Si consideri la curva

$$\mathcal{C} = \{[X,Y,Z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,/\, Z^2+X^2+XY=0\}.$$ (1)

Verificare che $\mathcal{C}$ è non singolare. Dare un isomorfismo esplicito con $\hat{\mathbb{C}}$.

$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap U_0 = \{(y,z) \,/\, z^2+y+1=0\}$ è non singolare. Gli altri punti di $\mathcal{C}$ sono in $\mathcal{C} \cap \{X=0\}$

$P_0 = [0,1,0]$ Allora $(0,0) \in \mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cap U_1 = \{(x,z) \,/\, z^2+x^2+x=0\}$ è non singolare quindi la curva $\mathcal{C}$ è non singolare

di genere $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) = 0$. $(d=2)$

La retta $X=0$ interseca $\mathcal{C}$ nel punto $[0,1,0]$ (con molteplicità 2, i.e. è la tangente). La retta di equazione $Z=0$ interseca $\mathcal{C}$ in $[0,1,0]$ e $[1,-1,0]$

Allora $Z/X : \mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ è un isomorfismo analitico perché ha un polo e uno zero.

Inoltre (Non serve) posto $x=1$, $z=\alpha$. abbiamo $y=-1-\alpha^2$.

<u>Esercizio</u> : Sia $f: S \longrightarrow S'$ un'applicazione analitica tra due superfici di Riemann compatte di genere g e g'. Verificare che vale la formula di Hurwitz generalizzata.

$$(2g-2) = (2g'-2)n + R_f.$$

Sia $g(S)=g+1$ $g(S')=g$. Verificare per quali valori di g esiste f analitica non costante.

Parte 1: Sia $h: S' \to \hat{\mathbb{C}}$ una funzione meromorfa ovviamente $h \circ f$ è una funzione meromorfa su S. possiamo quindi costruire un rivestimento da $S \setminus \{\text{punti}\} \to S' \setminus \{\text{punti}\}$ di grado $\deg(h \circ f) / \deg(h)$ e poi procedere come nel caso di $S' = \hat{\mathbb{C}}$.

Adesso in generale abbiamo

$$2g = n(2g-2) + R_f \qquad n \geq 2.$$

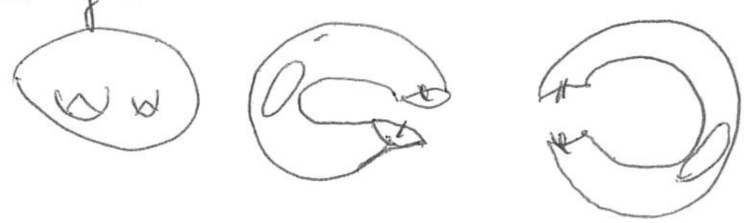
Quindi $2g \geq (2g-2)n \geq 4g-4$ se $g \geq 2$.

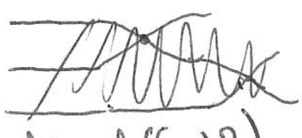
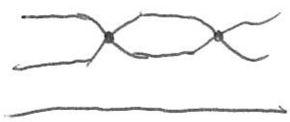
Quindi $g=2, n=2$. $R_f = 0$.

Invece $g=1$ n qualunque $R_f = 2$

$g=0$ n qualunque $R_f = 2n$.

Esempio $g=2$ $S \longrightarrow S'$ rivestimento doppio

$S' =$  incollo e ottengo S

$g=1$  

$f \in \mathcal{L}((n-1)P)$

$g=0$ $f \in \mathcal{L}(nP)$ $P \in E = \mathbb{C}/\Lambda$

$f: E \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ rivestimento ramificato di grado n

Esercizio:

Sia $X = \hat{\mathbb{C}}$ assegnati i punti $p_0 = [0,1] = 0$, $p_1 = [1,1] = 1$ (3)

$p_\infty = [1,0] = \infty$.

Calcolare la dimensione di $L(p_0 + p_1 - p_2)$

Scrivere esplicitamente una base di $L(p_0 + p_1 - p_2)$

Usiamo il teorema di Riemann Roch sapendo che $\deg K = -2$.

$\ell(p_0 + p_1 - p_2) - \underbrace{\ell(K - p_0 - p_1 + p_2)}_{0} = 1 - g + 1 = 2$.

