1 Esercizio: S compatta $g(S) \geq 1$.

Dati $P, Q \in S$, $P \neq Q$ $D \in Div(S)$ $\Rightarrow$

D e $D+P-Q$ non sono equivalenti

Soluzione $D \sim D+P-Q \Rightarrow \exists (f)$ t.c. $(f)+D = D+P-Q$.

$(f) = P-Q \Rightarrow f : S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ è 1-1.

Isomorfismo analitico $\Rightarrow S$ ha genere 0.

2 Esercizio: Verificare che su $\mathbb{C}/\Lambda$ toro complesso ogni divisore canonico è principale.

Sol $g(\mathbb{C}/\Lambda) = 1$. $\omega = dz$.

$\varphi \in \Omega^1_{mero}(\mathbb{C}/\Lambda)$ $\varphi = f\,dz$. $(\varphi) = (f)$

3 Esercizio $\hat{\mathbb{C}}$ tutti i divisori dello stesso grado sono linearmente equivalenti

Sol $\deg D = \deg D'$ $\deg(\underbrace{D-D'}_{E}) = 0$

$E = \sum_i n_i P_i - \sum_j m_j Q_j$ $n_i, m_j > 0$. Supporto disgiunti

Supponiamo che $P_i, Q_i \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow \sum_i n_i = \sum_j m_j$

$\Rightarrow f = \dfrac{\prod (z-p_i)^{n_i}}{\prod (z-q_j)^{m_j}}$ $D - D' = (f)$.

Caso in cui $P_1 = \infty$. allora $f = \dfrac{\prod_{i\geq 2} (z-p_i)^{n_i}}{\prod (z-q_j)^{m_j}}$ è

la funzione cercata.

~~Corollario X superficie di Riemann compatta di genere $g \Rightarrow$~~

~~D con $\deg D \geq 2g+1$ è molto ampio.~~

~~i.e. $\varphi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^{d-g}$ è un'immersione regolare.~~

Teorema di Riemann-Roch. : Sia X una superficie di Riemann compatta di genere g. Sia D un divisore su X. Allora gli spazi $\mathcal{L}(D)$ e $I(D)$ sono di dim finita e dette $\ell(D)$ e $i(D)$ le loro dimensioni si ha.

$$\ell(D) - i(D) = \deg D - g + 1$$
$$\ell(D) - \ell(K-D) = \deg D - g + 1$$

Conseguenza banale; Tutte le superfici di Riemann compatte di genere 0 sono analiticamente isomorfe a $\hat{\mathbb{C}}$

Infatti in S presi $P \neq Q$ $D = P - Q$ $\Rightarrow \ell(D) = 1$ $\Rightarrow$.

$(f) + D \geq 0$ $\Rightarrow (f) + D = 0$ $(f) = -D$ $f : S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ isomorfismo analitico.

<u>Dim</u> del Teorema. Assumiamo D effettivo, i.e $D \geq 0$.

$D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i$ $n_i > 0$. Sia z_i una coordinata locale intorno a p_i t.c. $z_i(p) = 0$, i.e $p_i \in U_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{C}$, $p_i \longrightarrow 0$ parametro z_i

Code di Laurent.

$$P_D = \left\{ (F_1 \dots F_k) \;/\; F_i = \frac{a^i_{-n_i}}{z_i^{n_i}} + \dots + \frac{a^i_{-1}}{z_i} \quad a^i_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Dim $P_D = \deg D$.

$f \in \mathcal{L}(D) \longrightarrow P_D(f)$ code di Laurent di f intorno ai punti p_i

Se $P_D(f) = 0 \Rightarrow f$ è regolare (olomorfa in X) $\Rightarrow f = c$.

$$\Phi : \mathcal{L}(D) \longrightarrow P_D$$
$$f \longrightarrow P_D(f) \qquad \text{nucleo} = \mathbb{C}.$$
$$\Phi : \mathcal{L}(D)/\mathbb{C} \longrightarrow P_D$$

Pertanto $\dim L(D) < \infty$.

Consideriamo l'applicazione bilineare

$$P_D \times \Omega^1(X) \xrightarrow{Res} \mathbb{C}$$

$$(F_1 \dots F_k , \omega) \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} Res_{p_i} F_i \omega .$$

Da dimostrare: induce un'applicazione bilineare non degenere.

$$P_D/(\mathcal{L}(D)/_{\mathbb{C}}) \times \Omega^1(X)/_{I(D)} \xrightarrow{Res} \mathbb{C} .$$

Se vero

$$\deg D - \ell(D) + 1 = g - i(D)$$ questo è Riemann Roch!!

Da verificare

(1) Assegnato $\omega \in \Omega^1(X)$ $\sum_{i=1}^{k} Res_{p_i} F_i \omega = 0$ $\forall (F_1 \dots F_k) \in P_D \iff \omega \in I(D)$

(2) Dato $(F_1 \dots F_k) \in P_D$ si ha $\sum_i Res_{p_i} F_i \omega = 0$ $\forall \omega \in \Omega^1(X)$

$\iff (F_1 \dots F_k) = \Phi(f)$ con $f \in \mathcal{L}(D)$.

Dim(1) Se $(\omega) = (\omega)_0 \geq D \implies \sum_i Res_{p_i} F_i \omega = 0$

Viceversa supponiamo $\sum_i Res_{p_i} F_i \omega = 0$ $\forall (F_1 \dots F_k)$ allora ω deve avere in p_1 uno zero di ordine almeno n_1 e così via. quindi $(\omega) \geq D$.

(2) Un'implicazione è immediata. Se $(F_1 \dots F_k) = \Phi(f)$

$$\sum_{i=1}^{k} Res_{p_i} F_i \omega = \sum_i Res_{p_i} f \omega = \sum_{p \in X} Res_p f\omega = 0 .$$

Quindi per D effettivo "basta dimostrare"

Teorema Sia $D = \sum_i n_i P_i$ effettivo su X. Sia $(F_1 \dots F_k) \in P_D$ se $\sum Res_{p_i} F_i \omega = 0$ $\forall \omega \in \Omega^1(X)$ allora esiste $f \in \mathcal{L}(D)$ che ha in p_i parte principale uguale a F_i

Lo studio di questo Teorema può essere ricondotto a un teorema di esistenza di differenziali meromorfi:

Teorema Sia $p \in X$ z coordinate locale intorno a $z(p)$ k intero ≥ 1 allora esiste $\varphi \in \Omega^1_{mero}(X)$ t.c.
1) φ olomorfo in $X - \{p\}$ 2 $\varphi - d\left(\frac{1}{z^k}\right)$ è olomorfo intorno a p.

