

Varietà topologiche

(1)

Le varietà topologiche sono degli spazi topologici di Hausdorff che localmente somigliano a \mathbb{R}^n

Sia X uno spazio topologico una carta (di dim n)
è un omeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ $U \subseteq X$
aperto

Una varietà topologica di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff che ammette un ricoprimento in carte di dim n .

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \quad \varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto}$$

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ è un atlante.

Esempio: $S^n = U_1 \cup U_2 \quad \varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ omeom

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i \quad \varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$[x_0 \dots x_i \dots x_n] \rightarrow \left[\frac{x_0}{x_i} \dots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_n}{x_i} \right]$$

Una superficie S è una varietà topologica di dim 2.

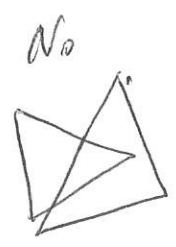
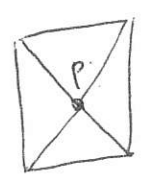
Un triangolo $T \subseteq S$ è l'immagine

$$\varphi: \Delta_2 \rightarrow S \quad \varphi \text{ omeomorfismo}$$

Si dicono vertici (e lati) di T le immagini via σ dei vertici (e lati) di Δ_2 .

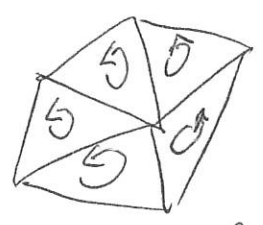
Una triangolazione di una superficie topologica S consiste di una famiglia numerabile $\{T_1, \dots, T_n, \dots\}$ di triangoli in S che soddisfa le seguenti proprietà

- a) $S = \cup T_i$
- b) Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset \Rightarrow$ hanno in comune ^{esattamente} un vertice oppure un lato
- c) $\forall p \in S \exists$ un intorno di p che incontra solo un numero finito di triangoli della triangolazione.



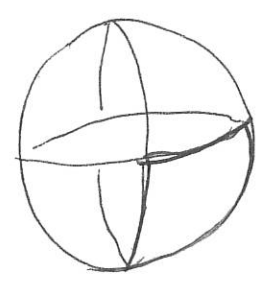
Oss: è implicito che i vertici di una triangolazione sono un insieme di punti isolati.
 Quindi S compatto $\Leftrightarrow \#$ finito di triangoli.

Una superficie triangolata si dice orientabile se è possibile orientare i triangoli in modo che triangoli adiacenti hanno orientazione opposta



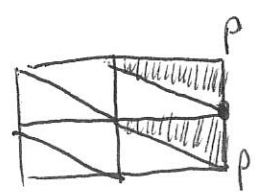
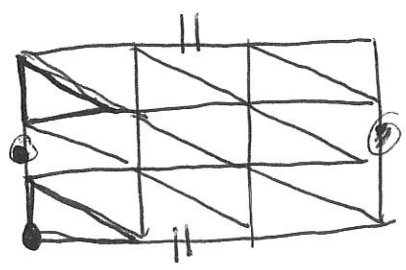
Esempi di superfici compatte triangolabili:

1) Sfera

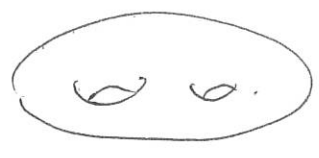
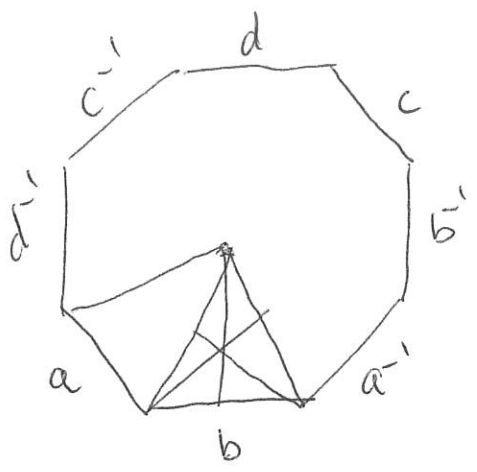


Unione di 8 Triangoli

2) T_2 toro con un buco



non è una triangolazione
 $T_2 \quad t_1 \cap t_2 = 2 \text{ punti}$



Triangolazione

Affermazione: Una superficie compatta triangolare è omeomorfa S^2 oppure ai tori



Sia $\{T_1, \dots, T_n\}$ una triangolazione.

Prendiamo T_1 e poi uno adiacente T_2 e così via. ce ne sarà sempre uno perché la superficie non ha bordi

Alla fine otterremo un poligono che è in relazione con la superficie nel modo seguente

Ogni lato del poligono dovrà essere identificato a uno e ^{uno} solo ~~uno~~ lato del poligono stesso.

