Capitolo 10

1 Il teorema di uniformizzazione

In questa sezione dimostreremo il teorema di uniformizzazione, dovuto a Koebe. Secondo questo teorema una superficie di Riemann semplicemente connessa è analiticamente equivalente o al piano complesso, o alla sfera di Riemann, o al disco. Da ciò ne segue che il rivestimento universale di una superficie di Riemann è analiticamente isomorfo a una di queste 3 superfici. Data una superficie

di Riemann S, semplicemente connessa, dobbiamo innanzitutto costruire una applicazione analitica e *iniettiva* $f : S \hookrightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Per fare ciò, dato $P_0 \in S$, cominceremo col costruire una funzione f in $S - P_0$ tale che, detto z un parametro locale intorno a P_0 e nullo in P_0, $f(z) = \frac{1}{z}$ in un intorno di P_0. Equivalentemente, cercheremo un differenziale olomorfo ω in $S - P_0$ tale che:

(1) ω è esatto in $S - P_0$,

(2) ω è della forma $-\frac{dz}{z^2}$ in un intorno di P_0.

Data la semplice relazione intercorrente tra differenziali olomorfi e differenziali armonici, cf. Cap.10, incominceremo con lo studio di questi ultimi lasciando per ora da parte l'ipotesi della semplice connessione.

Teorema 1.1 . *(Principio di Dirichlet). Sia S una superficie di Riemann e $P_0 \in S$. Sia (V, z) una carta locale in P_0 con $z(P_0) = 0$. Esiste allora un unico differenziale ω che*

(i) ω è armonico e esatto in $S - P_0$,

(ii) $\omega + \frac{dz}{z^2}$ è armonico in un intorno $U \subset V$ di P_0,

(iii) $\|\omega\|^2_{S-\overline{U}} = \int_{S-\overline{U}} \omega \wedge *\overline{\omega} < \infty$,

(iv) $\forall\, h \in \mathcal{E}^0(S)$ con $\|dh\| < \infty$ e tale che $h \equiv 0$ in un intorno di P_0, $\langle \omega, dh \rangle = 0$.

Dim. Si identifichi V con il disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ e U con il disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Sia $\lambda \in \mathcal{E}^0(S)$ tale che $\lambda \equiv 1$ in U e supp $\lambda \subset V$. Si ponga

$$\psi = \begin{cases} d\left(\dfrac{\lambda(z)}{z}\right) & \text{in} \quad V\,, \\ 0 & \text{in} \quad S - V\,. \end{cases}$$

In U si ha $\psi - i*\psi = -\left(\frac{dz}{z^2} - i*\frac{dz}{z^2}\right) \equiv 0$. Da ciò e dalla compattezza del supporto di ψ si deduce che $\psi - i*\psi \in \mathcal{E}^1(S) \cap \mathcal{E}^1_{L^2}(S)$. Per il teorema di decomposizione di Hodge si ha

$$\psi - i*\psi = \omega_h + df + \delta\mu \ , \quad \omega_h \in \mathcal{H}^1(S) \ , \quad f \in \mathcal{E}^0(S), \ \mu \in \mathcal{E}^2(S)$$

Dimostriamo che $\omega = \psi - df = i*\psi + \omega_h + \delta\mu$ soddisfa le condizioni (i)–(iv).

(i) ω è armonico in $S - P_0$, infatti si ha che

$$d\omega = d\psi - d^2 f = dd\left(\frac{\lambda}{z}\right) = 0$$

$$\delta\omega = \delta(i*\psi + \omega_h + \delta\mu) = \delta i*\psi = -*d*i*\psi = *id\psi = 0$$

ω è esatta in $S - P_0$, poiché sia ψ che df lo sono.

(ii) $\omega + \frac{dz}{z^2}$ è armonico in U , infatti si ha $d\psi = -\frac{dz}{z^2}$ e quindi

$$d\left(\omega + \frac{dz}{z^2}\right) = d\left(-\frac{dz}{z^2} + df + \frac{dz}{z^2}\right) = 0$$

$$\delta\left(\omega + \frac{dz}{z^2}\right) = \delta\left(-i*\frac{dz}{z^2} + \omega_h + \delta\mu + \frac{dz}{z^2}\right) = 0.$$

(iii) Poiché ψ ha supporto compatto, e $df \in \mathcal{E}^1_{L^2}(S)$, si ha

$$\|\omega\|_{S-\overline{U}} = \|\psi - df\|_{S-\overline{U}} \leq \|\psi\|_{S-\overline{U}} + \|df\|_{S-\overline{U}} < \infty \ ,$$

(iv) Sia $h \in \mathcal{E}^0(S)$ con $\|dh\| < \infty$, $h \equiv 0$ in un intorno di P_0. Allora $\langle\omega, dh\rangle = \langle i*\psi + \omega_h + \delta\mu, dh\rangle = \langle i*\psi, dh\rangle$, poiché ω, $\delta\mu \in E^*$, $dh \in E$. Supponiamo che $h \equiv 0$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$. Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < 2\}$. Allora essendo $d\psi \equiv 0$ in A, si ha

$$\langle *\psi, dh\rangle = \int_S *\psi \wedge *\overline{dh} = -\int_A \overline{dh} \wedge \psi = -\int_{\partial A} h \wedge \psi = 0 \ ,$$

poiché $\psi = 0$ su $|z| = 2$ e $h = 0$ su $|z| = \varepsilon$.

Dimostriamo ora l'unicità di ω. Supponiamo che ω' soddisfi (i)–(iv). In particolare $\omega - \omega'$ è esatto in S (le singolarità si cancellano). Sia $\omega - \omega' = dF$. Sia λ definita come sopra e si ponga

$$g = \begin{cases} \lambda F & \text{in} \quad V \ , \\ 0 & \text{in} \quad S - V \ . \end{cases}$$

Chiaramente $h = F - g \equiv 0$ in U. Inoltre, facendo uso della (iii),

$$\begin{aligned} \|dh\|_S = \|d(F-g)\|_{S-\overline{U}} &\leqq \|dF\|_{S-\overline{U}} + \|dg\|_{S-\overline{U}} \\ &\leqq \|\omega\|_{S-\overline{U}} + \|\omega'\|_{S-\overline{U}} + \|dg\|_{S-\overline{U}} < \infty \ . \end{aligned}$$

Quindi, per la (iv), $\langle \omega, dh\rangle = \langle \omega', dh\rangle = 0$. Essendo inoltre $\omega - \omega' \in \mathcal{H}'(S)$ e dg a supp comp. si ha

$$\|\omega - \omega'\|^2 = \langle \omega - \omega', dF\rangle = \langle \omega - \omega', dh\rangle + \langle \omega - \omega', dg\rangle = 0$$

e perciò $\omega \equiv \omega'$.

Corollario 1.2 . *Sia S una superficie di Riemann e $P_0 \in S$. Allora esiste una funzione* armonica e reale u *in* $S - P_0$ *tale che*

(i) $u -$ *Re* $\frac{1}{z}$ *è armonico in un intorno U di P_0,*

(ii) $\|du\|_{S-\overline{U}} = \int_{S-\overline{U}} du \wedge *du < \infty$,

(iii) $\langle du, dh\rangle = 0$, $\forall\, h \in \mathcal{E}^0(S)$ *con* $dh \equiv 0$ *in un intorno di* P_0 *e* $\|dh\| < \infty$.

