow \phi(T) \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\psi : T' \rightarrow \psi(T') \subset \mathbb{R}^2$ . Studiare l'applicazione  $f$  su carte geografiche vuol dire appunto studiare l'applicazione  $\psi f \phi^{-1}$ .

Ritorniamo al lemma (4.3). L'intero  $n$  che figura nella formula (4.4) dipende solo dalla funzione  $f$  e dal punto  $z_0$ , e prende il nome di *indice di ramificazione di  $f$  nel punto  $z_0$* . Lo si denota con il simbolo  $e_{z_0}(f)$ . Dalla definizione e dal lemma (4.3) segue subito che l'indice di ramificazione di  $f$  nel punto  $z_0$  è l'ordine di 0 come zero della funzione  $\psi f \phi^{-1}$  o, ciò che è lo stesso, l'ordine di  $z_0$  come

zero di  $f - f(z_0)$ :

$$e_{z_0}(f) = \nu_{z_0}(f - f(z_0)) .$$

Un punto  $z_0$  si dice di ramificazione per  $f$  se  $e_{z_0}(f) > 1$ . Possiamo quindi dire che condizione necessaria e sufficiente perché  $f$  sia, intorno a  $z_0$ , un omeomorfismo locale analitico è che  $z_0$  non sia un punto di ramificazione per  $f$ .

Dal Lemma (4.3) segue un importante risultato.

**Teorema dell' Applicazione Aperta 1** *Sia  $U$  un aperto in  $\mathbb{C}$ . Sia  $f$  oloomorfa in  $U$ . Allora  $f$ , come applicazione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , è aperta.*

Dim. Basta dimostrare che ogni punto  $p \in U$  possiede un intorno  $V$  tale che la restrizione di  $f$  a  $V$  è aperta. Ora, per il Lemma (4.3), esiste una carta locale  $(V, \varphi)$  intorno a  $p$  e una  $(V', \psi)$ , intorno a  $f(p)$ , tali che  $\psi f \varphi^{-1}(\zeta) = \zeta^n$  per qualche intero  $n > 0$ . Dunque  $\psi f \varphi^{-1}$  è aperta in  $\varphi(V)$ , ma sia  $\varphi$  che  $\psi$  sono omeomorfismi e perciò  $f$  è aperta in  $V$ .  $\square$

## Esercizi

1. Trovare zeri e poli (con relativi ordini) e punti di ramificazione (con relativi indici) della funzione  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definita da:

$$f(z) = z^3 + z^2 \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \quad f(\infty) = \infty$$

2. Sia  $f(z) = z \cos z$ , trovare carte locali analitiche  $\psi$  e  $\phi$  in 0 e un intero positivo  $n$ , tali che  $\psi f \phi^{-1}(\zeta) = \zeta^n$ .

3. Sia  $f$  una funzione meromorfa in un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ . Sia  $\zeta \in U$  e sia

$$g = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 .$$

Dimostrare che se  $m = \text{ord}_{\zeta} f$ , allora:

$$g(z) = -\frac{1}{2}(m^2 - 1)(z - \zeta)^{-2} + \dots$$

Dedurre che se  $g \equiv 0$ , allora  $f$  è un omeomorfismo locale.

4. Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  l' applicazione analitica definita da

$$f(z) = \frac{1}{2z^2} + z .$$

Estendere  $f$  ad una applicazione analitica  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Calcolare gli zeri, i poli e i punti di ramificazione di  $f$ .

5. Sia  $f$  una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$  avente solo un numero finito di zeri e di poli. Dimostrare che  $f$  si scrive essenzialmente in modo unico nella forma:

$$f(z) = \frac{(z - a_1) \cdots (z - a_n)}{(z - b_1) \cdots (z - b_m)} \exp(g(z))$$

con  $g(z)$  olomorfa in  $\mathbb{C}$ . Dire con esattezza cosa debba intendersi per "essenzialmente in modo unico".

6. Sia  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  l'applicazione analitica definita da

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}.$$

Determinare gli zeri, i poli e i punti di ramificazione di  $f$ . Trovare una carta  $\phi$  intorno a  $-1$  e una  $\psi$  intorno a  $f(-1)$ , tali che  $\psi f \phi^{-1}(\zeta) = \zeta^n$  per qualche  $n > 0$ .

7. Si consideri la funzione meromorfa

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

come applicazione di  $\hat{\mathbb{C}}$  in sé. Si dimostri che, come tale,  $f$  è bianalitica e che stabilisce un'applicazione bianalitica tra il semipiano superiore  $H = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}$  e il disco unitario.