Capitolo 10

Il Teorema di Hodge

Una delle conseguenze fondamentali del teorema di decomposizione di Hodge è la identificazione degli spazi di coomologia di de Rham di una superficie di Riemann compatta con spazi di forme armoniche. Come vedremo nel prossimo capitolo, il teorema di decomposizione di Hodge per superfici non compatte è alla base sia del teorema di uniformizzazione che di fondamentali teoremi di esistenza per differenziali meromorfi su superfici di Riemann compatte. Strumento fondamentale nella dimostrazione del teorema di decomposizione di Hodgeè il lemma di Weyl che mostra come le soluzioni deboli dell'equazione di Laplace siano in effetti C^{∞}.

1 Forme differenziali armoniche

Sia S una superficie di Riemann. Denotiamo con il simbolo $\mathcal{E}^p(S)$ lo spazio delle p-forme differenziali complesse definite su S. Nei precedenti capitoli abbiamo definito i seguenti operatori

$$* : \mathcal{E}^p(S) \to \mathcal{E}^{2-p}(S)$$

$$- * d* = \delta : \mathcal{E}^{p+1}(S) \to \mathcal{E}^p(S)$$

$$\delta d + d\delta = \Delta : \mathcal{E}^p(S) \to \mathcal{E}^p(S)$$

Come abbiamo visto nel Capitolo 9, l' operatore "$*$" è definito a partire da una struttura riemanniana su S. Possiamo anche definirlo direttamente a partire da una struttura complessa (anche se, quando lo si fa, si introduce tacitamente una struttura riemanniana). Ricordiamo la costruzione dell'operatore "$*$" nel caso complesso. Innanzitutto l'operatore

$$* : \mathcal{E}^1(S) \to \mathcal{E}^1(S)$$

è definito nel modo seguente. Sia $\omega \in \mathcal{E}^1(S)$. Supponiamo che localmente $\omega = fdz + gd\bar{z}$. Si definisce: $*\omega = -ifdz + igd\bar{z}$ ed è immediato vedere che la definizione è ben posta. Dunque, localmente, l'operatore " $*$ " agisce sulle 1-forme differenziali come una "rotazione di 90 gradi":

$$*dx = dy \qquad * dy = -dx$$

mentre per le forme complesse si ha

$$*dz = -idz \qquad * d\bar{z} = id\bar{z}$$

Per costruire $* : \mathcal{E}^p(S) \to \mathcal{E}^{2-p}(S)$, con $p = 0, 2$, si parte da una 2-forma μ che ha la proprietà di essere espressa, in ogni carta locale, nella forma

$$\mu \underset{loc}{=} \lambda^2 dx \wedge dy = \frac{i}{2} \lambda^2 \, dz \wedge d\bar{z}$$

dove λ è una funzione C^∞ mai nulla e si pone :

$$*f = f\mu \in \mathcal{E}^2(S)\,, \qquad \text{se} \quad f \in \mathcal{E}^0(S)\,,$$

$$*\nu = \frac{\nu}{\mu} \in \mathcal{E}^0(S)\,, \qquad \text{se} \quad \nu \in \mathcal{E}^2(S)\,.$$

Ricordiamo come si costruisce la forma μ. Si parte da un ricoprimento localmente finito $S = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ costituito da carte locali. Si sceglie una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ relativa a questo ricoprimento e si pone

$$\mu = \frac{i}{2} \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha\,.$$

La 2-forma μ ha le proprietà richieste, perchè in un aperto U_β si ha

$$\mu_{|\,U_\beta} = \frac{i}{2} \left(\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha J_{\alpha\beta} \right) dz_\beta \wedge d\bar{z}_\beta = \frac{i}{2} \lambda_\beta^2 \, dz_\beta \wedge d\bar{z}_\beta\,,$$

dove $J_{\alpha\beta} = |dz_\alpha / dz_\beta|^2$. Si osservi che l' operatore "$*$" così definito è quello relativo alla metrica riemannniana per cui $ds^2 = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha (dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2)$.

Definiamo il classico operatore di Laplace Δ^{cl} ponendo

$$\Delta^{cl} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,.$$

Un semplice calcolo mostra che se $f \in \mathcal{E}^0$ allora:

$$\Delta f \underset{loc}{=} -\frac{1}{\lambda^2} \Delta^{cl} f \tag{1.1}$$

Definizione 1.1 *Una p-forma ω si dice cochiusa se $\delta\omega = 0$. Una p-forma ω si dice armonica se è sia chiusa che cochiusa: $d\omega = \delta\omega = 0$. lo spazio delle p-forme armoniche su S si denota con il simbolo $\mathcal{H}^p(S)$.*

Dalle definizioni segue che l'operatore "$*$" è *reale* (i.e. commuta con il coniugio). Poiché anche l' operatore di differenziazione è reale, si ha:

$$\overline{*\alpha} = *\overline{\alpha} \ , \quad \overline{\delta\alpha} = \delta\overline{\alpha} \ , \quad \overline{\Delta\alpha} = \Delta\overline{\alpha} \ .$$

Inoltre, per $\alpha \in \mathcal{E}^p(S)$, si ha:

$$* * \alpha = (-1)^p \alpha$$

L'operatore "$*$" permette di definire una applicazione bilineare hermitiana

$$\begin{gathered} \mathcal{E}^p(S) \times \mathcal{E}^{2-p}(S) \longrightarrow \mathcal{E}^2(S) \\ (\alpha\,, \beta) \mapsto \alpha \wedge *\overline{\beta} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Che l'applicazione sia bilineare hermitiana lo si vede localmente. Nei casi $p = 0, 2$ la verifica è banale. Se

$$\alpha \underset{loc}{=} f dz + g d\bar{z}\,, \qquad \beta \underset{loc}{=} h dz + k d\bar{z}\,,$$

allora

$$\alpha \wedge *\overline{\beta} \underset{loc}{=} i(f\bar{h} + g\bar{k}) dz \wedge d\bar{z} = 2(f\bar{h} + g\bar{k}) dx \wedge dy\,.$$