Dim: $\lambda \equiv 1$ intorno a p. (e poi va a zero)

$\psi = d\left(\frac{\lambda}{z^k}\right) \in \mathcal{E}^1_{comp}(X_p)$ (1 forme a supp compatto)

$\psi - i*\psi$ è $C^\infty(X)$ perché $*d\left(\frac{1}{z^k}\right) = -i\, d\left(\frac{1}{z^k}\right)$

per la compattezza abbiamo che:

$$\psi - i*\psi = df + *dg + \omega_h \qquad (g = -*\omega)$$

$$\mu = \psi - df = i*\psi + *dg + \omega_h.$$

Ovviamente in $X \setminus \{p\}$ $d\psi = 0$. $\Rightarrow d\mu = 0$

ma anche $\delta\mu = 0 = -*d*(i*\psi + *dg + \omega_h) =$

Quindi μ è armonica in $X \setminus \{p\}$.

$\varphi = \frac{1}{2}(\mu + i*\mu)$ è olomorfe in $X \setminus \{p\}$.

Intorno a p si ha $\varphi = \frac{1}{2}(\mu + i*\mu) = \frac{1}{2}(\psi + i*\psi) - \frac{1}{2}(df + i*df)$

$$\frac{1}{2}(\psi + i*\psi) = d\left(\frac{1}{z^k}\right) + \gamma \text{ olomorfa}$$

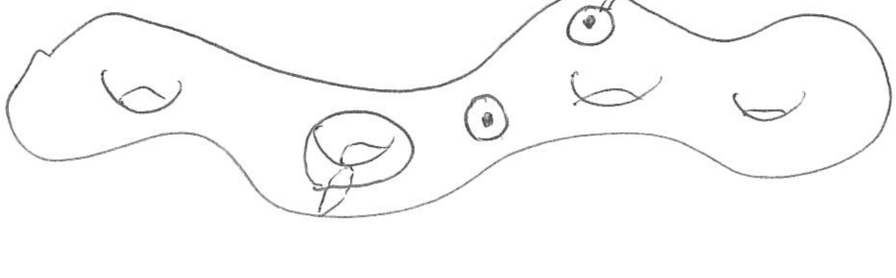
Corollario: Sia $(F_1 \dots F_k) \in P_D$ allora esiste $\varphi \in \Omega^1_{mero}(X)$ t.c. φ è olomorfa in $X \setminus \{p_1 \dots p_k\}$ e $\varphi - dF_i$ è olomorfa intorno a p_i

Dim $F_i = \frac{a^i_{-n_i}}{z^{n_i}} + \dots \frac{a^i_{-1}}{z_i}$

allora $dF_i = a^i_{-n_i} \, d\left(\frac{1}{z^{n_i}}\right) + \dots$ Applichiamo teorema di prima ad ogni singolo $d\left(\frac{1}{z^k}\right)$ e facciamo comb. lineari

Dim: Teorema Abbiamo $(F_1 \dots F_k)$ $\sum_i Res_{p_i} F_i \omega = 0 \; \forall \omega \in \Omega^1$ troviamo φ come nel corollario. Vogliamo φ esatta in $X \setminus \{p_1 \dots p_k\}$. Allora $\varphi = df$ e quindi f olomorfa in $X \setminus \{p_1 \dots p_k\}$ e f ha un'estensione meromorfa a X con parti principali F_i.
Per vedere φ esatta basta prendere una base (meglio un sistema di generatori di $H_1(X \setminus \{p_1 \dots p_k\}, \mathbb{Z})$ e verificare $\int_\gamma \varphi = 0$

$\gamma_1 \dots \gamma_{2g}$ $\partial D_1 \dots \partial D_k$



Ovviamente possiamo sostituire φ con $\varphi+\omega$ $\omega\in\Omega^1(X)$

In particolare $\varphi-\sum_i a_i\omega_i$ in modo che $\int_{\gamma_i}\varphi=0$ $i=1\dots g$.

$$\int_{\partial\Delta_i}\varphi=\int_{\partial D_i}dF_i=0$$ perchè in dF_i il residuo è nullo.

Manca da calcolare $\int_{\gamma_{g+j}}\varphi$. $j=1\dots g$.

Usando le relazioni bilineari di Riemann abbiamo

$$2\pi i\sum_{p\in X_0}\operatorname{Res}_p h_j\varphi=\sum_{i=1}^{g}\Big[\int_{\gamma_i}\omega_j\int_{\gamma_{g+i}}\varphi-\int_{\gamma_{g+i}}\omega_j\underbrace{\int_{\gamma_i}\varphi}_{=0}\Big]$$

$$=\sum_{i=1}^{g}\int_{\gamma_i}\omega_j\int_{\gamma_{g+i}}\varphi=\int_{\gamma_{g+j}}\varphi$$

Adesso $$\sum_{p\in X_0}\operatorname{Res}_p h_j\varphi=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Res}_{p_i}h_j\varphi=\sum\operatorname{Res}_{p_i}h_j\,dF_i=$$

$$\underbrace{\sum\operatorname{Res}_{p_i}d(h_jF_i)}_{=0}-\sum\operatorname{Res}_{p_i}\omega_jF_i=0 \text{ per ipotesi.}$$

Abbiamo quindi la dimostrazione per $D\geq 0$.

Osservazione ($g\geq 1$) Se $K=(\omega)_0$. $\omega\in\Omega^1(X)$

$I(K)$ è generato da ω $\Rightarrow i(K)=1$.

$\ell(K)=i(0)=g$. $\Rightarrow \deg K=2g-2$ ✓. (già visto con R-H) usando esistenza di f meromorfa.

Vediamo R-R per D divisore generale.

Osservazione se $\ell(D) \neq 0 \Rightarrow \exists f \mid (f) + D = D' \geq 0$.

R.R è vero per D', ma $D \sim D'$ e $K-D \sim K-D'$

quindi abbiamo gli stessi numeri

Se $\ell(K-D) \neq 0$. allora vale R.R per $\ell(K-D)$.

$$\ell(K-D) - \ell(D) = 2g-2-\deg D - g + 1 = -\deg D + g - 1$$

Quindi o.k. Rimane solo il caso in cui $\ell(D) = \ell(K-D) = 0$

In questo caso basta dimostrare che $\deg D = g-1 = \deg(K-D)$.