Dim. Sia ω il differenziale armonico e esatto in $S - P_0$ costruito nel teorema precedente, allora $\frac{\omega+\overline{\omega}}{2}$ è un differenziale armonico esatto e reale in $S - P_0$. La funzione u tale che $du = \frac{\omega+\overline{\omega}}{2}$ in $S - P_0$ soddisfa, ovviamente le condizioni richieste.

Introduciamo ora *l'ipotesi di semplice connessione* su S. Vedremo come essa ci consenta di costruire una funzione analitica e partire dalla funzione armonica u.

Teorema 1.3 *Sia S una superficie di Riemann semplicemente connessa. Sia $P_0 \in S$. Esiste allora una applicazione analitica $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ tale che*

(a) $f : S - P_0 \to \mathbb{C}$,

(b) in un intorno di P_0, $f(z) = \frac{1}{z}$, *(cosicché* $f(P_0) = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$*),*

(c) Re $(f) = u$ *dove* u *è la funzione armonica costruita nel Corollario (1.2).*

Dim. Sia u la funzione armonica e reale in $S - P_0$ costruita nel Corollario (1.2). Il differenziale $du + i * du$ è definito in $S - P_0$ e ha, in P_0, una singolarità del tipo $d\left(\frac{1}{z}\right)$. Basta quindi dimostrare che $*du$ è esatto. Sappiamo che du è esatto, ma ciò non implica che anche $*du$ lo sia, infatti ciò non potrà essere vero in generale. Per esempio, se S è compatta, dal Teorema di Hurwitz segue che esistono su S funzioni meromorfe dotate di un solo polo semplice solo se S è di genere zero i.e. $S \cong \hat{\mathbb{C}}$). Per dimostrare l'esattezza di $*du$ cercheremo, come al solito, di dimostrare che $\int_\gamma *du = 0$, $\forall$ ciclo γ. Il risultato topologico che fa entrare in campo, in modo decisivo, l'ipotesi di semplice connessione è il seguente.

Teorema 1.4 . *Sia S una superficie di Riemann semplicemente connessa. Sia γ un cammino chiuso e regolare in S. Allora γ divide S in due componenti connesse (superfici che godono di questa proprietà si chiamano "schlichtartig" o planari).*

Dim. Dimostreremo che supponendo $S \smallsetminus \Gamma$ connesso, si può costruire un rivestimento doppio connesso di S. Ciò contraddice l'ipotesi di semplice connessione. Per il lemma dell'intorno tubolare esiste un aperto $G \subseteq S$ tale che $G \supset \Gamma$, $G \smallsetminus \Gamma = G^+ \cup G^-$ e tale che, dato un punto qualsiasi $p \in \Gamma$, esiste un intorno U di p, omeomorfo ad un disco, che è separato da Γ in due parti che chiamiamo U^+ e U^-. Costruiamo il rivestimento doppio nel modo seguente, prendiamo due copie S_1 e S_2 della superficie S e denotiamo con con Γ_1 (risp. Γ_2) la copia di Γ in S_1 (risp. S_2). Similmente definiamo G_1^+, G_1^-, G_2^+, G_2^- Tagliamo le due superfici lungo Γ_1 e Γ_2 e incolliamo l'intorno G_1^+ con G_2^- identificando Γ_1 con Γ_2 e lo stesso facciamo con G_1^- con G_2^+. La superficie $\tilde{S}$ che si ottiene in questo modo è ovviamente connessa poiché $S_1 \smallsetminus \Gamma_1$ e $S_2 \smallsetminus \Gamma_2$ sono connesse per archi ed è inoltre evidente che $\tilde{S}$ è un rivestimento doppio di S. Q.E.D.

Possiamo ora completare la dimostrazione del Teorema 1.3. Si tratta di dimostrare che $\int_\gamma *du = 0$, $\forall$ ciclo γ. Si può assumere che γ sia regolare. Sia $S - |\gamma| = S^+ \cup S^-$ e si assuma che P_0 (la singolarità di u) stia in S^-. Sia G un intorno tubolare di γ e sia $G^+ = S^+ \cap G$. Sia $h \in \mathcal{E}^0(S)$ tale che

$$h = \begin{cases} 1 & \text{in} \quad S^- \cup |\gamma| \\ 0 & \text{in} \quad S^+ - G^+ \ . \end{cases}$$

Dunque dh soddisfa la condizione (iii) del Corollario (1.2). Per la (iii) del Corollario (1.2) si ha

$$0 = \langle du, dh \rangle = \int_S dh \wedge *du = \int_{G^+} dh \wedge *du = \int_{\partial G^+} h \wedge *du - \int_{G^+} h \wedge d * du$$

Ma u è armonico in $G^+ \subset S - P_0$, quindi $d * du = *\Delta u = 0$. D'altro canto $\partial G^+ = \gamma + \gamma'$ e $h \equiv 1$ su γ, $h \equiv 0$ su γ'. Quindi $0 = \langle du, dh \rangle = \pm \int_\gamma *du$. Questo dimostra l'esattezza di $*du$ e l'esistenza di f.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di uniformizzazione.

Teorema 1.5 *(Uniformizzazione). Una superficie di Riemann semplicemente connessa è analiticamente equivalente ad una delle seguenti:*

$$\mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}, D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \ .$$

Dim Sia dunque $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ la funzione costruita nel Teorema 1.3. In un intorno di P_0, $f(z) = \frac{1}{z}$. Poniamo:

$$f = u + iv$$

dove u è la funzione armonica del Corollario (1.2). Dimostriamo innanzitutto che f è iniettiva e che il suo differenziale non svanisce mai. Ciò dimostrerà che $S \xrightarrow{f} f(S) \subset \hat{\mathbb{C}}$ è bianalitica. Siano P_1 e P_2 due punti di S diversi da P_0, e per cui $df(P_i) \neq 0$. Supponiamo che $f(P_1) = f(P_2) = u_1 + iv_1 \in \mathbb{C}$. Dividiamo $\mathbb{C}$ in quattro quadranti

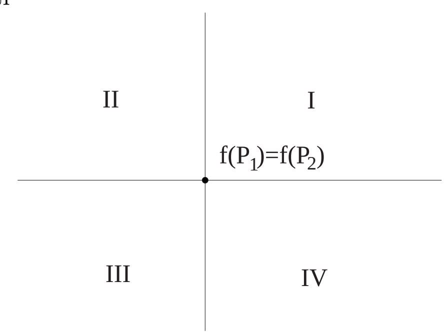

Fig.1

$$\begin{aligned} I &= \{u > u_1, v > v_1\} \;, \quad II = \{u < u_1, v > v_1\} \\ III &= \{u < u_1, v < v_1\} \;, \quad IV = \{u > u_1, v < v_1\} \end{aligned}$$

Poiché $df(P_i) \neq 0$, in un intorno di P_i esiste una inversa f^{-1} di f, e f, in questo intorno, è bianalitica. Quindi un intorno di P_i è diviso in quattro parti e lo stesso è ovviamente vero anche per un intorno di P_0, essendo $\frac{1}{z}$ localmente bianalitica (da un intorno di P_0 a un intorno di $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$). Dimostriamo che la controimmagine di una delle 4 regioni (I, II, III, IV) ha una sola componente connessa. Trattiamo il caso I. Gli altri sono simili. Supponiamo per assurdo che $f^{-1}(I)$ abbia più componenti connesse. Allora ve ne sarà una, chiamiamola A, tale che

(a) $u > u_1$, $v > v_1$ in A,
(b) sul bordo di A si ha $u = u_1$ oppure $v = v_1$,
(c) $P_0 \notin \partial A$, perché per la bianaliticità degli intorni P_0 è nella chiusura di una sola componente connessa.