In particolare si ha

$$\alpha \wedge *\overline{\alpha} \underset{loc}{=} 2(|f|^2 + |g|^2) dx \wedge dy\,.$$

Là dove abbia senso e cioè quando l'integrale a destra è convergente, si pone

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_S \alpha \wedge *\overline{\beta}\,, \qquad ||\alpha||^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle \tag{1.3}$$

Chiaramente $\langle \quad , \quad \rangle$ determina una forma hermitiana definita positiva sullo spazio $\mathcal{E}^1_{comp}(S)$ delle 1-forme su S a supporto compatto.

Osservazione 1.2 *a) Se il supporto di α o quello di β è compatto, allora*

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle$$

$$\langle \Delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle \ .$$

b) Se il supporto di ω è compatto, allora $\omega \in \mathcal{H}^p(S) \Leftrightarrow \Delta\omega = 0$.
Dunque δ è l'aggiunto di d e Δ è autoaggiunto.

Dim. Dimostriamo la prima delle relazioni in a). Sia $\alpha \in \mathcal{E}^p_{comp}(S)$. Sia G una regione regolare contenente il supporto di α. Si ha

$$d(\alpha \wedge *\overline{\beta}) = d\alpha \wedge *\overline{\beta} + (-1)^p \alpha \wedge d * \overline{\beta} = d\alpha \wedge *\overline{\beta} - \alpha \wedge *\overline{\delta\beta}$$

Poiché la 1-forma $\alpha \wedge *\beta$ si annulla su ∂G, la prima delle relazioni in a) segue dal teorema di Stokes. La seconda relazione si dimostra nello stesso modo. Per quello che riguarda b), basta osservare che

$$\langle \Delta\omega, \omega\rangle = \langle d\delta\omega, \omega\rangle + \langle \delta d\omega, \omega\rangle = \langle \delta\omega, \delta\omega\rangle + \langle d\omega, d\omega\rangle = 0$$
$$\text{e quindi} \quad \Delta\omega = 0 \Leftrightarrow d\omega = \delta\omega = 0 \ .$$

Q.E.D.

Il risultato che vogliamo dimostrare è il seguente.

Teorema di Hodge 1.3 *Sia S una superficie di Riemann. Ogni 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(S)$, tale che $||\omega|| < \infty$, si decompone in modo unico in una somma*

$$\omega = \omega_h + df + \delta\mu \tag{1.4}$$

con

$$\omega_h \in \mathcal{H}^1(S) \ , \quad f \in \mathcal{E}^0(S) \ , \quad \mu \in \mathcal{E}^2(S) \ .$$

Inoltre tale decomposizione è ortogonale rispetto alla forma hermitiana $\langle \quad , \quad \rangle$. Nel caso compatto, *questa decomposizione può scriversi come*

$$\mathcal{E}^1(S) = \mathcal{H}^1(S) \oplus d\mathcal{E}^0(S) \oplus \delta\mathcal{E}^2(S) \ . \tag{1.5}$$

In generale, per gli spazi vettoriali dotati di prodotto hermitiano non degenere, come è per esempio lo spazio

$$\{\omega \in \mathcal{E}^1(S) \ : \ ||\omega|| < \infty\} \tag{1.6}$$

equipaggiato della forma $\langle \quad , \quad \rangle$, non vi sono buoni teoremi di decomposizione ortogonale. Questi teoremi, invece, sono tipici della teoria degli spazi di Hilbert. Ricordiamo che uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale complesso dotato di una forma bilineare hermitiana non degenere che sia completo rispetto alla norma definita da questa forma. Tipici esempi di spazi di Hilbert sono gli spazi L^2. Per esempio, se U è un aperto di $\mathbb{C}$, allora lo spazio

$$L^2(U) = \{f \ \text{ misurabile in } \ U \ : \ \int_U |f|^2 dxdy < \infty\}$$

munito della forma hermitiana $\langle f, g\rangle = \int_U f\bar{g}dxdy$, è uno spazio di Hilbert. Dunque la prima cosa da fare è quella di completare lo spazio 1.6.

Definizione 1.4 *Sia S una superficie di Riemann.*

a) Una 1-forma su S a coefficienti L^1_{loc} è una collezione

$$\omega = \{\omega_U = f_U dz_U + g_U d\bar{z}_U\}_{U \in \mathcal{U}}$$

dove $f_U, g_U \in L^1(U)$, dove $\mathcal{U}$ è una collezione di carte locali (U, φ_U) che ricoprono S e dove $\varphi_U^* \omega_U = \varphi_V^* \omega_V$, non appena $U \cap V \neq \emptyset$. Lo spazio vettoriale delle 1-forme su S a coefficienti L^1_{loc} si indica con il simbolo ${\mathcal{E}^1}_{L^1_{loc}}(S)$.

b) Lo spazio delle 1-forme su S a coefficienti L^2 è definito da

$${\mathcal{E}^1}_{L^2}(S) = \{\omega \in {\mathcal{E}^1}_{L^1_{loc}}(S) \;:\; ||\omega|| < \infty\}$$

c) In modo analogo si definiscono gli spazi ${\mathcal{E}^0}_{L^2}(S)$ e ${\mathcal{E}^2}_{L^2}(S)$.