$D = D^+ - D^-$ con $D^- > 0$ altrimenti D effettivo e R-R o.k.

Osserviamo che $i(K+D^-) = 0$ perché un diff $\omega \neq 0$ olomorfo

ha $2g-2$ zeri invece $\deg(K+D^-) > 2g-2$.

Inoltre abbiamo $0 = \ell(D) \geq \ell(D^+) - \deg D^-$

perché imporre degli zeri significa imporre delle condizioni lineari

e quindi ogni volta si diminuisce <u>al più</u> di 1.

$$0 = \ell(D) \geq \ell(D^+) - \deg(D^-) = i(D^+) + \deg D^+ - g + 1 - \deg D^-$$

$$0 \geq \deg D + i(D^+) - g + 1. \quad \Rightarrow \quad g - 1 - i(D^+) \geq \deg D$$

In modo simile

$$0 = \ell(K-D) \geq \ell(K+D^-) - \deg D^+ = i(K+D^-) + \deg(K+D^-) - \deg D^+ - g + 1$$

$$\Rightarrow \deg D \geq \deg(K) - g + 1 = g - 1$$

Quindi $\deg D = g-1$ — —

<u>Applicazioni</u>: D divisore $\deg D \geq 2g \Rightarrow$

$$\ell(D-p) = \ell(D) - 1.$$

Infatti
$$\ell(D) = \deg D - g + 1 + \overbrace{i(D)}^{=0.}$$
$$\ell(D-p) = \deg D - 1 - g + 1 + \overbrace{i(D-p)}^{=0}$$

<u>Quindi O.K.</u> Note esistono funzioni meromorfe su X.

Siano $f, g \in \mathcal{M}(S)$ non costanti allora esiste un polinomio irriducibile $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ t.c. $P(f,g) = 0$

Nota: $\mathbb{C}[x,y]$ è un UFD e ogni polinomio fattorizza in modo unico in fattori irriducibili

<u>Dim</u> $D = (f)_\infty$ $\Delta = (g)_\infty$ $V_n \subseteq \mathbb{C}[x,y]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$.

$$\Phi : V_n \longrightarrow \mathcal{L}(n(\Delta + D))$$
$$Q(x,y) \longrightarrow Q(f,g)$$

$Q(f,g) \in \mathcal{L}(n(\Delta+D))$ infatti somme di monomi

$f^h g^k$ $(h+k \leq n)$ $(f^h g^k) + n(\Delta + D) \geq 0$.

per $n >>$ ~~dim~~ $\ell(n(\Delta+D)) = n(\deg\Delta + \deg D) - g + 1$.

$$\dim V_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \quad (*)$$

⊛ per induzione.

$\dim V_0 = 1$ ✓

$\dim V_{n-1} = \frac{(n+1)n}{2}$ ipotesi di induzione

$$V_n = V_{n-1} \oplus \langle x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n \rangle \Rightarrow$$

$$\dim V_n = \dim V_{n-1} + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \checkmark$$

Quindi per $n \gg 0$ $\dim V_n >$ ~~dim~~ $\ell(n(\Delta + D))$

Quindi Φ ha nucleo non banale. Sia $F(x,y)$ un elemento non nullo di $\operatorname{Ker}\Phi$. Assumiamo

$$F(x,y) = P_1(x,y)^{r_1} \dots P_k(x,y)^{r_k}.$$

Abbiamo $F(f,g) \equiv 0 \Rightarrow$ un polinomio irriducibile $P_i(x,y)$ verifica $P_i(f,g) \equiv 0$.

Abbiamo anche

<u>Teorema</u> X sup di Riemann compatta. Esistono su X 2 funzioni meromorfe non costanti f e g che godono della seguente proprietà. Sia n il grado di f come rivestimento ramificato di $\hat{\mathbb{C}}$ allora esiste un punto $p \in \hat{\mathbb{C}}$ t.c.

1) $f^{-1}(p) = \{p_1 \dots p_n\}$ $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$

2) nessun p_i è un polo per g.

3) $g(p_i) \neq g(p_j)$ per $i \neq j$.

<u>Dim</u>: 1) Ovvio f rivestimento ramificato

Sia $D = p_1 + \dots + p_n$

$\Delta = q_1 + \dots + q_N$ $\quad q_i \neq p_j \quad \forall\, i = 1 \dots N,\ j = 1 \dots n.$

e $N - n \gg 0$

$$\mathcal{L}(\Delta) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}^n$$

$$g \longrightarrow (g(p_1) \dots g(p_n))$$

Supponiamo che sia suriettiva allora basta prendere un g che vada su coordinate $(z_1 \dots z_n)$ con $z_i \neq z_j$.

$\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathcal{L}(\Delta - D)$

Adesso $N - n$ ci permette di usare il primo risultato n volte. e quindi $\dim \mathrm{Im}\,\Phi = \ell(\Delta) - \ell(\Delta - D) = n$.

<u>Osservazione</u>: Il tutto è vero per quasi tutti i punti di $\hat{\mathbb{C}}$ e per quasi tutti i g di $\mathcal{L}(\Delta)$.

Teorema (Cap 8) Ogni superficie di Riemann compatta si può ottenere come desingolarizzazione di una curva algebrica piana definita da un polinomio irriducibile

~~<u>Dim</u> Siano f, g e $z_0 = p$ come prima.~~

~~Vediamo come costruire $F(x,y)$ irriducibile.~~

~~$\forall\, z \in \hat{\mathbb{C}} - B$ (B insieme di diramazione di f).~~

~~Abbiamo $f^{-1}(z) = \{p_{1,z} \dots p_{n,z}\}$~~

Dimostrazione del teorema

Siano f, g e $F(x,y)$ il polinomio t.c. $F(f,g) \equiv 0$

Abbiamo $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$p \longrightarrow [f(p), g(p), 1]$ estese anche ai poli di f e g.

$$\Phi(X) = \overline{\Gamma} \supset \Gamma = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$$

$$\begin{tikzcd} X \setminus W \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "f"'] & & \overline{\Gamma} \setminus V \arrow[dl, "\pi_x"] \\ & \hat{\mathbb{C}} \setminus D & \end{tikzcd}$$

$W = \Phi^{-1}(V)$

$\ni z_0$

$f^{-1}(z_0) = \{p_1 \dots p_n\}$ distinti necessariamente g li separa allora $x_1 \dots x_n$ sono distinti

f e π_x sono 2 rivestimenti di grado n. quindi Φ è un isomorfismo.

