AUTOVALUTAZIONE. a.a. 21/22.
Prova scritta del 24/11/21

Esercizio 1. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (2, 0, -1, 1), v_2 = (1, 1, 2, 0), v_3 = (-3, 1, 4, -2), v_4 = (2, 0, -k, 1)$$

Determinare la dimensione dello spazio $W = Span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
Scrivere un' applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $ImT = Span\{v_1, v_2, \}$ (ovviamente non è univocamente determinata). Una tale T è iniettiva?

Soluzione 1. ordiniamo i vettori e procediamo all' eliminazione di Gauss dei vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -k & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & -k-4 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k+1 & 0 \end{vmatrix}$$

Quindi la dimensione di W è 3 per $k \neq 1$, 2 per $k = 1$.
Inoltre basta dare l' applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ su una base di $\mathbb{R}^3$.

$$T(e_1) = v_1, \;\; T(e_2) = v_2, \;\; T(e_3) = 0.$$

Esercizio 2. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (0, 2, -1)$$

Verificare che v_1, v_2, v_3 formano una base.
Descrivere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che

$$T(v_1) = v_2 - v_3, \; T(v_2) = v_2, \; T(v_3) = T(v_1 - v_2)$$

Descrivere $KerT$ e ImT.
Determinare autovettori e autovalori di T (FACOLTATIVO)

Soluzione 2. ordiniamo i vettori e procediamo all' eliminazione di Gauss dei vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (0, 2, -1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{vmatrix}$$

Quindi sono una base.
Inoltre

$$T(v_1) = v_2 - v_3, \; T(v_2) = v_2, \; T(v_3) = T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = -v_3.$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base v_1, v_2, v_3 risulta essere

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Allora

$$ImT = Span(v_2, v_3), \quad KerT = Span(v_1)$$

La matrice A è triangolare inferiore, allora gli autovalori sono sulla diagonale.

Gli autospazi sono

$$V_1 = Span(v_2),\ V_{-1} = Span(v_3),\ V_0 = KerT = Span(v_1 - v_2 - v_3).$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{C}_2[t] \to \mathbb{C}_2[t]$ data da

$$p(t) \to (t^2+1)p''(t) - 2tp'(t) + 2p(t)$$

Verificare che f è lineare
Descrivere $Kerf$ e Imf.
Determinare autovalori di f
Verificare se f diagonalizza (FACOLTATIVO)

Soluzione 3.

$$f(p(t)+q(t)) = (t^2+1)(p''(t)+q''(t)) - 2t(p'(t)+q'(t)) + 2(p(t)+q(t)) =$$
$$(t^2+1)p''(t) - 2tp'(t) + 2p(t) + (t^2+1)q''(t) - 2tq'(t) + 2q(t) = f(p(t)) + f(q(t)).$$

$$f(ap(t)) = (t^2+1)ap''(t) - 2tap'(t) + 2ap(t) = af(p(t)).$$

Fissata la base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ si ha

$$f(1) = 2,\ \ f(t) = 0,\ \ f(t^2) = 2(t^2+1) - 4t^2 + 2t^2 = 2$$

Quindi la matrice associata all'applicazione è

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Allora abbiamo

$$Kerf = Span(t, t^2 - 1),\ Imf = Span(1).$$

Gli autovalori sono $2, 0$. L'applicazione diagonalizza, perché la molteplicità algebrica dell'autovalore 0 è uguale alla molteplicità geometrica. Questa è $2 = dimV_0 = dimKerf$.