Tre cose sono immediatamente chiare. La prima è che data una 1-forma $\omega = \{f_U dz_U + g_U d\bar{z}_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ in ${\mathcal{E}^1}_{L^2}(S)$ allora $f_U, g_U \in L^2(U)$. La seconda, che discende dalla prima, è che ${\mathcal{E}^1}_{L^2}(S)$, con la forma hermitiana 1.3, è uno spazio di Hilbert. La terza è che ${\mathcal{E}^1}_{L^2}(S)$ è il completamento di $\mathcal{E}^1(S)$ nella norma definita dal prodotto hermitiano 1.3.

*****

Richiamiamo ora alcuni risultati della teoria degli spazi di Hilbert. Sia H uno spazio di Hilbert con prodotto hermitiano $\langle \quad , \quad \rangle$. Ricordiamo innanzi tutto che un sottospazio vettoriale $F \subseteq H$ si dice un *sottospazio di* H se è F è *chiuso* in H. Si hanno le seguenti proprietà:

i) Dato un sottoinsieme $A \subseteq H$ e posto

$$A^\perp = \{\alpha \in H | \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \,,\ \forall \beta \in A\}$$

si ha $A \cap A^\perp = 0$.

ii) Se F è un sottospazio di H , allora anche $F^\perp$ è un sottospazio di H.

iii) Se F è un sottospazio di H, allora $H = F \oplus F^\perp$.

iv) Se F_1 e F_2 sono sottospazi ortogonali di H, allora $F_1 \oplus F_2$ è un sottospazio di H.

v) Se F_1 e F_2 sono sottospazi di H allora $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$. [1]

[1] L'unica proprietà non immediata è la iii). Dato $x \in H$ esiste un elemento $y \in \{x + F\}$ avente norma minima. Per dimostrare ciò, posto $\delta = \inf_{f \in F}\{||x+f||^2\}$ è sufficiente dimostrare che una successione $\{y_n\} \in \{x + F\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} ||y_n||^2 = \delta$ è di Cauchy. Infatti, essendo $\{x + F\}$ chiuso, l' elemento $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ è quello cercato. Daltro canto, essendo $y_n \in \{x + F\}$ anche $\frac{1}{2}(y_n + y_m)$ è in $\{x + F\}$. Dalla regola del parallelogramma segue che, se

*****

Nello spazio di Hilbert $\mathcal{E}^1_{L^2}(S)$ consideriamo i sottospazi

$$E = \overline{d\mathcal{E}^0_{comp}(S)\}}\,, \qquad E' = \overline{\delta\mathcal{E}^2_{comp}(S)\}}\ . \tag{1.7}$$

Dunque una 1–forma ω è in E se esistono funzioni a supporto compatto f_n tali che $\omega = \lim_{n\to\infty} df_n$. Da questa e dalla simile osservazione per E' segue che $E \perp E'$. Quindi ponendo $H = E^\perp \cap E'^\perp$ si ha

$$\mathcal{E}^1_{L^2}(S) = E \oplus E' \oplus H\ . \tag{1.8}$$

Osserviamo inoltre che estendendo l'operatore $*$ a E si ha

$$*E = E'\ . \tag{1.9}$$

Denotiamo con $P : \mathcal{E}^p(S) \to \mathcal{E}^q(S)$ uno degli operatori d, δ, Δ per cui rispettivamente $q = p+1$, $p-1$, p e con P^* uno degli operatori δ, d, Δ .Ferme queste notazioni abbiamo

Definizione 1.5 *Date $\alpha \in \mathcal{E}^p_{L^2}(S)$ e $\omega \in \mathcal{E}^q_{L^2}(S)$ si dice che $P\alpha = \omega$ debolmente e si scrive*

$$P\alpha \underset{deb}{=} \omega\,,$$

se si ha

$$\langle \alpha, P^*\varphi\rangle = \langle \omega, P^*\varphi\rangle\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{E}^q_{comp}(S)$$

La definizione acquista significato in virtù del lemma seguente.

Lemma 1.6 *Sia S una superficie di Riemann e sia P come nella definizione precedente. Siano $\alpha \in \mathcal{E}^p(S)$ e $\omega \in \mathcal{E}^q(S)$, allora $P\alpha = \omega \Leftrightarrow P\alpha \underset{deb}{=} \omega$*

$n, m > N_\epsilon$, allora

$$||\tfrac{1}{2}(y_n - y_m)||^2 = 2||\tfrac{1}{2}y_n||^2 + 2||\tfrac{1}{2}y_m||^2 - ||\tfrac{1}{2}(y_n + y_m)||^2 \le \tfrac{1}{2}(||y_n||^2 + ||y_m||^2 - 2\delta) < \epsilon\,.$$

Quindi $\{y_n\}$ è di Cauchy. Osserviamo che $y \in F^\perp$. Infatti, per ogni $f \in F$ e per ogni $t \in \mathbb{C}$, si ha $y + tf \in \{x + F\}$ e quindi: $||y||^2 \le ||y+tf||^2 = ||y||^2 + t\langle y, f\rangle + \overline{t\langle y, f\rangle} + |t|^2||f||^2$. Prendendo prima t reale positivo e poi reale negativo, si deduce che $Re(\langle y, f\rangle) = 0$. Passando a un t puramente immaginario si conclude che $\langle y, f\rangle = 0$. Poiché $x = x - y + y$, $x - y \in F$, $y \in F^\perp$ e $F \cap F^\perp = 0$, si ha $H = F \oplus F^\perp$, come si voleva. Si osservi che le proiezioni $p_F : H \to F$ e $p_{F^\perp} : H \to F^\perp$ definite da $p_F(x) = x - y$ e $p_{F^\perp}(x) = y$ sono lineari. Infatti si ha

$$p_F(af + bg) - ap_F(f) + bp_F(g) = p_{F^\perp}(af + bg) - ap_{F^\perp}(f) + bp_{F^\perp}(g) \ \in\ F \cap F^\perp = 0\,.$$

Dim. Poiché φ è a supporto compatto si ha $\langle \alpha, P^*\varphi \rangle = \langle P\alpha, \varphi \rangle$. Dunque $P\alpha \underset{deb}{=} \omega \Leftrightarrow \langle P\alpha - \omega, \varphi \rangle = 0$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{E}^q_{comp}(S)$. Basta osservare che $\langle \beta, \varphi \rangle = 0$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{E}^q_{comp}(S)$ implica $\beta \equiv 0$. Ciò è una immediata conseguenza del fatto che lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto è denso, nella topologia L^2, in quello delle funzioni C^∞. Q.E.D.