Sia C' la desingolarizzazione di $\overline{\Gamma}$

C' è una superficie di Riemann compatta ed è l'unico completamento di $\overline{\Gamma} \setminus V$ ma lo è anche X (unico completamento di $X \setminus W$)

Quindi $X \cong C'$ isomorfismo analitico.

E la desingolarizzazione è anche connessa

Altre conseguenze

Teorema Siano $p_1 \dots p_n \in X$, $F_1 \dots F_n$

Code di Laurent in $p_1 \dots p_n$ Sia

$$F_i = \frac{a^i_{-n_i}}{z^{n_i}} + \dots \frac{a^i_{-1}}{z_i}$$

z_i coordinate locali Allora esiste φ olomorfa

in $X \setminus \{p_1 \dots p_n\}$ t.c. $\varphi - F_i dz_i$ è olomorfa intorno a p_i

$\iff \sum_i \operatorname{Res} F_i dz_i = 0$

Facendo uso del teorema dimostrato prima possiamo

ridurci al caso $n_i = 1$ $i = 1 \dots n$.

Consideriamo

$$\Phi : I(-p_1 - p_2 - p_n) \longrightarrow \overbrace{\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}}^{n \text{ volte.}}$$

$$\varphi \longrightarrow (\operatorname{Res}_{p_1}\varphi \dots \operatorname{Res}_{p_n}\varphi)$$

$\ell(\cancel{-\sum p_i}) - i(-p\sum \dots) = -n + g + 1 \dots$

$$i(-\sum p_i) = n + g - 1$$

$$\operatorname{Ker}\Phi = \Omega^1(X) \qquad \operatorname{Im}\Phi \subseteq \sum x_i = 0.$$

Vale l'uguaglianza.

Conseguenze Ulteriore

$\deg D = 2g - 2$, $D \geq 0$ $\ell(D) \geq g \Rightarrow D = K$ $(\ell(D) = g)$

$\ell(D) - \ell(K - D) = g - 1 \Rightarrow \ell(D) \geq g \Rightarrow \ell(K-D) = 1$

$0 \simeq K - D = (f)$ $D \simeq K$

Possiamo discutere con maggior dettaglio il caso delle curve piane lisce proiettive

$$C = \{ [X_0, X_1, X_2] \,/\, F(X_0, X_1, X_2) = 0 \}.$$

Sia Γ un'altra curva non contenente C.

Γ ha equazione $G(X_0, X_1, X_2) = 0$

Divisore su C tagliato da Γ.

$$\Gamma \cdot C = \sum_{p \in C} I(p, \Gamma \cap C)\, p.$$

Come definire $I(p, \Gamma \cap C)$.

Sia $H(X_0, X_1, X_2)$ un polinomio omogeneo $\deg H = \deg G$.

ma H non si annulla in p. Poniamo $x = X_1/X_0$, $y = X_2/X_0$.

$\dfrac{G(X_0, X_1, X_2)}{H(X_0, X_1, X_2)} = \dfrac{G(1, x, y)}{H(1, x, y)}$ è una funzione meromorfa su C

perché lo sono x e y. Inoltre è regolare in p.

$I(p, \Gamma \cap C) = v_p(G/H)$, La definizione potrebbe dipendere

da H. Prendiamo H' stesse proprietà

$$v_p(G/H) = v_p(G/H') + \cancel{v_p(H'/H)} \quad \text{quindi } \underline{\text{O.K}}$$

Ovviamente $I(p, \Gamma \cap C) = 0 \iff p \notin \Gamma \cap C$.

Vediamo che

$\deg(\Gamma\cdot C) = \deg\Gamma \cdot \deg C$.

e se Γ' è un'altra curva di grado m che non contiene C.

allora $\Gamma\cdot C \sim \Gamma'\cdot C$.

A meno di cambio di coordinate possiamo assumere che la retta L di equazione $X_1 = 0$ incontri C in n punti distinti $L\cdot C = P_1 + \ldots + P_n$.

$L^m = \{X_1^m = 0\} \quad L^m \cdot C = m\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)$

Γ e Γ' 2 curve di grado m.

$$\Gamma\cdot C \setminus \Gamma'\cdot C = \left(G/_{G'}\right) = (f)$$

quindi $\Gamma\cdot C \sim \Gamma' C$ e $\deg(\Gamma\cdot C) = mn$.

<u>Vediamo</u> in modo algebrico che le curve di grado $d-3$ tagliano la serie canonica

$$|K| = \{\Gamma\cdot C \,/\, \Gamma \text{ curva di grado } d-3\}.$$

Sia $D = \Gamma\cdot C$ (Γ curva di grado $d-3$, $G=0$) $\quad \deg D = d(d-3) = 2g-2$.

$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$

$$\mathcal{L}(D) \supseteq W_{d-3} = \left\{ H/_{G}\Big|_C \quad \begin{array}{l} H = H(X_0, X_1, X_2) \\ \text{ha grado } d-3 \end{array} \right\}$$

$\dim W_{d-3} = \binom{d-3+2}{2} = g. \Rightarrow D$ <u>è ~~il~~ un divisore canonico</u>

Più in generale abbiamo

Teorema C una curva piana proiettiva non singolare
Allora le curve piane di dato grado tagliano su C
una serie lineare completa

<u>Dim</u> C o.k. L una retta $\Delta = L \cdot C$.

$V_n =$ polinomi omogenei di grado n $\quad \dim V_n = \binom{n+2}{2}$

$$\Phi_n : V_n \longrightarrow \mathcal{L}(n\Delta)$$
$$G \longrightarrow G/L^n \text{ meromorfa.}$$

è suriettiva ??