Siano $\rho(t)$, $\sigma(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ tali che:

(1) $\rho(u_1) = \rho^{(n)}(u_1) = 0 = \sigma(v_1) = \sigma^{(n)}(v_1)$, $\forall\, n$,
(2) $|\rho|$, $|\rho'|$, $|\sigma|$, $|\sigma'| \leq M$,
(3) $\rho'(u)\sigma(v) > 0$ in $\mathbb{C} - ((u - u_1)(v - v_1) = 0)$.
Sia per $p \in S$,

$$h(p) = \begin{cases} \rho(u(p))\sigma(v(p)) & p \in A \\ 0 & p \in S - A \end{cases}$$

Dalla (b) e dalla (1) segue che $h \in \mathcal{E}^0(S)$. Essendo $P_0 \in S - A$, si ha che $h \equiv 0$ in un intorno di P_0. Inoltre, localmente

$$h_x = \rho' u_x \sigma + \rho\sigma' v_x = \rho' u_x \sigma - \rho\sigma' u_y$$

Nell' ultima uguaglianza abbiamo usato l' identità di Cauchy–Riemann per $f = u + iv$, similmente si ha

$$h_y = \rho' u_y \sigma + \rho\sigma' v_y = \rho' u_y \sigma + \rho\sigma' u_x$$

Quindi, localmente

$$dh \wedge *\overline{dh} = (h_x^2 + h_y^2)dA = ((\rho'\sigma)^2 + (\rho\sigma')^2)(u_x^2 + u_y^2)dA \ .$$

In virtù della (2) si ha

$$\|dh\| = \int_S dh \wedge *\overline{dh} \leqq 2M^2 \|du\|_A$$

Si può quindi applicare ad h la proprietà (iii) del Corollario (1.2). Si ha:

$$0 = \langle du, dh\rangle = \int_S du \wedge *\overline{dh} = \int_A du \wedge *\overline{dh} \ .$$

Ma, localmente,

$$du \wedge *\overline{dh} = (u_x h_x + v_y h_y)dA = \rho'\sigma(u_x^2 + u_y^2)dA \ .$$

In virtù della (3) si deve quindi concludere che $u_x^2 + u_y^2 = 0$ in A. Questo vuol dire che $u_x = u_y = 0$ in A e quindi $f \equiv$ cost in S. Questo è assurdo. Dunque $S - \{u = u_1, v = v_1\}$ è suddivisa in quattro regioni *connesse* che, con abuso di linguaggio, indicheremo ancora con i simboli I, II, III, IV. Per costruzione P_0, P_1, P_2 stanno sul *bordo di ognuna* di queste regioni. Sempre sotto l'ipotesi che $f(P_1) = fP_2) = u_1 + iv_1$, costruiamo una curva $\alpha_1 \subset I$ che congiunge P_1 a P_2 a una curva $\alpha_2 \subset III$ che congiunge P_1 a P_2. Chiaramente si può fare in modo che il ciclo $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ sia *semplice* e non contenga P_0. Tale ciclo divide $S - |\alpha|$ in due componenti connesse B_1 e B_2. Sia $P_0 \in B_1$. Essendovi, in un intorno di P_0, punti di II e IV ed essendo $|\alpha| \cap (II \cup IV) = \emptyset$. Si deve avere $B_1 \supset (II \cup IV)$. Altrimenti II (o IV) non sarebbero connessi, avendovi $II = II \cap S = II \cap (S - |\alpha|) = (II \cap B_1) \cup (II \cap B_2)$. Ma è anche assurdo che $B_1 \supset (II \cup IV)$ perché in un intorno di P_1 i punti di II giacciono da una parte di α e i punti di IV dall'altra. Si può quindi concludere che $f(P_1) \neq f(P_2)$. Ciò mostra anche che $df \neq 0$ su S. Perché se fosse $df(P) = 0$ allora, in un intorno di P, f sarebbe un rivestimento ramificato di grado n con $n > 1$, e abbiamo appena dimostrato che ciò non accade. Dunque $f : S \to f(S) \subset \hat{\mathbb{C}}$ è un *isomorfismo analitico*.

Dimostriamo ora che $\hat{\mathbb{C}} - f(S) = \{$unione di segmenti orizzontali$\}$. Supponiamo che ciò non sia vero. Esiste allora una porzione del bordo di $f(S)$ che unisce due punti $P_1 \equiv (u_2, v_1)$ e $P_2 = (u_2, v_2)$ con $v_1 < v_2$. Dal momento che $f(P_0) = \infty \in f(S)$ si ha che, per $u_0 \gg 0$, il segmento verticale T, che unisce (u_0, v_1) a (u_0, v_2), è contenuto in $f(S)$. Sia A la regione (connessa) di $f(S)$ limitata da T dalle rette $v = v_1$, $v = v_2$ è da porzioni del bordo di $f(S)$.

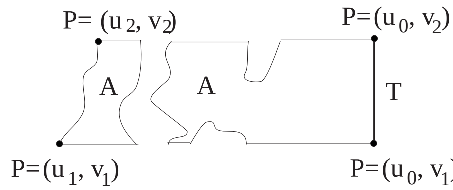

Fig.2

Sia $g \in \mathcal{E}^0(f(S))$ la funzione reale uguale

$$g(u,v) = (u-u_0)^3(v-v_1)^3(v-v_2)^3$$

in A e identicamente nulla in $f(S) \smallsetminus A$. Si ha che $\frac{\partial g}{\partial u} < 0$, in A. La funzione $h = g \circ f$ soddisfa dunque le condizioni (iii) del Corollario (1.2). Quindi usando $f = u + iv$ come *parametro globale* su S si ha

$$0 = \langle du, dh \rangle = \int_S du \wedge *dh = \int_{f(S)} \frac{\partial g}{\partial u} dudv = \int_A \frac{\partial g}{\partial u}\, dudv \ .$$

Ma $\frac{\partial g}{\partial u} < 0$ in A e si ha quindi una contraddizione. Si ha dunque

$$\hat{\mathbb{C}} - f(S) = \{\text{unione di segmenti orizzontali}\} \tag{1.1}$$

o equivalentemente

$$\hat{\mathbb{C}} - \{\text{unione di segmenti orizzontali}\} = f(S) \ . \tag{1.2}$$

Poiché S è connessa e semplicemente connessa anche $f(S) \subset \hat{\mathbb{C}}$ lo è. Quindi, poiché $\pi_1(f(S)) = 0$, si deduce che $f(S) \cong S$ non può che essere una delle seguenti superfici:

(1) $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

(2) $\hat{\mathbb{C}} - \{pt\} \cong \mathbb{C}$

(3) $\hat{\mathbb{C}} - \{\text{segmento orizzontale}\} \cong \hat{\mathbb{C}} - \{2 \leqq \text{ Re } z \leqq 2, \text{Im } z = 0\} \cong$
$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

In (1), (2), (3) tutti gli isomorfismi analitici sono quelli ovvi, tranne, forse, l'ultimo che è dato da

$$D \to \hat{\mathbb{C}} - \{[-2,2]\}$$
$$z \mapsto z + \frac{1}{z}$$

Il teorema è così completamente dimostrato.Osserviamo che le tre superfici non

possono essere analiticamente equivalenti, infatti $\hat{\mathbb{C}}$ è compatta, mentre le altre non lo sono e infine il teorema di Liouville nega la possibilità di un isomorfismo analitico tra $\mathbb{C}$ e D.