Ritorniamo ora alla decomposizione 1.8. Per descrivere H dobbiamo descrivere $E^\perp$ e $E'^\perp$.

Lemma 1.7 *Sia S una superficie di Riemann, allora si ha*

$$E^\perp = \{\alpha \in \mathcal{E}^1_{L^2}(S) \ : \ \ \delta\alpha = 0\,,\ deb\}$$

$$E'^\perp = \{\alpha \in \mathcal{E}^1_{L^2}(S) \ : \ \ d\alpha = 0\,,\ deb\}\ .$$

Dim. Per la 1.9, basta dimostrare solo la prima eguaglianza. Si ha $\alpha \in E^\perp \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 0$, $\forall\, \beta \in E$. Poiché ogni β è limite di $\{d\varphi_n\}$, con $\varphi_n \in \mathcal{E}^0_{comp}(S)$, ciò è equivalente a dire che $\langle \alpha, d\varphi \rangle = 0$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{E}^0_{comp}(S)$ ma questo, per definizione, vuol dire $\delta\alpha = 0$ debolmente.

Lemma 1.8 *Sia S una superficie di Riemann, allora*

$$\mathcal{E}^1(S) \cap E \subseteq d\mathcal{E}^0(S)\ , \quad \mathcal{E}^1(S) \cap E' \subseteq \delta\mathcal{E}^2(S)\ .$$

Dim. Anche qui basta dimostrare la prima affermazione. Sia $\alpha \in \mathcal{E}^1(S) \cap E$. Poiché $E^\perp \supset \{\varphi \in \mathcal{E}^1_{comp}(S) \ : \ \delta\varphi = 0\}$, si ha che,

$$\langle \alpha, \varphi \rangle = \int_S \alpha \wedge *\overline{\varphi} = 0\,, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{E}^1_{comp}(S)\,, \text{ con } \delta\varphi = 0\,.$$

Scrivendo $\psi = *\bar{\varphi}$ si ha che

$$\int_S \alpha \wedge \psi = 0$$

per ogni $\psi \in \mathcal{E}^1_{comp}(S)$ con $d\psi = 0$. Sia γ una curva semplice, chiusa e regolare a tratti. Prendendo, come nella sezione 1 del Capitolo 7, $\psi = \omega_\gamma$, si deduce che

$$\int_\gamma \alpha = 0$$

per ogni curva γ semplice, chiusa e regolare a tratti. Dal Lemma 1.3 del capitolo 7, discende che α è esatta. Q.E.D.

Esercizi

1. Sia M una superficie riemanniana dotata di una metrica conforme, dimostrare che $\langle\alpha, \beta\rangle = \langle *\alpha, *\beta\rangle$.

2. Sia M una superficie riemanniana dotata di una metrica conforme, dimostrare che $*E = E'$

3. Dimostrare che una 1− forma ω è armonica $\iff$ localmente è della forma $\omega = df$, con f funzione armonica (i.e. $\Delta f = 0$)

4. Determinare le forme armoniche sul toro T_2 con metrica $dx^2 + dy^2$.

2 Il Lemma di Weyl

In questo paragrafo dimostreremo il lemma di Weyl che è il fondamentale strumento per passare dalla decomposizione 1.8 alla decomposizione di Hodge. Abbiamo bisogno di alcuni strumenti elementari di analisi.

Definizione 2.1 *Sia U aperto in $\mathbb{C}$ e siano f, $g \in L^1(U)$. Si prolunghino f e g a tutto $\mathbb{C}$, ponendole eguali a zero in $\mathbb{C} \setminus U$. La convoluzione di f e g è la funzione*

$$(f \times g)(\zeta) = \int_{\mathbb{C}} f(z)g(\zeta - z)dxdy \qquad (z = x + iy)\,. \tag{2.1}$$

Tradizionalmente si denota la convoluzione col simbolo $*$. Nel nostro contesto ciò provocherebbe confusioni.

Elenchiamo le proprietà fondamentali della convuluzione nella seguente proposizione.

Proposizione 2.2 *Siano f, g, $h \in L^1(U)$, siano a, $b \in \mathbb{C}$. Sia $\varphi \in \mathcal{E}^0_{comp}(U)$. Sia $P = \sum_{i,j=0}^N f_{ij} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}$ un operatore differenziale a coefficienti C^∞, allora*
a) $f \times g \in L^1(U)$,
b) $f \times g = g \times f$,
c) $(f \times g) \times h = f \times (g \times h)$,
d) $(af + bg) \times h = af \times h + bg \times h$,
e) $f \times \varphi \in \mathcal{E}^0(U)$ e $P(f \times \varphi) = f \times P\varphi$,
f) se $f \times \varphi = 0$, per ogni $\varphi \in \mathcal{E}^0_{comp}(U)$, allora $f = 0$, q.o. (quasi ovunque).