Vero se $n = d-3$ $\quad \mathcal{L}((d-3)\Delta) = \mathcal{L}(K) \cong \Omega^1(C)$

Se $n \leq d-3$ $\quad \mathcal{L}((d-3-n)\Delta) = \mathcal{L}(K - n\Delta)$

I divisori di $|K|$ sono tagliati dalle curve di grado $d-3$
I divisori di $|K|$ che contengono ~~le curve~~ $n\Delta$ sono
tagliati dalle curve di grado $(d-3-n) \cup L^n$ $\quad D \in |K|$

$$V_{d-3-n} \longrightarrow \mathcal{L}((d-3-n)\Delta) \quad \underset{\text{è suriettiva.}}{\overset{D-n\Delta \geq 0}{\sim}}$$

Adesso invece $n > d-3$.

$$\ell(K - n\Delta) = 0 \Rightarrow \ell(n\Delta) = nd - \tfrac{1}{2}(d-1)(d-2) + 1$$

$\dim V_n = \binom{n+2}{2}$ 16

$$\ker \Phi_n \cong \begin{cases} V_{n-d} & \text{per } n \geq d \\ 0 & n = d-1, d-2 \end{cases}$$

$\ker \Phi_n = F \cdot H \quad H \in V_{n-d}$.

$$\dim \operatorname{Im} \Phi_n = \binom{n+2}{2} - \binom{n-d+2}{2} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) - \frac{1}{2}(n-d+2)(n-d+1)$$

$$= \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) - \frac{1}{2}\left((n-d)^2 + 3(n-d) + 2\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(2dn - d^2 + 3d\right) = nd - \frac{1}{2} d(d-3) = \ell(n\Delta).$$

Quindi è suriettiva. $n \geq d$.

$n = d-1, d-2$ abbiamo $\ell(n\Delta) = nd - \frac{1}{2} d(d-3)$

caso $n = d-1 \Rightarrow d(d-1) - \frac{1}{2} d^2 + \frac{3}{2} d$.

$$\frac{d^2}{2} + \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} d(d+1) = \binom{d+1}{2}$$

o.k.

Esercizio 1: D $\deg D = 0 \Rightarrow \ell(D) = 0, 1$. Descrivere $\mathcal{L}(D)$ (17)

$C = \{[X, Y, Z] \,/\, Y^4 Z = X^5 - X Z^4\}$.

Descrivere $\mathcal{L}(D)$ Sia $Q = [0, 1, 0]$, $P = [0, 0, 1]$

Calcolare $\ell(4Q - 4P)$ $\ell(3Q - 3P)$

~~2) Trovare divisori di grado 0 t.c. $\ell(D-P) = \ell(D)$~~

$\ell(D) - \ell(K - D) = -g + 1$

$\mathcal{L}(D) = \{ f \,/\, (f) + D \geq 0 \}$ necessariamente $\deg D = 0$ $(f) + D = 0\}$

$\mathcal{L}(D) \neq 0 \Longleftrightarrow$ quando D è un divisore principale $D = (1/f)$.

e in questo caso $\ell(D) = 1$.

Consideriamo la curva C e la retta $L: 0 = X$. interseca C nel punto P con molteplicità 4 e nel punto Q con mol 1

Retta M di equazione $Z = 0$ abbiamo il punto Q con molteplicità 5 quindi $X/Z = f$.

$(f) = 4P - 4Q$ quindi $(f) + 4Q - 4P = 0$.

$\ell(4Q - 4P) = 1$

Adesso sappiamo che $D - Q + P \not\sim D \sim 0$

Quindi $3Q - 3P \not\sim 0 \Longleftrightarrow \ell(3Q - 3P) = 0$

Sia S un toro complesso $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$.
Dimostrare che $\ell(np) = n \quad \forall n \geq 1$.

Siano $\{1, f\}$ e $\{1, f, g\}$ basi per $\mathcal{L}(2P)$ e $\mathcal{L}(3P)$
dimostrare che esistono c, d non nulle t.c.
$cf^3 - dg^2 \in \mathcal{L}(5P)$

Dimostrare che esiste $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ di 3^ grado
tale che $P(f,g) \equiv 0$.
Dimostrare che $P(x,y)$ è irriducibile.

Applichiamo R.R $\quad \deg K = 0 \quad \Rightarrow$

$$\ell(np) - \underbrace{\ell(K - np)}_{=0} = n - 1 + 1 = n.$$

Consideriamo
$1, f, g \Rightarrow f^2 \in \mathcal{L}(4p) \quad fg \in \mathcal{L}(5P) \quad f^3, g^2 \in \mathcal{L}(6P)$

$1, f, g, f^2, fg\ g^2, f^3 \in \mathcal{L}(6P)$
sono 7 esiste una relazione tra di loro

$$a_1 + a_2 f + a_3 g + a_4 f^2 + a_5 fg + cf^3 - dg^2 = 0$$

allora $cf^3 - dg^2 = -a_1 - a_2 f \quad - a_5 fg \in \mathcal{L}(5P)$

Inoltre $\quad a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + c x^3 - d y^2 = 0$
è il polinomio. Supponiamo che sia riducibile
$\Rightarrow$ anche una relazione di grado $<$ non è possibile

Esercizi: Siano D e E divisori positivi di X
Dimostrare che $\ell(D) + \ell(E) \leq \ell(D+E) + 1$ 19

I^ supponiamo $\text{Supp}\, D \cap \text{Supp}\, E = \phi$.

$\mathcal{L}(D) + 1 \in \mathcal{L}(E)$

Sia $1\, f_1 \dots f_{k-1}$ base di $\mathcal{L}(D)$ $\quad (f_i)_\infty \subseteq D$

Sia $1\, g_1 \dots g_{h-1}$ " di $\mathcal{L}(E)$ $\quad (g_j)_\infty \subseteq E$.

Allora $1, f_1 \dots f_{k-1}, g_1 \dots g_{h-1} \in \mathcal{L}(D+E)$ e sono indipendenti quindi o.k.

In generale Consideriamo

$$|D| \times |E| \xrightarrow{\Phi} |D+E|$$
$$(D', E') \longrightarrow D'+E'$$

Adesso questa applicazione ha fibre finite quindi $\dim \operatorname{Im} \Phi = \dim |D| + \dim |E| = \ell(D) - 1 + \ell(E) - 1$

$\leq \ell(D+E) - 1$. Quindi $\ell(D) + \ell(E) \leq \ell(D+E) + 1$.

Sia D un divisore, $D \geq 0$

$\{U_\alpha\}$ ricoprimento di aperti di X che sono carte locali

$h_\alpha = 0$ equazione di D in U_α. i.e h_α è una funzione olomorfa in U_α e $D|_{U_\alpha} = (h_\alpha)$.

Esempio $D = np$. z coordinate locale intorno a p.

$U_0 = U \ni p$ $h_0 = z^n$, $U_1 = X \setminus \{p\}$ $h_1 = 1$.