Esercizi

1. Sia S una superficie di Riemann e $P_0 \in S$; dimostrare che esiste una funzione armonica u con singolarità $1\backslash z$ in P_0. Verificare che se $u \in L^2(S)$, allora la norma $\langle du, du \rangle$ è minima in $S \setminus \overline{U}$ nella classe di funzioni $u + h$.

2. Applicare il metodo illustrato nella dimostrazione del teorema 1.4 per costruire un rivestimento doppio $\tilde{S}$ di una superficie di Riemann compatta S di genere $g \geq 1$. Calcolare il genere di $\tilde{S}$.

3. Dimostrare che una superficie di Riemann semplicemente connessa contenuta nella sfera $\hat{\mathbb{C}}$ e con almeno due punti nel bordo, è analiticamente equivalente a D.

2 Gruppi di Fuchs, trasformazioni di Moebius, trasformazioni non–euclidee

Sia S una superficie di Riemann. D'ora in poi denoteremo con

$$p : \tilde{S} \to S$$

il *rivestimento universale* di S. Come al solito si dà a $\tilde{S}$ la struttura complessa indotta da p, per cui l'applicazione p risulterà essere analitica. Dunque d'ora in poi, $\tilde{S}$ denoterà una delle tre superfici $\mathbb{C}$, $\widehat{\mathbb{C}}$, Δ. Della teoria dei rivestimenti topologici vogliamo ricordare i seguenti fatti.

Si indichi con $Aut(\tilde{S}, p)$ il gruppo delle trasformazioni di rivestimento; $Aut(\tilde{S}, p) = \{T : \tilde{S} \to \tilde{S} : pT = p\}$. Osserviamo che poichè p è analitica anche T lo è. Si indichi inoltre con $\mathcal{A}(\tilde{S})$ il gruppo degli automorfismi analitici di $\tilde{S}$. Si ha

$$Aut(\tilde{S}, p) \cong \pi_1(S) \tag{2.1}$$

$Aut(\tilde{S}, p)$ agisce transitivamente su $p^{-1}(x), x \in S$

$$S \cong \tilde{S}/Aut(\tilde{S}, p) \tag{2.2}$$

$Aut(\tilde{S}, p)$ è un sottogruppo discontinuo e privo di punti fissi di $\mathcal{A}(\tilde{S})$. Ciò vuol dire che $\forall\, T \in Aut(\tilde{S}, p)$, $T \neq id$ e $\lambda \in \tilde{S}$, esiste un intorno V di x con $T(V) \cap V = \emptyset$. Viceversa, dato un qualsiasi sottogruppo discontinuo e privo di punti fissi $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}(\tilde{S})$, si può dare a $\tilde{S}/\mathcal{D} = S$ una struttura di superficie di Riemann tale che $p : \tilde{S} \to S$ è un rivestimento topologico (analitico). In questo caso $\mathcal{D} \cong Aut(\tilde{S}, p)$. Inoltre vale la seguente

Proposizione 2.1 . *Due superfici di Riemann S_1 e S_2 sono analiticamente equivalenti se e solo se $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_2 = \tilde{S}$ e $Aut(\tilde{S}, p_1)$ è coniugato di $Aut(\tilde{S}, p_2)$ in $\mathcal{A}(\tilde{S})$.*

Dim. Sia $\mathcal{D}_i = Aut(\tilde{S}, p_i)$. Supponiamo $\mathcal{D}_1 = A\mathcal{D}_2A^{-1}$, $A \in \mathcal{A}(\tilde{S})$. Definiamo $f : S_1 \to S_2$ ponendo $f(x) = p_2A^{-1}p_i^{-1}(x)$. La f è *ben definita*: siano x_1, $x_2 \in p_1^{-1}(x)$, sia $T_1 \in \mathcal{D}_1$ tale che $T_1(x_1) = x_2$ e sia $T_2 = A^{-1}T_1A \in \mathcal{D}_2$; allora

$$p_2A^{-1}(x_2) = p_2A^{-1}\Gamma_1(x_1) = p_2T_2A^{-1}(x_1) = p_2A^{-1}(x_1) \ .$$

La f è *suriettiva*: se $x \in S_2$ e $y \in p_2^{-1}(x)$ sia $x_1 = p_1A(y)$; allora $f(x_1) = p_2A^{-1}p_1^{-1}(x_1) = p_2(y) = x$. La f è *iniettiva*: se $f(x_1) = f(x_2)$ sia $y_i \in p_i^{-1}(x_i)$; allora $p_2A^{-1}(y_1) = p_2A^{-1}(y_2)$ e quindi esiste $T_2 \in \mathcal{D}_2$ con $T_2A^{-1}(y_1) = A^{-1}(y_2)$, quindi $y_2 = AT_2A^{-1}(y_1)$. Ma $T_1 = AT_2A^{-1} \in \mathcal{D}_1$ e perciò $x_1 = p_1T_1(y_1) = p_1(y_2) = x_2$. Chiaramente f e f^{-1} sono analitiche essendolo, localmente, p_1, p_2 e A. Viceversa se $S_1 =\cong S_2$ allora, chiaramente $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_2 = \tilde{S}$, e l'isomorfismo $f : \tilde{S}/\mathcal{D}_1 \to \tilde{S}/\mathcal{D}_2$ si solleva a un isomorfismo $A : \tilde{S} \to \tilde{S}$ tale che $Ap_1 = p_2A$. Da qui è immediato verificare che $\mathcal{D}_1 = A\mathcal{D}_2A^{-1}$. Q.E.D.

I gruppi $Aut(\tilde{S}, p)$ godono inoltre di un'altra proprietà:

Proposizione 2.2 . *Sia S una superficie di Riemann e $\tilde{S}$ il suo rivestimento universale allora $Aut(\tilde{S}, p)$ è discreto (i.e. non esiste una successione $\{T_n\} \in Aut(\tilde{S}, p)$ con $\lim T_n = I$) e numerabile.*

Dim. Se $\mathcal{D} = Aut(\tilde{S}, p)$ non fosse discreto esisterebbe una successione $\{T_n\} \subset Aut(\tilde{S}, p)$ con $T_n \to I$. Essendo $\mathcal{D}$ privo di punti fissi, dato $z_0 \in \tilde{S}$ si ha $T_n(z_0) \neq z_0$, $\forall\, n$. Ma allora l'insieme $\{T_n(z_0)\} \subset \tilde{S}$ ha un punto di accumulazione e quindi $\mathcal{D}$ non sarebbe discontinuo. Dimostriamo che $\mathcal{D}$ è numerabile. Dato $z_0 \in \tilde{S}$, essendo $\mathcal{D}$ privo di punti fissi vi è una corrispondenza *biunivoca* tra $\mathcal{D}$ e l'orbita $\{T(z_0)\}_{T\in\mathcal{D}}$. D'altro canto essendo $\mathcal{D}$ discontinuo l'insieme $\{T(z_0)\}_{T\in\mathcal{D}} \subset \tilde{S}$ è *discreto*. Ma $\tilde{S} = \hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, D è a base numerabile. Quindi quell'insieme è numerabile. Q.E.D.