Dim. La b) e la c) si dimostrano con un cambio di parametri. La d) è ovvia. La f) discende dal fatto che le funzioni C^∞ a supporto compatto sono dense in $L^1(U)$. Per quello che riguarda la a), poniamo $\zeta = \xi + i\eta$. Per il teorema di

Fubini e l'invarianza per traslazione della misura euclidea, si ha

$$
\begin{aligned}
||f \times g||_1 &= \int_{\mathbb{C}} \left| \int_{\mathbb{C}} f(z)g(\zeta - z)dxdy \right| d\xi d\eta \leq \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{C}} |f(z)g(\zeta - z)|dxdy \right) d\xi d\eta \\
&= \int_{\mathbb{C}} |f(z)|dxdy \left(\int_{\mathbb{C}} |g(\zeta - z)| \right) d\xi d\eta = ||f||_1 ||g||_1 \,.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Della e) dimostreremo solo che $f \times \varphi$ è continua. In effetti le dimostrazioni che $f \times \varphi$ è infinitamente differenziabile e che $P(f \times \varphi) = f \times P\varphi$, ricalcano completamente quella della continuità di $f \times \varphi$. Sia dunque $\{\zeta_n\}$ una successione in $\mathbb{C}$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} \zeta_n = \zeta \ ,$$

allora abbiamo che

$$
\begin{aligned}
|(f \times \varphi)(\zeta_n) - (f \times \varphi)(\zeta)| &= \left| \int_{\mathbb{C}} f(z)(\varphi(\zeta_n - z) - \varphi(\zeta - z))) \right| dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{C}} |f(z)| \, |\varphi(\zeta_n - z) - \varphi(\zeta - z)|dxdy \ .
\end{aligned}
$$

Essendo la funzione φ a supporto compatto, la sua estensione è ancora differenziabile e uniformemente continua e quindi

$$|\varphi(\zeta_n - z) - \varphi(\zeta - z)| < \epsilon \quad \text{se} \quad |\zeta_n - \zeta| < \delta \,.$$

Dunque

$$|(f \times \varphi)(\zeta_n) - (f \times \varphi)(\zeta)| < \varepsilon \|f\|_1 \ .$$

Q.E.D..

Osservazione 2.3 *Supponiamo che U sia limitato e sia $f \in L^p(U)$. Dalla diseguaglianza di Hölder si ottiene $||f||_1 \leq c||f||_p$, dove c è una costane positiva dipendente da U. Sia $\varphi \in \mathcal{E}^0(U)$. Con una leggera modifica della dimostrazione del punto a) della Proposizione precedente, si ottiene*

$$||\varphi \times f||_p \leq c||f||_p \,.$$

per una opportuna costante c.

Denotiamo con D_r il disco aperto di raggio r, poniamo $D_1 = D$ e fissiamo una funzione reale $\rho \in \mathcal{E}^0_{comp}(D)$ tale che

(i) ρ è funzione reale di $|z|$

(ii) $\int_D \rho(z)dxdy = 1$.

Chiaramente le funzioni

$$\rho_\epsilon(z) = (1/\epsilon^2)\rho(z/\epsilon) \tag{2.3}$$

hanno le stesse proprietà e il supporto contenuto in D_ϵ.

Lemma 2.4 *Sia $f \in L^1(D)$ e $\varphi \in \mathcal{E}^0_{comp}(D_{1-\epsilon})$, allora*

$$\langle \rho_\epsilon \times f, \varphi \rangle_{D_{1-\epsilon}} = \langle f, \rho_\epsilon \times \varphi \rangle_D. \tag{2.4}$$

Dim. Poiché, fissato $\zeta \in D_{1-\epsilon}$, la funzione $\rho_\epsilon(\zeta - z)$ svanisce non appena $z \notin D$, si ha, per il teorema di Fubini,

$$\langle \rho_\epsilon \times f, \varphi \rangle_{D_{1-\epsilon}} = (i/2)\int_{D_{1-\epsilon}} (\rho_\epsilon \times f)(\zeta)\overline{\varphi(\zeta)} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} =$$

$$(i/2)^2 \int_{D_{1-\epsilon}} \int_D f(z)\rho_\epsilon(\zeta - z)\overline{\varphi(\zeta)} dz \wedge d\bar{z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} =$$

$$(i/2)\int_D f(z)\overline{(\rho_\epsilon \times \varphi)(z)} dz \wedge d\bar{z} = \langle f, \rho_\epsilon \times \varphi \rangle_D.$$

Q.E.D.

Notazione 2.5 *Poiché le considerazioni che si svolgono in questa sezione sono locali, poniamo per semplicità, e solo in questa sezione, $\Delta = \Delta^{cl}$. Questo vuol dire che poniamo, formalmente, $\lambda = i$, nella (1.1). Dunque, in questa sezione $\Delta f = *d * df$ e $\Delta f dx \wedge dy = d * df$.*

Ricordiamo che una funzione u definita in un aperto di $U \subset \mathbb{C}$ si dice *armonica* in U, se $\Delta u = 0$.

Lemma 2.6 *i) Sia $\varphi \in \mathcal{E}^0(D)$ armonica, allora $\rho_\epsilon \times \varphi = \varphi$ in $D_{1-\epsilon}$.*
ii) Sia $f \in L^2(D)$, allora $\lim_{\varepsilon \to 0} ||f - \rho_\epsilon \times f||_{D_{1-\epsilon}} = 0$.