$\ell(p_0 + p_1 - p_2) = 2$. Adesso $\left(\frac{1}{z}\right) = [\infty] - [0]$

$D = p_0 + p_1 - p_2 = [0] + [1] - [\infty]$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{z} \in \mathcal{L}(D)$

anche $\frac{1}{z-1} \in \mathcal{L}(D)$ $\qquad$ $\frac{1}{z}, \frac{1}{(z-1)} \in \mathcal{L}(D)$

Osservazione $\frac{1}{(z-1)z} \in \mathcal{L}(D)$ infatti $\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}$

Esercizio: Si consideri la curva $\mathcal{C} = \{[X,Y,Z] / X^4 - Y^4 + Z^4 = 0\}$

Sia $p = [0, i, 1]$ Calcolare $\ell(np)$ $n \geq 0$

Quartica piana: Problema 1 $4p = K$. ?

Come procedere: Calcolare la tangente a p della curva

Considero la curva affine $-X^4 + Y^4 = 1$. Calcolo la tangente in $(0, i)$

$y - i = 0$ Allora tangente in $\mathbb{P}^2$

$Y - iZ = 0$

La tangente interseca la curva $\mathcal{C}$ in $4P$.

Quindi $\ell(4P) = 3$. Inoltre

$$\ell(nP) - \ell(K - nP) = n - 3 + 1 = n - 2.$$

Quindi $n \geq 5$ $\quad \ell(nP) = n - 2$.

Adesso $\ell(0) = \ell(P) = 1$.

$$\ell(3P) - \ell(K - 3P) = \ell(3P) - \ell(P) = 1 \Rightarrow \ell(3P) = 2.$$

Inoltre la quartica piana (come tutte le curve piane di grado $d \geq 4$) non è iperellittica, quindi

$$\ell(2P) = 1.$$

<u>Esercizio</u> Si consideri la curva

$$\mathcal{C} = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,/\, X^3 + Y^3 - Z^3 = 0\}$$

Si consideri su $\mathcal{C}$ la funzione meromorfa

$$f = \frac{Y^2 + YZ + Z^2}{X^2}.$$

Calcolare i poli e gli zeri di f.

Trovare i punti di ramificazione

<u>Soluzioni</u> 1) "più difficile"

Poli $X = 0 \Rightarrow Y^3 = Z^3$ allora abbiamo poli potenziali

$P_\rho = [0, 1, \rho]$, $\rho^3 = 1$ ognuno con molteplicità 2.

Zeri $Y^2+YZ+Z^2=0 \Rightarrow Y^3-Z^3=0$

quindi $X=0$ con molteplicità 3. Adesso i

punti P_ρ soddisfano $Y^2+YZ+Z^2=0 \iff \rho \neq 1$.

Quindi $P_1=[0,1,1]$ polo doppio e i rimanenti P_{ρ_1}, P_{ρ_2}

sono zeri semplici. Rivestimento doppio.

2) Più facile $f=\dfrac{Y^2+\cancel{X}Y+Z^2}{X^2}=\dfrac{X}{Z-Y}$.

Quindi si può considerare questa funzione

che ha potenziali zeri semplici ~~in~~ nei punti P_ρ.

e un polo triplo potenziale in P_1 ✓ quindi O.K.

Possiamo vedere quando ramifica. Poniamo $X=\alpha$. e $Z-\cancel{Y}=1$.

$Z=Y+1$ Abbiamo $\alpha^3+Y^3-(Y^3+3Y^2+3Y+1)=0$

Quando $3Y^2+3Y+1+\alpha^3$ ha radici multiple.

$$9-12(1+\alpha^3)=0 \quad \Rightarrow 12\alpha^3=3$$

$4\alpha^3=1.$ $\alpha^3=1/4.$

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Punti di ramificazione $[0,1,1]$, $[\alpha,-1/2,1/2]$

$\alpha=\left(\sqrt[3]{1/4}\right)\rho$

OK $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)=0$

Sia $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \hat{\mathbb{C}}$ $\quad p_1 = [3,1] = 3 \quad p_2 = [4,1] = 4$.

Scrivere esplicitamente una base di $\mathcal{L}(p_1 - p_2)$

Scrivere esplicitamente una base di $\mathcal{I}(-p_1 - p_2)$

Soluzione: Usando Riemann Roch vediamo

$\ell(p_1 - p_2) = i(-p_1 - p_2) = 1$. Veramente si può

~~se~~ ottenere questo risultato sapendo che

~~$f \in \mathcal{O}$~~ $\deg(f) = 0$ e $\deg(\omega) = -2$.

$f = \left(\frac{z-4}{z-3}\right) \qquad (f) = [4] - [3] = p_2 - p_1 \quad f \in \mathcal{L}(p_1 - p_2)$

Invece $\left(\frac{dz}{(z-3)(z-4)}\right) = (dz) + \left(\frac{1}{(z-3)(z-4)}\right) = -2[\infty] + 2[\infty] - p_1 - p_2$

$= -p_1 - p_2$.