Nota $g_{\alpha\beta} = h_\alpha / h_\beta \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Questi dati conducono alla definizione di sezioni di un fascio.

Una sezione s del fascio $\mathcal{O}(D)$ relativa al ricoprimento $\mathcal{U}$ è una collezione $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ tali che $s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta$ in $U_\alpha \cap U_\beta$ e $(s_\alpha) \geq D|_{U_\alpha}$.

Possiamo sommare sezioni $\{s\} = \{s_\alpha\}$ e $t = \{t_\alpha\}$

$as + bt \in$ ~~$\mathcal{O}(D)$~~ al fascio.

Notazione $s \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$. $\sigma = \{h_\alpha\} \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$

$$\Phi : H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(D)$$
$$\{s_\alpha\} \longrightarrow s_\alpha / h_\alpha = f|_{U_\alpha}.$$

Ovviamente $f|_{U_\alpha} = f|_{U_\beta} = s_\beta / h_\beta$.

$$\begin{array}{c} f|_{U_\alpha} \\ \| \\ s_\alpha / f_\alpha = \dfrac{g_{\alpha\beta} s_\beta}{g_{\alpha\beta} h_\beta} = \end{array}$$

$\Phi^{-1}(f) = \{f \cdot h_\alpha\}_{\alpha \in A}$. $\Phi(\sigma) = 1$.

Scriveremo $\Phi(s) = \frac{s}{\sigma}$ $\quad \Phi^{-1}(f) = f \cdot \sigma$.

Possiamo scrivere anche

$$\mathbb{P} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)) \cong |D|$$

<u>Definizione</u> $D \geq 0$ Il luogo base di $|D|$ è il divisore B definito da $\quad B = \text{m.c.d}\{D'\}_{D' \in |D|}$

Osservazione se $D = \Delta + B$ allora si ha

$$|D| = |\Delta| + B.$$

B è il più grande divisore in cui vale tale relazione

Se $B = 0 \Rightarrow |D|$ è priva di punti base.

$$B = \text{M.C.D}\{(s)\}_{s \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))}$$

$$B = \text{m.c.m.}\{(f)_\infty \mid f \in \mathcal{L}(D)\}.$$

Comunque in generale avremo $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D-B)$

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D-B))$$

Tipico esempio $\quad g(X) \geq 1 \quad D = p$

Allora $|D| = |0| + p$.

Comunque considereremo sempre serie lineari prive di punti fissi

Consideriamo una base $s^0 \ldots s^r$ di $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$

$f^0 \ldots f^r$ di $\mathcal{L}(D)$

$s^0 = \sigma$ quindi $f^0 = 1$.

Come abbiamo già visto abbiamo un'applicazione analitica

$$\varphi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^r.$$
$$p \longrightarrow [s^0_\alpha(p) \ldots s^r_\alpha(p)]$$

Quando $p \in U_\alpha$. Siccome D è privo di punti fissi abbiamo sempre che $\varphi_D(p) \neq [0 \ldots 0]$ ben definito perché $\xi_{\alpha\beta}(p) \neq 0$.

Ovviamente $\phi_D(p) = [1, f^1(p) \ldots f^r(p)]$ (già visto)

Per una sezione s $s(p)$ non ha significato, lo ha invece $[s^0(p) \ldots s^r(p)]$

Possiamo anche scrivere $s(p) = 0$ e $V_p(s)$.

<u>TEOREMA</u>: X superficie di Riemann compatta, $D > 0$
$\ell(D) = \dim \mathcal{L}(D) = \dim H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$ $r = \ell(D) - 1$
Allora condizione necessaria e sufficiente affinché $|D|$ sia privo di punti base e

$$\varphi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^r.$$

sia un'immersione non singolare è che $\forall$ coppia di punti $p, q \in X$ $\ell(D-p-q) = \ell(D) - 2$. ⊛

Supponiamo che ⊛ sia soddisfatta $\Rightarrow$

~~Sia~~ $l(D) = l(D-p)+1$, quindi $\forall p \in X \ \exists i \in \{0 \dots r\}$

t.c. $s^i(p) \neq 0$. $\Rightarrow$ $|D|$ è privo di punti base.

e ϕ_D è definita.

Sia $s^0 \dots s^r$ base di $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$ vediamo

φ_D è iniettiva. Assumiamo che $\varphi_D(p) = \varphi_D(q)$. $p \neq q$.

Cambiando base possiamo assumere $\varphi_D(p) = \varphi_D(q) = [1, 0 \dots 0]$

Quindi $s^i(p) = s^i(q) = 0 \quad i = 1 \dots r$.

$\Rightarrow s^i \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D-q-p)\}$ $\Rightarrow$ $l(D-p-q) \geq r$.

contraddizione.

Assumiamo che in un punto $p \in X$ lo jacobiano di φ non abbia rango massimo $\varphi_D(p) = [1, 0 \dots 0]$

Questo vuol dire che localmente intorno a p l'applicazione è data da ~~$\varphi_D(p)$~~ $z \longrightarrow (h_1(z) \dots h_r(z))$

(Nota abbiamo diviso per s_0).

se il rango non è massimo abbiamo

$$(h_1(0) \dots h_r(0)) = (h_1'(0) \dots h_r'(0)) = (0 \dots 0)$$

Quindi $f^1 \dots f^r \in \mathcal{L}(D-2p)$ contraddizione

Quindi φ è un'immersione non singolare

Viceversa Supponiamo che $|D|$ non abbia punti base e φ_D sia un'immersione.. Siano $z_0 \dots z_r$ coordinate di $\mathbb{P}^r$. Identifichiamo X con $C \subseteq \mathbb{P}^r$.

Dati 2 punti $p, q \in C = \varphi_D(X)$ Siano H e H' 2 iperpiani uno che non contiene p e q e l'altro che contiene p, ma non q.

H ha equazione $H(z_0 \dots z_r) = 0$

H' ha equazione $H'(z_0 \dots z_r) = 0 \Rightarrow$ ~~H, H'~~

$H(s_0 \dots s_r)$ e $H'(s_0 \dots s_r)$ sono 2 sezioni indipendenti non contenute in $H^0(U, \mathcal{O}(D-p-q))$

quindi $\ell(D-p-q) = \ell(D) - 2$

Equivalentemente 1 e $H'/H = f$ sono in $\mathcal{L}(D)$ ma non in $\mathcal{L}(D-p-q)$.