Dim. i) Per ogni $z \in D_{1-\epsilon}$ e $r < \epsilon$ si ha, per il teorema del valor medio, che

$$2\pi\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \varphi(z + re^{i\theta}) d\theta\,. \tag{2.5}$$

Quindi

$$\begin{aligned} (\rho_\epsilon \times \varphi)(\zeta) = \int_{D_\epsilon} \rho_\epsilon(z)\varphi(\zeta + z) dx dy \quad &= \int_{D_\epsilon} \rho_\epsilon(r)\varphi(\zeta + re^{i\theta}) r dr d\theta \\ = \quad 2\pi\varphi(\zeta)\int_0^\epsilon \rho_\epsilon(r) r dr \quad &= \varphi(\zeta). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dimostriamo ii). Poiché le funzioni in $\mathcal{E}^0_{comp}(D)$ sono dense in $L^2(D)$, fissato $\delta > 0$, si può scrivere $f = f_0 + f_1$ con $f_0 \in \mathcal{E}^0_{comp}(D)$ e $||f_1|| < \delta$ in norma L^2. Si osservi che, essendo D di misura finita, $\rho_\epsilon \times f$, che è in $L^1(D)$ è automaticamente in $L^2(D)$. Si ha allora

$$||f - \rho_\epsilon \times f||_{D_{1-\epsilon}} = ||f_0 + f_1 - \rho_\epsilon \times (f_0 + f_1)||_{D_{1-\epsilon}} \leq$$

$$||f_0 - \rho_\epsilon \times f_0||_{D_{1-\epsilon}} + ||f_1||_{D_{1-\epsilon}} + ||\rho_\epsilon \times f_1||_{D_{1-\epsilon}} .$$

Per uniforme continuità si ha, per ϵ opportuno,

$$\left| f_0(\zeta) - \int_{\mathbb{C}} f_0(\zeta - z)\rho_\epsilon(z)dx \wedge dy \right| \leq$$

$$\int_{\mathbb{C}} |f_0(\zeta) - f_0(\zeta - z)| \, \rho_\epsilon(z)dx \wedge dy < \delta.$$

Inoltre, per l' osservazione 2.3, si ha, sempre per un opportuno ϵ,

$$||\rho_\epsilon \times f_1||_{D_{1-\epsilon}} < \delta \, .$$

Q.E.D.

Siamo ora in grado di dimostrare il Lemma di Weyl.

Lemma di Weyl 2.7 *Sia $f \in L^2(D)$ e sia*

$$\Delta f \underset{deb}{=} 0.$$

Allora $f \in \mathcal{E}^0(D)$ (nel senso che f coincide, quasi ovunque in D, con una funzione C^∞).

Dim. Per ogni $\varphi \in \mathcal{E}^0_{comp}(D_{1-\epsilon})$ si ha

$$0 = \langle f, \Delta(\rho_\epsilon \times \varphi)\rangle_D = \langle f, \rho_\epsilon \times \Delta\varphi\rangle_D = \langle \rho_\epsilon \times f, \Delta\varphi\rangle_{D_{1-\epsilon}} . \tag{2.7}$$

Quindi la funzione $\rho_\epsilon \times f$ è armonica in $D_{1-\epsilon}$ e sappiamo che, per ϵ che tende a 0, essa converge a f in norma L^2. Dall' armonicità di $\rho_\epsilon \times f$ segue che, per ogni $\delta > 0$,

$$\rho_\delta \times \rho_\epsilon \times f = \rho_\epsilon \times f \, . \tag{2.8}$$

in $D_{1-(\epsilon+\delta)}$. Poiché $\rho_\delta \times \rho_\epsilon = \rho_\epsilon \times \rho_\delta$, si ottiene

$$\rho_\epsilon \times f = \rho_\delta \times f \tag{2.9}$$

in $D_{1-(\epsilon+\delta)}$. Dunque, per δ che tende a zero, $\rho_\delta \times f$ converge a $\rho_\epsilon \times f \in \mathcal{E}^0(D_{1-\epsilon})$. D'altro canto sappiamo che, per δ che tende a zero, $\rho_\delta \times f$ tende a f in $D_{1-\epsilon}$ nella norma L^2. Ma allora $f = \rho_\epsilon \times f$ quasi ovunque in $D_{1-\epsilon}$. Dunque $f \in \mathcal{E}^0(D_{1-\epsilon})$ per ogni ϵ e quindi $f \in \mathcal{E}^0(D)$. Q.E.D.

Dimostriamo ora un altro risultato di cui avremo bisogno.

Teorema 2.8 *Sia $\varphi \in \mathcal{E}^0_{comp}(D)$, allora esiste una funzione $\psi \in \mathcal{E}^0(D)$ tale che $\Delta\psi = \varphi$.*

Dim. Sia $\gamma(z) = \log|z|$, poniamo $2\pi\psi = \gamma \times \varphi$. Dobbiamo dimostrare che $\Delta\psi(\zeta) = \varphi$. Per ogni $\zeta \in D$ si ha

$$\Delta(\gamma \times \varphi) = \gamma \times \Delta\varphi = \int_D \log|z|\Delta\varphi(\zeta + z)\ dxdy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D-D_\varepsilon} \log|z|\Delta\varphi(\zeta+z)\ dxdy + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\varepsilon} \log|z|\Delta\varphi(\zeta+z)\ dxdy$$

Il secondo limite è senz'altro uguale a 0, poichè $\Delta\varphi$ è limitato in D_ε e $\log|z|\ dxdy = (\log\rho)\rho\, d\rho\, d\theta$. Osserviamo che in $D - D_\varepsilon$, $\log|z|$ è C^∞, e si ha $\Delta\log|z| = 0$. Dunque, ricordando la notazione (2.5) e usando il fatto che $\alpha\wedge *\beta = \beta\wedge *\alpha$, si ottiene

$$-\log|z|\Delta\varphi(\zeta+z)\ dxdy = d(\log|z| * d\varphi(\zeta+z) - \varphi(\zeta+z) * d\log|z|)\ .$$

Dunque

$$\int_{D-D_\varepsilon} \log|z|\Delta\varphi(\zeta+z)\ dxdy =$$

$$= -\int_{\partial D_\varepsilon} \log|z| * d\varphi(\zeta+z) + \int_{\partial D_\varepsilon} \varphi(\zeta+z) * d\log|z|$$