Da ciò che si è detto appare quindi che il problema della classificazione della superficie di Riemann si riconduce a quello della classificazione dei sottogruppi $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}(\tilde{S})$ *privi di punti fissi* e *discontinui* (discreti e numerabili). Per il teorema di uniformizzazione $\tilde{S} \cong \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, D$. Vedremo che nei primi due casi la classificazione è semplicissima, assai più ricco, invece, è il terzo caso. I sottogruppi privi di punti fissi e discontinui di $\mathcal{A}(D)$ prendono il nome di *gruppi Fuchsiani*

Incominciamo ora a studiare gruppi $\mathcal{A}(\tilde{S})$ nei tre casi $\tilde{S} = \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, D$. Studieremo anche il caso $\tilde{S} = H = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}\ z > 0\} \cong D$. Fissiamo, una volta per tutte l'isomorfismo

$$\begin{aligned} H &\to D \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Come si vedrà nei calcoli, a volte sarà conveniente usare D e a volte H. Inoltre, cosa assai più rilevante, si vedrà che lo studio del semipiano superiore H si generalizza nello studio del cosiddetto *semi spazio superiore* di Siegel, oggetto di fondamentale importanza sia dal punto di vista delle varietà abeliane che da quello della superficie di Riemann e dei loro moduli (periodi degli integrali abeliani).

Teorema 2.3

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\hat{\mathbb{C}}) &= \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0 \right\} \\
&\cong GL(2,\mathbb{C}) \Big/ \mathbb{C}^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cong SL(2,\mathbb{C}) \Big/ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathcal{A}(\mathbb{C}) &= \{ z \mapsto az+b : a,b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \} \\
\mathcal{A}(H) &= \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc > 0 \right\} \\
&\cong SL(2,\mathbb{R}) \Big/ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathcal{A}(D) &= \left\{ z \mapsto \frac{e^{i\theta}(z-a)}{1-z\overline{a}} : \theta \in \mathbb{R},\ |a| < 1 \right\} \cong \mathcal{A}(H)
\end{aligned}
$$

Chiaramente $\mathcal{A}(D)$, $\mathcal{A}(H)$ e $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ sono sottogruppi di $A(\hat{\mathbb{C}})$. Il gruppo $\mathcal{A}(\hat{\mathbb{C}})$ si chiama il gruppo delle trasformazioni di Moebius, mentre i gruppi $\mathcal{A}(D)$ e $\mathcal{A}(H)$ si dicono gruppi di trasformazione non–euclidee (brevemente N.E.).

Dim. I primi due casi si riducono al teorema di *Casorati–Weierstrass* che dice che una funzione analitica assume, in un intorno di una singolarità essenziale, valori arbitrariamente vicini a un qualsiasi prefissato $a \in \mathbb{C}$. Ricordiamone la dimostrazione. Sia $z_0 = 0$ una singolarità essenziale di f. Si assuma per assurdo che, dato $\varepsilon > 0$, esista $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ tali che $|f(z) - a| \geq r$, $\forall\, z \in \dot{D}_\varepsilon = \{0 < |z| < \varepsilon\}$. Allora $g(z) = (f(z) - a)^{-1}$ è olomorfa e limitata in $\dot{D}_\varepsilon$ e quindi olomorfa in $D_\varepsilon = \{|z| < \varepsilon\}$. Quindi $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$ è meromorfa in D_ε e perciò 0 non è essenziale. Da ciò segue la descrizione di $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Data infatti $T \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, essendo T iniettiva, ∞ non è una singolarità essenziale. Quindi $T(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, ma di nuovo, essendo T iniettiva, si ha $N = 1$, ovvero $T(z) = a_0 + a_1 z$, $a_1 \neq 0$. Supponiamo ora $A \in \mathcal{A}(\hat{\mathbb{C}})$. Sia $A(\infty) = k$. Allora

$$
\frac{1}{A(z) - k} \in \mathcal{A}(\mathbb{C})
$$

e perciò $\frac{1}{A(z)-k} = cz + d$, da cui

$$A(z) = \frac{(kc)z + (kd + 1)}{cz + d}$$

e

$$(kc)d - (kd + 1)c = -c \neq 0.$$

Sia ora $T \in \mathcal{A}(D)$, e $T^{-1}(0) = a$. Posto

$$A(z) = \frac{z - a}{1 - z\overline{a}}$$

si vede subito che $A \in \mathcal{A}(D)$ e $TA^{-1}(0) = 0$. Ora

$$\frac{TA^{-1}(z)}{z}$$

è regolare e, per $|z| = r < 1$,

$$\left|\frac{TA^{-1}(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r}.$$

Per il principio del massimo si ha $\left|\frac{TA^{-1}(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r}$ per $|z| < r$, e quindi $\left|\frac{TA^{-1}(z)}{z}\right| \leq 1$ per $|z| < 1$. Lo stesso ragionamento vale per $\frac{z}{TA^{-1}(z)}$. Ne segue che

$$\left|\frac{TA^{-1}(z)}{z}\right| = 1$$

ovvero $TA^{-1}(z) = e^{i\theta}z$. Quindi T è della forma richiesta. Il caso di $\mathcal{A}(H)$ si riconduce a quello di $\mathcal{A}(D)$ tramite la (2.3)

Lemma 2.4 *Una trasformazione di Moebius $T \in \mathcal{A}(\hat{\mathbb{C}})$, diversa dall'identità, possiede 1 o 2 punti fissi.*

Dim. L'equazione $\frac{az+b}{cz+d} = z$ è quadratica o lineare a seconda che c è diverso o eguale a zero.

Corollario 2.5 *Una superficie di Riemann il cui rivestimento universale è $\hat{\mathbb{C}}$, è isomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$.*

Dim. Dovendo essere $Aut(\tilde{S}, p)$ privo di punti fissi si ha, per il lemma precedente, $Aut(\tilde{S}, p) = \{id\}$.

Ovviamente questo corollario è anche una immediata conseguenza della formula di Hurwitz.

Esercizi

1. Sia $\tilde{S} = \widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, D$, dimostrare che l'azione dei gruppi $\mathcal{A}(\tilde{S})$ su $\tilde{S}$ è transitiva (i.e. per ogni $z, w \in \tilde{S}$ esiste $g \in \mathcal{A}(\tilde{S})$ tale che $z = gw$) e fedele (i.e. $gz = z$ per ogni $z \in \tilde{S} \Rightarrow g = id$).
2. Dimostrare che, nei tre casi dell' esercizio precedente, il gruppo di isotropia di $z \in \tilde{S}$ è isomorfo, rispettivamente, a

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \Big/ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}, \quad \mathbb{C}, \quad SO(2)\,.$$

3. Verificare che $SL(2,\mathbb{Z})/\pm 1$ è un gruppo di Fuchs con punti fissi.
4. Sia $\Gamma(n) \subset SL(2,\mathbb{Z})$ il sottogruppo definito da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad mod.n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Verificare che $\Gamma(2)/\pm 1$ e $\Gamma(n)$, $n \geq 3$ sono gruppi di Fuchs.

3 Metrica e curvatura gaussiana di una superficie di Riemann

Prima di passare allo studio sistematico dei sottogruppi discontinui e privi di punti fissi $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}(\tilde{S})$ vogliamo fare alcune considerazioni di natura metrica. Ricordiamo che $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$, D possiedono una metrica Riemannian a *curvatura gaussiana costante*.