Caso 2p Possiamo trovare un iperpiano H che non passa per p e un altro che passa per p, ma non contiene la tangente in $p \Rightarrow \ell(D-2p) = \ell(D) - 2$.

Definizione: Tali divisori sono detti molto ampi.

Corollario X superficie di Riemann compatta, D divisore con $\deg D = d \geq 2g+1 \Rightarrow$

$\varphi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^{d-g}$ è un'immersione regolare.

Esercizio (non facile)

S superficie di Riemann compatta $g=2$

D molto ampio $\Longleftrightarrow$ $\deg D \geq 5$

$\Leftarrow$ $\operatorname{Deg} D \geq 5 \Rightarrow D$ molto ampio

Assumiamo D molto ampio (effettivo) e $\deg D = 4$.

Per R.R. $\quad \ell(D) - \underbrace{\ell(K-D)}_{=0} = 4-2+1 = 3 \quad \Rightarrow \ell(D) = 3$

Caso I $\quad D = K + p_1 + p_2 \qquad K$ un divisore canonico.

$\Rightarrow \ell(D - p_1 - p_2) = \ell(K) = 2 \quad \Rightarrow D$ non é molto ampio

$D-K$ non é effettivo $\quad \ell(D-K) = 1 \quad \Rightarrow$

$\exists f \in \mathcal{M}(S) \quad (f) + D - K = q_1 + q_2 \geq 0$

$D \sim K + q_1 + q_2 \quad \Rightarrow \quad D - q_1 - q_2 \sim K$

quindi $\quad \ell(D - q_1 - q_2) = 2 \quad \Rightarrow D$ non é molto ampio.

APPLICAZIONE CANONICA

X compatta $g(X) \geq 1$. $\quad K$ un divisore canonico

$K = (\omega)_0 . \quad \omega \in \Omega^1(X)$.

$\varphi_K : X \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1} \qquad \ell(K) = \Omega^1(X)$

$\varphi_K(p) = [\omega_1(p) \ldots \omega_g(p)]$

Significato $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento con carte locali

$$\omega_i = f_{\alpha,i}(z_\alpha)\, dz_\alpha .$$

$$\varphi_K(p) = [f_{\alpha,1}(z_\alpha(p)) \dots f_{\alpha,g}(z_\alpha(p))]$$

Tutto ha senso se K è privo di punti base, i.e. $l(K-p) = g-1$

$$l(K-p) - \underset{l(p)=1}{l(K-K+p)} = 2g-3-g+1 = g-2$$

$\checkmark$.

Quindi intorno a un punto p possiamo assumere che $\omega_1(p) \neq 0$ e possiamo scrivere

$$\varphi_K(p) = \left[1, \frac{\omega_2(p)}{\omega_1(p)}, \dots \frac{\omega_g(p)}{\omega_1(p)}\right].$$

queste funzioni sono localmente olomorfe intorno a p.

<u>Da dimostrare</u> φ_K è un'immersione regolare tranne che nel caso iperellittico.

<u>Def</u> X superficie di Riemann di genere $g > 1$ è iperellittica se esistono 2 punti p e $q \in X$ t.c. $l(p+q) = 2$.
Ciò equivale a dire che $\exists\, f : X \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ rivestimento ramificato di grado 2. infatti $\mathcal{L}(p+q) \ni 1, f$
f non costante ha 2 poli.

Adesso $\ell(p+q)=1 \iff \ell(K-p-q)=g-2$

Infatti $\ell(p+q)-\ell(K-p-q)=-g+3$

quindi $\ell(K-p-q)=g-3+\ell(p+q)$

Quindi φ_K è un'immersione non singolare $\iff$ X non è iperellittica.

Si verifica facilmente che se $g(X)\leq 2 \Rightarrow X$ è iperellittica

Ma superfici iperellittiche sono casi molto particolari superfici di Riemann. La superficie di Riemann compatta generale di genere $g\geq 3$ non è iperellittica

(La dimostrazione di questo fatto esula i contenuti di questo corso)

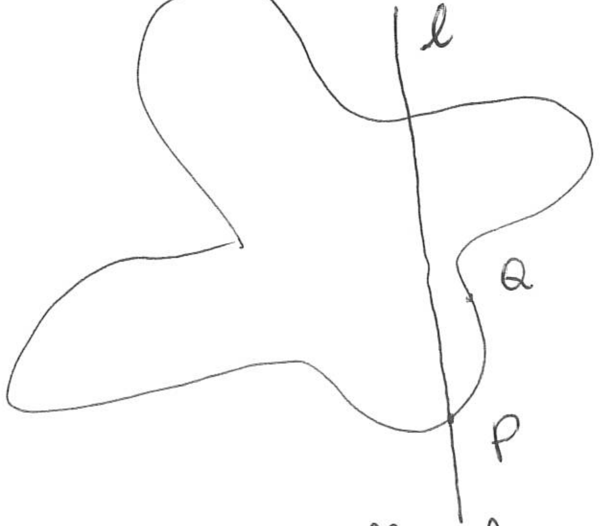
Però possiamo verificare che curve piane non singolari di grado $d\geq 4$. non sono curve iperellittiche.

Infatti su C la serie canonica è tagliata dalle curve piane di grado $d-3$. Basta dimostrare che assegnati 2 punti $p,q\in C$ esiste una curva G di grado $d-3$ tale che $G\cdot C>p$ $G\cdot C \not> p+q$.

(e poi che esiste G' t.c. $G'\cdot C\not> p, q$.

Sia l una retta che passa per p e non per q se $p \neq q$.
Oppure se $p = q$ l una retta non tangente che passa per p. Nel primo caso $G = l^{d-3}$ o.k.
nel secondo caso $G = l\, m^{d-4}$ m una retta che non passa per p.

Esempio $d = 4$.



<u>Caso</u> Particolare : Curve iperellittiche

Vogliamo concludere studiando l'applicazione canonica nel caso iperellittico

$f : X \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ rivestimento doppio

~~Ag~~ $2g-2 = -4 + R_f$ $\quad \deg(R_f) = 2g+2$.

Allora abbiamo $2g+2$ punti di ramificazione

Siano $p_1 - - - - p_{2g+2}$ e p, q poli semplici di f

$\{p, q\} = f^{-1}(\infty)$

$i : X \longrightarrow X$ automorfismo analitico che è lo scambio dei 2 fogli i.e. $f^{-1}f(\bar{p}) = \{\bar{p}, i(\bar{p})\}$.