Il bordo di D non interviene perché φ è a supporto compatto. Il primo integrale nel lato destro dell'eguaglianza di sopra tende a zero per $\varepsilon \to 0$ essendo del tipo

$$\int_{\partial D_\varepsilon} f(\theta,\varepsilon)\varepsilon\log\varepsilon\, d\theta.$$

Per quello che riguarda il secondo integrale, si osservi che, posto $z = \varepsilon e^{i\theta} \in \partial D_\varepsilon$ si ha $dz = i\varepsilon\, e^{i\theta} d\theta$ e quindi

$$*d\log|z| = *d\left(\frac{1}{2}\ \log z + \frac{1}{2}\ \log\overline{z}\right) = *\left(\frac{1}{2}\ \frac{dz}{z}\ + \frac{1}{2}\ \frac{d\overline{z}}{\overline{z}}\right) = d\vartheta\ .$$

In definitiva

$$\Delta(\gamma\times\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D_\varepsilon} \varphi(\zeta+\varepsilon\, e^{i\theta})d\theta = 2\pi\varphi(\zeta)\ .$$

Q.E.D.

Esercizi

1. (Teorema della media) Sia $\varphi \in \mathcal{E}^0(D)$ armonica, verificare che per ogni punto $z \in D_\epsilon(z) \subset D$ si ha

$$\varphi(z) = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z + \epsilon e^{i\theta}) d\theta$$

2. Sia $\varphi \in \mathcal{E}^0_{comp}(D)$, verificare che esiste una funzione $\psi \in \mathcal{E}^0(D)$ tale che $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\psi) = \varphi$.

3 Teorema di Hodge

Facciamo ora vedere come il teorema di Hodge si riduca al "Lemma di Weyl". Per ottenere il teorema di decomposizione delle 1- forme differenziali abbiamo bisogno dei seguenti risultati.

Proposizione 3.1 *Sia S una superficie di Riemann. Sia $\alpha \in \mathcal{E}^1_{L^2}(S)$. Si assuma che*

$$d\alpha \underset{deb}{=} 0\,, \qquad \delta\alpha \underset{deb}{=} 0\,.$$

Allora $\alpha \in \mathcal{E}^1(S)$.

Dim. La questione è locale. Supponiamo che, in una carta locale U, si abbia $\alpha = pdx + qdy$. Se otterremo che

$$\Delta p \underset{deb}{=} 0\,, \qquad \Delta q \underset{deb}{=} 0\,, \tag{3.1}$$

allora la proposizione sarà una conseguenza del lemma di Weyl. Per ogni $f \in \mathcal{E}^0_{comp}(U)$ poniamo $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = h$. Si ha

$$0 = \langle \alpha, dg \rangle = \int_U \alpha \wedge * \overline{dg} = \int_U \left(p \overline{\frac{\partial g}{\partial x}} + q \overline{\frac{\partial g}{\partial y}} \right) dx \wedge dy. \tag{3.2}$$

e posto $\omega = h\lambda^2 dx \wedge dy$

$$0 = \langle \alpha, \delta\omega \rangle = -\int_U \alpha \wedge \overline{dh} \ = -\int_U \left(p\frac{\overline{\partial h}}{\partial y} - q\frac{\overline{\partial h}}{\partial x}\right) dx \wedge dy. \tag{3.3}$$

Sottraendo si ottiene

$$0 = \langle \alpha, dg - \delta\omega \rangle = \int_U \left(p \left(\frac{\overline{\partial g}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial h}}{\partial y} \right) + q \left(\frac{\overline{\partial g}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial h}}{\partial x} \right) \right) dx \wedge dy = \langle p, \Delta f \rangle. \tag{3.4}$$

Dunque $\Delta p = 0$ debolmente e quindi, per il lemma di Weyl, p è C^∞. Simili considerazioni, applicate a $*\alpha$, dimostrano che anche q è C^∞.

Lemma 3.2 *Sia S una superficie di Riemann e sia $\omega \in \mathcal{E}^1(S)$, allora localmente in una carta U, ω ammette un'unica decomposizione*

$$\omega_{|U} = df + \delta\nu$$

con, $f \in \mathcal{E}^0(U)$, $\nu \in \mathcal{E}^2(U)$.

Dim. Sia $\omega \in \mathcal{E}^1(S)$. Restringendo eventualmente la carta locale, possiamo assumere che ω sia a supporto compatto. Sia

$$\omega = p(z)dz + q(z)d\overline{z},$$

allora anche p e q hanno supporto compatto, inoltre

$$d\omega = (-\partial p(z)/\partial\overline{z} + \partial q(z)/\partial z) dz \wedge d\overline{z} = g(z) dz \wedge d\overline{z}.$$

Per il Teorema (2.7) esiste $\psi \in \mathcal{E}^0(D)$ tale che

$$\Delta\psi = g\,,$$

posto $\nu = \psi\lambda^2 dx \wedge dy$, si ha

$$d\omega = \Delta\nu = d\delta\nu, \quad \text{e quindi} \quad d(\omega - \delta\nu) = 0.$$

Allora $\omega - \delta\nu$ è una forma chiusa nel disco e dunque esatta. Quindi

$$\omega = df + \delta\nu\ .$$

Q.E.D.

Ora siamo in grado di dimostrare il Teorema di Hodge 1.3.