Ponendo $\hat{\mathbb{C}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $\hat{\mathbb{C}}$ ha la metrica indotta da $\mathbb{E}^3$. Le geodetiche sono i cerchi massimi, e per la curvatura gaussiana si ha:

$$K_{\hat{\mathbb{C}}} \equiv 1$$

In $\mathbb{C}$ si ha la metrica euclidea $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Le geodetiche sono rette e, per, la curvatura gaussiana si ha

$$K_{\mathbb{C}} \equiv 0$$

In D si usa la metrica di Poincaré: $ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-|z|^2)^2}$. Le geodetiche sono cerchi perpendicolari a ∂D e diametri e, per la curvatura gaussiana si ha:

$$K_D \equiv -1$$

Per completezza includiamo il caso del semipiano superiore H. In H si usa la metrica di Poincaré $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{(Im\, z)^2}$. Le geodetiche sono cerchi perpendicolari a ∂H e rette verticali. Per la curvatura gaussiana si ha

$$K_H \equiv -1$$

L'applicazione $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ è una *isometria* di H in D. Ricordiamo infine che in $\mathbb{C}$ (risp. D, H), dati P_1, $P_2 \in \mathbb{C}$ (risp. P_1, $P_2 \in D$, H) *vi è una sola* geodetica $\gamma_{P_1 P_2}$ che unisce P_1 a P_2, e che la distanza tra P_1 e P_2 è data da

$$d(P_1, P_2) = \int_{\gamma_{P_1 P_2}} ds^2(\gamma) \ . \tag{3.1}$$

Lemma 3.1 . *Sia S una superficie di Riemann e $\tilde{S}$ il suo rivestimento universale. Allora $Aut(\tilde{S}, p)$ è un gruppo di isometrie di $\tilde{S}$, i.e. $T^* ds^2 = ds^2$.*

Dim. Il caso $\tilde{S}$ è banale: $Aut(\tilde{S}, p) = \{id\}$. Se $\tilde{S} = \mathbb{C}$ allora per la Proposizione ? ogni $T \in Aut(\tilde{S}, p)$ è della forma $T(z) = z + b$, e queste traslazioni sono ovviamente isometrie (per la metrica euclidea). Se $\tilde{S} = H$, allora $T \in Aut(\tilde{S}, p)$ è della forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, e si è già visto che queste sono isometrie nella metrica di Poincaré.

Teorema 3.2 . *Sia S una superficie di Riemann e $p : \tilde{S} \to S$ il suo rivestimento universale. Allora esiste su S una metrica riemanniana tale che p è una isometria locale. Dal fatto che si deduce che, in questa metrica, indicata con K_S la curvatura gaussiana di S, si ha*

$$K_S \equiv 1 \quad se \quad \tilde{S} = \hat{\mathbb{C}}\,, \qquad K_S \equiv 0 \quad se \quad \tilde{S} = \mathbb{C}\,, \qquad K_S \equiv -1 \quad se \quad \tilde{S} = D \ .$$

Dim. Il caso $\tilde{S} = \hat{\mathbb{C}}$ è banale. Assumiamo $\tilde{S} \neq \hat{\mathbb{C}}$ e indichiamo con ds^2 la sua metrica (euclidea per $\tilde{S} = \mathbb{C}$, di Poincaré per $\tilde{S} = D$). Si ricopra S con intorni $\{V_\alpha\}$ *ben rivestiti* da p. Sia $\bigcup_\beta W_{\alpha\beta} = f^{-1}(V_\alpha)$. Le applicazioni

$$g_{\alpha\beta} = (p|_{W_{\alpha\beta}})^{-1} : V_\alpha \longrightarrow W_{\alpha\beta} \subset \tilde{S} \subseteq \mathbb{C}$$

definiscono un sistema di *carte locali* $(V_\alpha, g_{\alpha\beta})$ per S. Si definisca su V_α un insieme di metriche $ds^2_{\alpha\beta}$ imponendo a $g_{\alpha\beta}$ di essere una *isometria*. Per dimostrare il teorema basta mostrare che, in $V_\alpha \cap V_\beta$, $ds^2_{\alpha\gamma} = ds^2_{\beta\delta}$, $\forall\, \gamma$ e δ. Se $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, esiste $T \in Aut(\tilde{S}, p)$ tale che

$$T : W_{\alpha\gamma} \cap p^{-1}(V_\beta) \xrightarrow{\cong} W_{\beta\delta} \cap p^{-1}(V_\alpha)$$

Ovviamente si ha $g_{\beta\delta} = T g_{\alpha\gamma}$. Inoltre, per il Lemma (3.2), T è una isometria. Quindi

$$ds^2_{\beta\delta} = g^*_{\beta\delta}(ds^2) = (T g_{\alpha\gamma})^*(ds^2) = g^*_{\alpha\gamma} T^*(ds^2) = g^*_{\alpha\gamma}(ds^2) = ds^2_{\alpha\gamma} \ .$$

Q.E.D.

Il teorema dimostrato ci permette quindi di *introdurre su ogni specie di Riemann una metrica a curvatura gaussiana costante K* il cui segno dipende dal rivestimento universale di S.

4 Definizione e proprietà del poligono fondamentale

D'ora in poi indicheremo con $\tilde{S}$ una delle seguenti superfici di Riemann semplicemente connesse: $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, D, H.

Si considererà $\tilde{S}$ equipaggiata con la sua metrica "naturale" (i.e. risp. euclidea, di Poincaré).

Sia S una superficie di Riemann e $\tilde{S}$ il suo rivestimento universale. Sia $\mathcal{D} = Aut(\tilde{S}, p)$. Costruiamo ora il cosiddetto *poligono fondamentale* per $\mathcal{D}$.

Si fissi in modo del tutto arbitrario un punto $z_0 \in \tilde{S}$ e sia $\mathcal{D}(z_0)$ l'orbita di z_0 per $\mathcal{D}$. Essendo $\mathcal{D}$ numerabile si può porre $\mathcal{D}(z_0) = \{z_0, z_1, \dots\}$. Per ogni punto $z_i \in \mathcal{D}(z_0)$ $z_i \neq z_0$, si consideri il segmento L_i di *geodetica* che unisce z_i a z_0. Sia M_i la geodetica perpendicolare a L_i e bisecante il segmento L_i.

Sia Σ_i la componente connessa di $\tilde{S} - M_i$ che contiene z_0. Si ponga

$$P_0 = \bigcap_i \Sigma_i \tag{4.1}$$

Ovviamente

$$P_0 = \{z \in \tilde{S} : d(z, z_0) < d(z, z_i)\ \forall\, i \neq 0\} \ . \tag{4.2}$$

Si può inoltre porre

$$P_j = \{z \in \tilde{S} : d(z, z_j) < d(z, z_i)\ \forall\, i \neq j\} \ . \tag{4.3}$$

Posto $T_j(z_0) = z_j$, si riconosce subito che $T_j(P_0) = P_j$. Ciò segue dal fatto che le $T \in \mathcal{D}$ sono isometrie (cf. Lemma 3.2).

Ricordiamo che un sottoinsieme aperto $\pi \subset \tilde{S}$ si dice un *poligono* se è convesso, (i.e. dati due punti z, $z' \in \pi$, il segmento di geodetica che li unisce è contenuto interamente in π) e se ∂P consiste di una infinità numerabile di segmenti geodetici.

In questo senso è chiaro che gli insiemi P_j sono, per costruzione, *poligoni* in $\tilde{S}$. Fissiamo l'attenzione su uno di essi, ad esempio, P_0. Un punto $z \in \overline{P}_0$ si dice *vertice* se z è equidistante da almeno tre punti distinti z_0, z_i, $z_j \in \mathcal{D}(z_0)$.

Se $V \subset \overline{P}_0$ è l'insieme dei vertici di $\overline{P}_0$, le componenti connesse di $\partial\overline{P}_0 - V$ si chiamano i *lati* di P_0. Inoltre si dicono vertici (risp. lati) *esterni* di P_0 quelle componenti connesse della intersezione tra la chiusura di P_0 in $\hat{\mathbb{C}}$ e il bordo $\partial\tilde{S}$ di $\tilde{S}$ in $\hat{\mathbb{C}}$, che si riducono (risp. *non* riducono) a un punto.