$\wedge$

$\mathcal{I}(-p_1 - p_2)$.

<u>Esercizio</u> Verificare che le superfici di Riemann compatte di genere 4 non possono essere rappresentate come curve proiettive piane non singolari

Verificare che possono essere immerse in $\mathbb{P}^n$

$n \geq 5$

(7)

<u>Soluzione</u>: Se X è rappresentabile come una curva algebrica proiettiva non singolare $\Rightarrow g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, ma $4 \neq \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \quad \forall\, d \in \mathbb{N}$.

Ovviamente se X non è iperellittica $\Rightarrow$ l'applicazione canonica immerge X in $\mathbb{P}^3$. In generale quindi va bene. Ma X potrebbe essere iperellittica in questo caso possiamo prendere D divisore effettivo di grado 9

$$\varphi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^5$$ è sempre un'immersione regolare.

Sia X la superficie di Riemann compatta associata alla curva C di equazione $y^4 = x^3 - x^2$.

1) Desingolarizzare la proiettificazione della curva C.
2) Sia f la funzione meromorfa su X indotta da y/x. Trovare i punti di ramificazione di f e calcolare il genere di X.

Il completamento proiettivo della curva $\mathcal{C}$ è dato dall'equazione $Y^4 - X^3 Z + X^2 Z^2 = 0$.
Si verifica facendo dei conti che il punto $[0,0,1]$ è l'unico punto singolare.
Localmente abbiamo
$$y^4 = x^3 - x^2 \qquad \text{posto } x = yt$$

dopo uno scoppiamento abbiamo $y^2 = yt^3 - \cancel{t}^2$
allora il punto $(y,t) = (0,0)$ è ancora singolare scoppiando di nuovo otteniamo

$$yu = t \qquad \left\{ 1 + u^2 + y^2 u^3 = 0 \right.$$

che interseca la retta eccezionale nei punti
$y=0$ $u = \pm i$ $(y,u) = (0, \pm i)$.
Adesso consideriamo l'applicazione analitica indotta da $y/x = \frac{1}{t}$ localmente quindi entrambi i punti finiscono in $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$.
Sono 2 poli.
Nota i poli sono solo lì. Infatti posto $x=0$ otteniamo $y=0$ con molteplicità 4, quindi

Potenzialmente poli doppi, ma. $y=0$

$\Rightarrow x=0$ con molteplicità 2 e poi $[1,0,0]$ e $[1,0,e$

Quindi 2 poli e 2 zeri semplici

Possiamo quindi togliere i punti singolari e considerare

$x=1 \quad y=\alpha$ e contare le ~~le~~ soluzioni

Abbiamo $z^2-z+\alpha^4$.

Di solito abbiamo 2 radici distinte tranne quando

$z = 1/2$ e $1-4\alpha^4=0 \qquad \alpha^4 = \frac{1}{4}$

Quindi

$$2g-2 = -4+4 = 0 \quad \Rightarrow g = 1.$$

Esercizio Sia C la superficie di Riemann della curva algebrica piana

$$C_0 = \{(x,y) \, x^5+y^5-1=0\}$$

Calcolare il genere di C. Verificare che $10Q$ è un divisore canonico $Q=[0,1,1]$

Sia $P=[1,0,1]$ calcolare $\ell(10(P-Q))$ e $\ell(5(P+Q))$

Il completamento proiettivo della curva è
$X^5+Y^5-Z^5=0$. Curva piana non singolare di
genere 6. ~~Ha~~ Un divisore canonico ha grado 10.

Le curve di grado 2 tagliano i divisori canonici.
La retta tangente a Q ha equazione $Y-Z=0$ e
interseca la curva esattamente in $5Q$.
Adesso $(Y-Z)^2=0$ interseca la curva in $10Q$ che
è quindi un divisore canonico.
In modo simile si calcola che la tangente a P ha
equazione $X-Z=0$, quindi anche $10P$ è un
divisore canonico. $10P \sim 10Q$, quindi
$10P-10Q \sim 0$ e $\ell(10(P-Q))=1$.

Inoltre $5(P+Q)$ è un divisore canonico, tagliato da
$(Y-Z)(X-Z)=0$. quindi $\ell(5(P+Q))=6$.

Oppure
$$\ell(5(P+Q))-\ell(K-5(P+Q))=10-6+1=5$$
$$\ell(5(P+Q))-\ell(5P-5Q)=5$$
$$\ell(5P-5Q)=1.$$
Adesso $5P \sim 5Q$ e quindi