Dim. Sia $\omega \in \mathcal{E}^1(S) \cap \mathcal{E}^1_{L^2}(S)$. In virtù della decomposizione 1.8 si ha

$$\omega = \omega_h + \alpha + \beta\ , \quad \omega_h \in H\ , \quad \alpha \in E\ , \quad \beta \in E'\ .$$

Dal Lemma (1.7) e dal fatto che $H = E^{\perp} \cap E'^{\perp}$ si ha

$$d\omega_h \underset{deb}{=} 0\,, \qquad \delta\omega_h \underset{deb}{=} 0\,,$$

e quindi, per il Lemma di Weyl, $\omega_h \in \mathcal{H}^1(S)$. Inoltre, sempre per il Lemma1.7

$$d\alpha \underset{deb}{=} 0\,, \qquad \delta\beta \underset{deb}{=} 0\,.$$

Dal lemma precedente segue che, localmente,

$$\omega_h + \alpha + \beta \underset{loc}{=} dg + \delta\nu$$

con g e ν entrambe C^∞. Poniamo

$$\varphi = \omega_h + \alpha - dg = \delta\nu - \beta, \tag{3.5}$$

Poiché $d\varphi = d(\omega_h + \alpha - dg) = 0$, debolmente, e $\delta\varphi = \delta(\delta\nu - \beta) = 0$, debolmente, la Proposizione 3.1, ci dice che φ è C^∞. Ma allora anche α e β sono localmente, e quindi globalmente, differenziabili. Possiamo quindi concludere, per il Lemma 1.8, che $\alpha = df$, $f \in \mathcal{E}^0(S)$ e $\beta = \delta\mu$, $\mu \in \mathcal{E}^2(S)$.

Q.E.D.

Terminiamo la sezione dimostrando la seguente, importante conseguenza del teorema di decomposizione di Hodge.

Teorema 3.3 *(Hodge) Sia S una superficie di Riemann* compatta *allora* $\mathcal{H}^1(S) \cong H^1_{dR}(S)$ *Dunque, ogni classe di coomologia di de Rham possiede un* unico *rappresentante armonico.*

Dim. Nel caso compatto $\mathcal{E}^1(S) = \mathcal{E}^1(S) \cap \mathcal{E}^1_{L^2}(S)$, quindi, per il teorema di decomposizione, $\mathcal{E}^1(S) = \mathcal{H}^1(S) \oplus d\mathcal{E}^0(S) \oplus \delta\mathcal{E}^2(S)$. Inoltre si ha

$$\mathcal{H}^1(S) \oplus d\mathcal{E}^0(S) \subset Z^1_{dR}(S) \subset \mathcal{E}^1(S) \cap E'^{\perp} = \mathcal{H}^1(S) \oplus d\mathcal{E}^0(S)\ .$$

Quindi

$$Z^1_{dR}(S) = \mathcal{H}^1(S) \oplus d\mathcal{E}^0(S) \quad \text{e perciò} \quad H^1_{dR}(S) \cong \mathcal{H}^1(S)\ .$$

Esercizi

1. Dimostrare che in una superficie di Riemann compatta il rappresentante armonico di una classe di coomologia ha norma minima.

4 Forme armoniche e forme olomorfe

Definizione 4.1 *Una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(S)$ si dice olomorfa se $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(S)$ e $\overline{\partial}\omega = 0$. Si pone $H^{1,0}(S) = \{1$–forme olomorfe$\}$. Una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(S)$ si dice antiolomorfa se $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(S)$ e $\partial\omega = 0$. Si pone $H^{0,1}(S) = \{1$– forme antiolomorfe$\}$.*

Chiaramente $H^{0,1}(S) = \overline{H^{1,0}(S)}$.

Proposizione 4.2 *Sia $\omega \in \mathcal{E}^1(S)$. Allora*

(i) $\omega \in H^{1,0}(S) \Leftrightarrow \omega \underset{loc}{=} df$ *e* $\partial\overline{f} = 0$

(ii) $\omega \in H^{1,0}(S) \Leftrightarrow d\omega = 0$ *e* $*\omega = -i\omega$

(iii) $\mathcal{H}^1(S) = H^{1,0}(S) \oplus H^{0,1}(S)$.

Dim. (i) $\omega \in H^{1,0}(S) \Rightarrow \omega \underset{loc}{=} f dz$ e $\overline{\partial}\omega = 0 \Rightarrow \omega \underset{loc}{=} f dz$ e $\overline{\partial} f = 0$. Il viceversa è ovvio.
(ii) Da (i) segue che $\omega \underset{loc}{=} f dz$ e $\overline{\partial} f = 0$. Quindi $*\omega = *\partial f = *\frac{\partial f}{\partial z}\, dz = \frac{\partial f}{\partial z} * dz = -i\frac{\partial f}{\partial z}\, dz = -i\omega$. D'altro canto $d\omega = \overline{\partial}\omega = 0$ ($\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(S)$). Il viceversa è simile.
(iii) Dimostriamo che $H^{1,0}(S) \subset \mathcal{H}^1(S)$. Sia $\omega \in H^{1,0}(S)$, allora

$$d\omega = 0 \quad \text{e} \quad \delta\omega = *d * \omega = - * d(-i\omega) = *d\omega = 0\ .$$

Ora se una forma è armonica anche la sua coniugata lo è ($\overline{\delta} = \delta$, $\overline{\delta} = d$), quindi anche $H^{0,1}(S) \subset \mathcal{H}^1(S)$. Si osservi ora che se φ (e quindi $\overline{\varphi}$) $\in \mathcal{H}^1(S)$ si ha $\varphi + i * \varphi \in H^{1,0}(S)$ (questo segue immediatamente dalla (ii)). A questo punto basterà osservare che

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\,(\varphi + i * \varphi) + \overline{\tfrac{1}{2}\,(\overline{\varphi} + i * \overline{\varphi})} \in H^{1,0}(S) \oplus H^{0,1}(S)\ .$$

Q.E.D.