Si dice che il poligono P_0 (o uno qualsiasi dei poligoni P_j) è un *poligono* *fondamentale* per $\mathcal{D}$. Esso gode cioè delle seguenti proprietà.

Proposizione (4.4). *Sia S una superficie di Riemann. Sia $\mathcal{D} = Aut(\tilde{S}, p)$. Sia $z_0 \in \tilde{S}$ e $\mathcal{D}(z_0) = \{z_0, z_1, \dots\}$. Siano P_j, $j = 0, 1, \dots$ i poligoni definiti dalla (4.3). Si ponga inoltre per z, $z' \in \tilde{S}$, $z \sim z'$ se esiste $T \in \mathcal{D}$ con $T(z) = z'$. Allora*

(a) $z \sim z'$, z, $z' \in \overline{P}_0 \Rightarrow z$, $z' \in \partial\overline{P}_0$ *[e quindi $T(P_0) \cap T'(P_0) \neq \phi \Rightarrow T = T'$].*

(b) $z \in \tilde{S} \Rightarrow \exists\, z' \in \overline{P}_0$ *con* $z' \sim z$ $\left[\text{i.e.} \bigcup_{T \in \mathcal{D}} T(\overline{P}_0) = \tilde{S}\right]$.

(c) *L'insieme dei vertici di P_0 è discreto.*

(d) *Dato $z \in \overline{P}_0$ esistono $I = S_0, S_1, \dots, S_n \in \mathcal{D}$ tali che l'aperto Int $(S_0(\overline{P}_0) \cup S_1(\overline{P}_0) \cup \cdots \cup S_n(\overline{P}_0))$ è un intorno di z.*

Dim. Si ponga, come al solito, $T_j(z_0) = z_j$. Cosicché $T_j(P_0) = P_j$.

(a) Siano z, $z' \in \overline{P}_0$ con $T_j(z') = Z$. Essendo T_j una isometria si ha

$$d(z, z_j) = d(T_j(z'), T_j(z_0)) = d(z', z_0) \leqq d(z', z_j) = d(T_j(z'),$$

$$T_j(z_i)) = d(z, T_j(z_i)),\ \forall\, i \neq 0\ .$$

Quindi $z \in \overline{P}_j = T_j(\overline{P}_0)$. Dunque $z \in \overline{P}_j \cap \overline{P}_0$.

Ma, per costruzione $P_j \cap P_0 = \emptyset$. Ciò implica $z \in \partial\overline{P}_0$. Nello stesso modo si mostra che $z' \in \partial\overline{P}_0$.

(b) Dato $z \in \tilde{S}$, essendo $\mathcal{D}(z_0)$ discreto, esiste $z_j \in \mathcal{D}(z_0)$ con $d(z, z_j) = \min_i d(z, z_i)$. Allora $z \in \overline{P}_j$ e perciò $z' = T_j^{-1}(z) \in \overline{P}_0$.

(c) Un punto z è un vertice di $\overline{P}_0$ se z è equidistante da almeno tre punti di $\mathcal{D}(z_0)$. Essendo $\mathcal{D}(z_0)$ discreto, z è equidistante da al più un numero finito di punti di $\mathcal{D}(z_0)$. Questo mostra che l'insieme dei vertici è discreto.

(d) Se $z \in P_0$ non vi è nulla da dimostrare. Se $z \in \partial P_0$, sia $J = \{j \in \mathbb{Z}_+ : z \in \overline{P}_j\}$. Dalla (b) segue che Int $\left(\bigcup_{j \in J} \overline{P}_j\right)$ è un intorno di z. D'altro canto z è equidistante dai punti $z_j \in P_j$, $j \in J$. Per ciò che si è detto nella dimostrazione di (c), si ha dunque che J è finito. Ne segue che $\mathrm{Int}(\overline{P}_0 \cup \overline{P}_{j_1} \cup \overline{P}_{j_1})$ è un intorno di z.

Dalla proprietà (a), (b), (c) e (d) della Proposizione 4.4 si deducono formalmente le seguenti proprietà del poligono fondamentale

Proposizione (4.5). *Sia $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}(\tilde{S})$ un sottogruppo discontinuo. Sia $P_0 \subset \tilde{S}$ un poligono soddisfacente le condizioni (a), (b), (c) e (d) della Proposizione 4.4. Allora:*

(i) *I dati di P_0 sono equivalenti a coppie, i.e. se a è un lato di P_0 esiste un unico lato $b \neq a$ di P_0 con $T(a) = b$, $T \in \mathcal{D}$.*

(ii) *Il sottoinsieme $\Gamma \subset \mathcal{D}$ delle trasformazioni che identificano i lati a coppie è un sistema di generatori per $\mathcal{D}$.*

(iii) *Due lati concorrenti in un vertice possono essere equivalenti solo se il vertice è esterno.*

(iv) *$\overline{P}_0$ è compatto se e solo se $S = \tilde{S}/\mathcal{D}$ è compatta.*

(v) *Se S è compatta si può assumere che P_0 abbia $4g$ lati.*

Dim. (i) Dalla (a) e (b) della Prop. 4.4 segue che ogni lato a di P_i appartiene esattamente a due poligoni, P_0 e $T(P_0)$. Quindi $T^{-1}(a) \subset T^{-1}(\overline{P}_0) \cap T^{-1}T(\overline{P}_0) \subset \overline{P}_0$. Dunque $T^{-1}(a) = b \sim a$. Chiaramente non può essere $T^{-1}(a) = a$ altrimenti si avrebbe $a \subset T^{-1}(\overline{P}_0) \cap \overline{P}_0 \cap T(\overline{P}_0)$ e quindi dovrebbe essere $T^2 = I$, mentre la Prop. 2.13 ci dice che ciò è impossibile. Similmente si dimostra l'unicità di un tale b.

(ii) Sia $T \in \mathcal{D}$, $z \in P_0$ e $T(z) = z'$. Sia γ un cammino, in $\tilde{S}$, da z a z'. Sia $\Lambda = \{T \in \mathcal{D} : T(\overline{P}_0) \cap \gamma \neq \phi\}$. Dalla proprietà (d) e dalla compattezza di γ segue che Λ è finito. Sia $\Lambda = \{I = T_0, T_1, \ldots, T_k = T\}$. Per la (c) si può assumere che γ non contenga vertici dei $T_i(\overline{P}_0)$. Si può dunque assumere che $T_{i-1}(\overline{P}_0)$ e $T_i(\overline{P}_0)$, $i = 1, \ldots, k$, abbiamo un lato in comune.

Dunque $\overline{P}_0$ e $T_{i-1}T_i(\overline{P}_0)$ hanno un lato in comune. Dalla dimostrazione di (i) segue quindi che $S_i = T_{i-1}^{-1}T_i \in \Gamma$. D'altro canto $T = T_k = s_1 \circ \cdots \circ S_k$ e perciò T può esprimersi come prodotto di elementi di Γ.

(iii) Se $T(a) = b$ e $a \cap b = z_0$, allora $T(z_0) = z_0$. Ma $\mathcal{D}$ è discontinuo ne segue che z_0 è un vertice esterno.

(iv) Sia $\pi : \tilde{S} \to S/\mathcal{D}$. È immediato verificare che una successione $\{z_i\}$ in $\overline{P}_0$ converge se e solo se $\{\pi(z_i)\}$ converge. Ciò basta a dimostrare che $\overline{P}_0$ è compatto se e solo se $\tilde{S}/\mathcal{D}$ lo è.

(v) Segue con facilità dalle considerazioni svolte nel § del cap.