Ovviamente $p_1 \cdots p_{2g+2}$ sono fissati da i. Inoltre $i^2 = 1$.

Adesso consideriamo

$$\mathcal{L}_{\hat{\mathbb{C}}}((g+1)\infty) \qquad \mathcal{L}_X((g+1)(p+q))$$

$$f^* : \mathcal{L}_{\hat{\mathbb{C}}}((g+1)\infty) \longrightarrow \mathcal{L}_X((g+1)(p+q))$$
$$P(z) \longrightarrow f^*P(z) = P \circ f.$$

Usiamo R.R

$\dim \mathcal{L}_{\hat{\mathbb{C}}}((g+1)\infty) = g+2$ e $\dim \mathcal{L}_X((g+1)(p+q)) = g+3$.

$$i : \mathcal{L}_X((g+1)(p+q)) \longrightarrow \mathcal{L}_X((g+1)(p+q))$$
$$h \longrightarrow i^*h = h \circ i$$

Autovalori sono ± 1. Se $i^*h = h \Rightarrow h$ è meromorfa su $X/_i \cong \hat{\mathbb{C}}$ $\Rightarrow h = f^*(g)$.

Quindi abbiamo $\mathcal{L}_X((g+1)(p+q)) = f^* \mathcal{L}_X((g+1)\infty) \oplus \mathbb{C}\langle k \rangle$

$i^*k = -k$. $\Rightarrow$ k svanisce lungo i punti $p_1 \cdots p_{2g+2}$ $\quad (k) = p_1 + \cdots + p_{2g+2} - (g+1)(p+q)$

Sia $f(p_i) = e_i \in \mathbb{C}$ punti di diramazione.

$$\prod_{i=1}^{2g+2} (f-e_i) = 2(p_1 + \dots p_{2g+2}) - (2g+2)(p+q).$$

Quindi $k^2 = c \prod_{i=1}^{2g+2} (f-e_i) \quad c \neq 0.$

Quindi X ha una rappresentazione come curva piana del tipo

$$y^2 = c \prod_{i=1}^{2g+2} (x-e_i)$$

$$df = p_1 + \dots p_{2g+2} - 2(p+q)$$

quindi $\omega_{i+1} = \frac{f^i df}{k}$ sono una base per i differenziali olomorfi $i = 1 \dots g$. perché le f^i sono linearmente indipendenti.

$$(\omega_{i+1}) = (f^i) df - (K) = i(p_0+q_0) - i(p+q) + p_1 + \dots + p_{2g+2}$$
$$- 2(p+q) - (p_1 + \dots p_{2g+2}) + (g+1)(p+q)$$

$$= (g-i-1)(p+q) + i(p_0+q_0)$$

Quindi

$$\varphi_K(p) = [1, f(p) \dots \dots f^{g-1}(p)]$$

Riassumendo abbiamo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_K"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{P}^{g-1} \\ & {[X_0^{g-1}, X_0^{g-2}X_1, \dots X_1^{g-1}]} \\ \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \arrow[ur, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

$[X_0, X_1]$

$[1, f]$

ψ immersione.

Allora $\varphi_K(X) = C = \psi(\mathbb{P}^1)$

é un'applicazione di grado 2.

Osservazione: la curva $y^2 = c \prod_{i=1}^{2g+2} (x - e_i)$

é liscia come curva affine. Ma la sua chiusura proiettiva $y^2 Z^{2g} = c \prod_{i=1}^{2g+2} (x - e_i Z)$

ha come unico punto singolare il punto $[0,1,0]$

Esercizio: Se $g(X) = 2 \Rightarrow X$ é iperellittica

Abbiamo $\ell(K) = 2 \quad \deg K = 2$.

Allora in $\mathcal{L}(K)$ esiste $f \neq c \quad f : X \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ha grado 2.

$g(X) = 3 \implies X$ è una quartica piana non singolare oppure è iperellittica.

Se X non è iperellittica.

$\varphi_K : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ è un'immersione. non singolare.

$\varphi_K(X)$ è una curva in $\mathbb{P}^2$. liscia

Come calcolare il grado?

Abbiamo $\ell(K) = 3$ e $\dim \mathbb{C}[X,Y,Z]_1 = 3$.

$\ell(2K) = 3g-3 = 6$ $\quad \dim \mathbb{C}[X,Y,Z]_2 = 6$.

$\ell(3K) = 5g-5 = 10$

$\ell(4K) = 7g-7 = 14$. $\quad \dim \mathbb{C}[X,Y,Z]_4 = 15$.

quindi i polinomi di grado 4 valutati in $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ soddisfano una relazione.

Questa è la quartica cercata.

(*) SUPPLEMENTO

Una superficie di Riemann Compatta, si può ottenere come desingolarizzazione di una curva algebrica piana. (Altro modo)

Sia D effettivo $\deg(D) \geq 2g+1$.

$\varphi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^{d-g}$ è immersione.

immagine è una curva algebrica (varietà di dim 1)

Adesso se $d-g \geq 4$.

Possiamo proiettare da un punto P di $\mathbb{P}^{d-g}$ in $\mathbb{P}^{d-g-1}$.

$\varphi_D(X) \longrightarrow Y$.

l'applicazione non è un'immersione se la retta per P è secante (2 punti) oppure tangente a X.

Le possibili secanti di X sono parametrizzate da 2 punti p, q di X quindi abbiamo ∞^2 secanti e ogni retta secante ha ∞^1 punti.

Abbiamo inoltre ∞^1 tangenti (una per ogni $p \in X$) e ogni tg ha ∞^1 punti

Sia $Z = \left\{ p \in \mathbb{P}^{d-g} \,/\, \begin{array}{l} p \text{ è in una secante} \\ \text{o in una tg di } X \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{P}^{d-g}$

Se $d-g \geq 4$ Z è un sottoinsieme proprio

Se proiettiamo da un punto che non appartiene a Z.

abbiamo che $\Phi_D(X) \cong Y$. Ripetendo questo argomento abbiamo $Y \cong \Phi_D(X) \subseteq \mathbb{P}^3$

Quando proiettiamo da $\mathbb{P}^3$ a $\mathbb{P}^2$ possiamo evitare le tangenti, ma possiamo avere qualche secante.

Allora l'immagine è ~~una~~ genericamente 1-1 e può avere # finito di punti singolari (Ecco le curve piane).