Esercizi

1. Sia $\mathcal{D} \cong \mathbb{Z}$, un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni di H, descrivere i possibili poligoni fondamentali. (Sugg: analizzare separatamente i casi in cui il generatore è iperbolico oppure è parabolico.)
2. Sia $\Lambda_n \subset \mathbb{C}$, il reticolo generato da 1 e $\tau = x + iy$,con $y > 0$ descrivere i poligoni fondamentali usando il metodo precedentemente illustrato. Quando questi coincidono con i casi noti?

5 Superficie di Riemann con dato rivestimento universale

Classificheremo ora la superficie di Riemann a seconda del loro rivestimento universale.

TEOREMA (5.1). *Sia S una superficie di Riemann, $\tilde{S}$ il suo rivestimento universale e sia $\mathcal{D} = Aut(\tilde{S}, p)$*

A) *se $\tilde{S} \cong \hat{\mathbb{C}}$ allora $S \cong \hat{\mathbb{C}}$ e $\mathcal{D} = \{id\}$.*

B) *Se $\tilde{S} = \mathbb{C}$ si hanno per S le seguenti possibilità:*

(i) $S \cong \mathbb{C}$, $\mathcal{D} = \{id\}$

(ii) $S \cong \mathbb{C} - \{0\}$, $\mathcal{D} = \{z \mapsto z + n\omega_1, n \in \mathbb{Z}, \omega_1 \neq 0\}$ *e*

(iii) $S \cong$ *Toro*, $\mathcal{D} = \{z \mapsto z + n_1\omega_1 + n_2\omega_2,\, n_i \in \mathbb{Z},\, Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0\}$

Dim. (A) è banale. (B) Supponiamo che $\mathcal{D} \neq \{id\}$. Dovendo essere $\mathcal{D}$ privo di punti fissi si ha che se $T \in \mathcal{D}$ allora $T(z) = z + \omega$. Si ha $\mathcal{D}(0) =$ (orbita di 0) $= \{\omega \in \mathbb{C} : T \in \mathcal{D} \text{ con } T(z) = z+\omega\}$. Chiaramente $\mathcal{D}(0)$ è uno $\mathbb{Z}$–*modulo discreto*. Infatti $\mathcal{D}(0)$ è discreto e ω, $\omega \in \mathcal{D}(0) \Rightarrow -\omega$, $\omega + \omega \in \mathcal{D}(0)$. Si fissi $\omega_1 \in \mathcal{D}(0)$ in modo tale che $|\omega_1| = \min_{\omega \in \mathcal{D}(0)} |\omega|$. Un tale ω_1 esiste essendo $\mathcal{D}(0)$ discreto.

Si presentano ora due casi; o $\mathcal{D}(0) = \{n\omega_1, n \in \mathbb{Z}\}$ e si è sul caso (ii) oppure esiste $\omega_2 \in \mathcal{D}(0) - \{n\omega_1, n \in \mathbb{Z}\}$. In questo secondo caso si potrà prendere ω_2 con minimo valore di assoluto. Facciamo vedere che allora $Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0$. Se così non fosse si avrebbe, per qualche n, $n < \omega_2/\omega_1 < n+1$ e perciò $0 < \omega_2/\omega_1 - n < 1$. Quindi $0 < |\omega_2 - n\omega_1| < |\omega_1|$. Ma allora $\omega_2 - n\omega_1 \in \mathcal{D}(0)$ e $|\omega_2 - n\omega_1| < |\omega_1|$ il che contraddice la definizione di ω_1. Non ci resta ora che far vedere che $\mathcal{D}(0) = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2; n_i \in \mathbb{Z}\}$. Essendo $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$, dato $\omega \in \mathbb{C}$ esistono λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$. Supponiamo che $\omega \in \mathcal{D}(0)$.

Siano m_1 e m_2 tali che $|\lambda_i - m_i| \leq \frac{1}{2}$. Sia $\omega' = \omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2$, $\omega' \in \mathcal{D}(0)$. Si ha $|\omega'| < \frac{1}{2}|\omega_1| + \frac{1}{2}|\omega_2| \leqq |\omega_2|$. La prima diseguaglianza è stretta essendo ω_1 e ω_2 indipendenti su $\mathbb{R}$. Per la definizione di ω_2 si deve quindi avere $\omega' = n_1\omega_1$. Quindi:

$$(\lambda_1 - m_1 - n_1)\omega_1 + (\lambda_2 - m_2)\omega_2 = 0$$

e perciò λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$.

Che i domini fondamentali siano quelli raffigurati è chiaro.

Osserviamo solamente che

Corollario (5.2). *Il rivestimento universale di una superficie compatta di genere $g > 1$ è il* disco.

Dimostriamo ora, dopo molta attesa, che ogni superficie di Riemann è triangolabile.

Teorema (5.3). *Ogni superficie di Riemann è triangolabile.*
Dim. Se $S = \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}, T =$ (toro) la triangolazione è data così:

Si può ora supporre che $\tilde{S} = D$. Supponiamo dapprima che S sia compatta sia P il suo poligono fondamentale.

Allora $\overline{P}$ è compatto e ha un numero finito di lati. Si triangoli $\overline{P}$ con triangoli geodetici in questo modo.

Questa non è ancora una triangolazione per S, dovendosi i lati di P identificarsi due a due. Si triangoli allora ogni triangolo con geodetiche in modo da *trisecare* i lati di

Poiché gli elementi $T \in \mathcal{D}$ che identificano lati equivalenti sono isometrie questa triangolazione di T è in effetti una triangolazione di S. Osserviamo che in questo modo si è ottenuta anche una triangolazione di D; infatti $D = \bigcup_{T \in \mathcal{D}} T(\overline{P})$. Indichiamo con $\{\Delta_i\}$ i triangoli di questa triangolazione di D e passiamo ad esaminare il caso in cui S non è compatta. Sia di nuovo P il poligono fondamentale per $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\tilde{S}, \tilde{S})$. Per ogni Δ_i, $\overline{\Delta}_i \cap \overline{P}$ è convesso e compatto. Quindi $\overline{\Delta}_i \cap \overline{P}$ è un poligono con un numero finito di vertici (i vertici di P non hanno punti di accumulazione in $\tilde{S}$, (4), Prop. 4.4). Sia $z_i \in \Delta_i \cap P$. Si congiunga z_i di vertici di $\Delta_i \cap P$ con segmenti geodetici.

Ora può succedere che quando si identificano i lati di P un vertice della triangolazione, così ottenuto, non corrisponde a nessun vertice. Per porre rimedio a ciò dati due lati equivalenti a, b vi saranno in a e b un numero finito di vertici della triangolazione. Sia $T(a) = b$ e sia z un vertice della triangolazione e supponiamo che $T(z)$ non sia un vertice. Poiché, per un i, $T(z) \in \overline{\Delta}_i \cap \overline{P}$, si può congiungere $T(z)$ a z_i con un segmento geodetico. In questo modo si ha una nuova triangolazione di P che ha $T(z)$ come vertice. Procedendo così si riesce a triangolare P e quindi S.

Esercizi

1. Dimostrare che una funzione olomorfa intera non costante assume tutti i valori con al più una eccezione.(Piccolo teorema di Picard)

2. Sia S una superficie di Riemann compatta di genere $g \geq 2$, dimostrare che il gruppo fondamentale $\pi_1(S, x)$ ha $2g$ generatori $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ e una sola relazione

$$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} \cdots \gamma_{2g-1} \gamma_{2g} \gamma_{2g-1}^{-1} \gamma_{2g}^{-1}$$