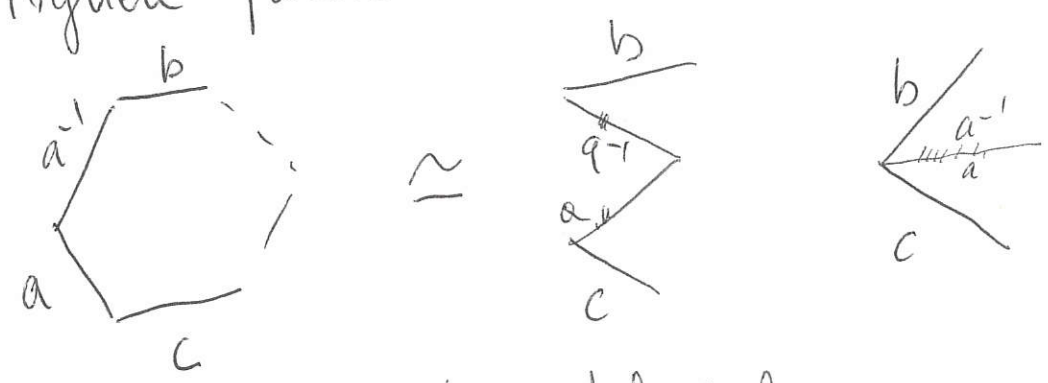
Insomma i lati sono pari e ordinati cicolicamente come

⊕ $aba^{-1}cdc^{-1}e \dots b^{-1}$

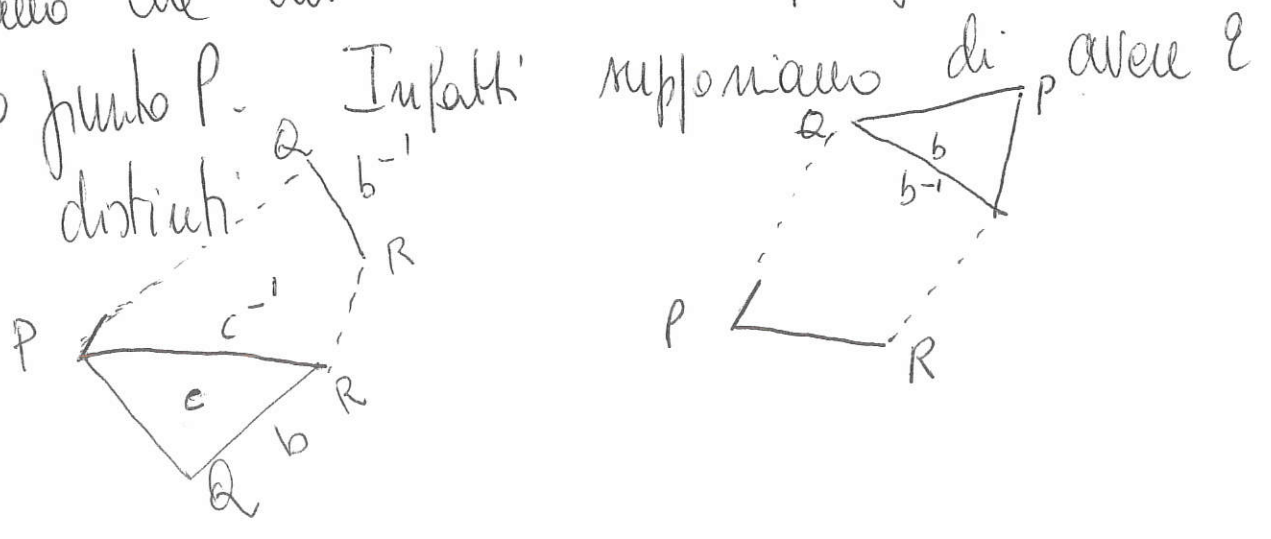
Quindi possiamo dire che S è omeomorfe a un poligono con $2n$ lati con identificazioni date dal simbolo \otimes (5)

Sappiamo che S non è una sfera. Vogliamo vedere che è omeomorfe a un poligono con $4g$ lati e con simbolo \otimes $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g^{-1} b_g^{-1}$ $g \geq 1$

Passo 1
 Sappiamo quindi di avere una scrittura come in \otimes se a_i sono espressioni come aa^{-1} le possiamo togliere perché



Passo 2
 Assumiamo che tutti i vertici del poligono sono lo stesso punto P . Infatti supponiamo di avere 2 vertici distinti Q, R .

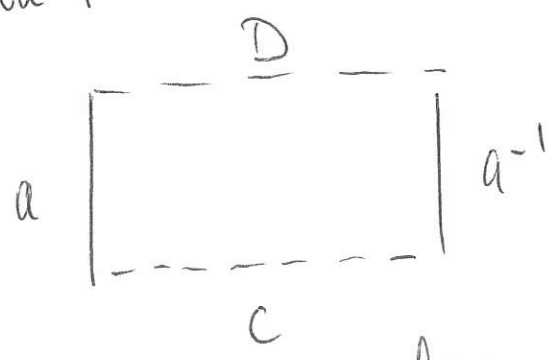


Diminuiscono i Q vertici e aumentano i P vertici. Iterando o.k.

Passo 3
Sia a un lato vediamo che esiste un b t.c.

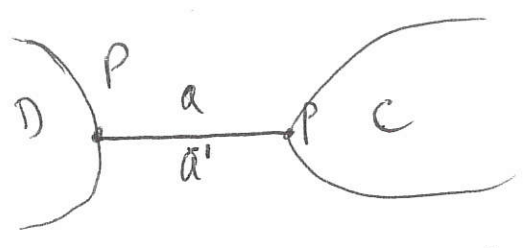
--- a --- b --- a^{-1} --- b^{-1} ---

Se non fosse con avremmo



dove in D
e C ci sono
tutte coppie
identificate

Quindi avremmo qualche tipo

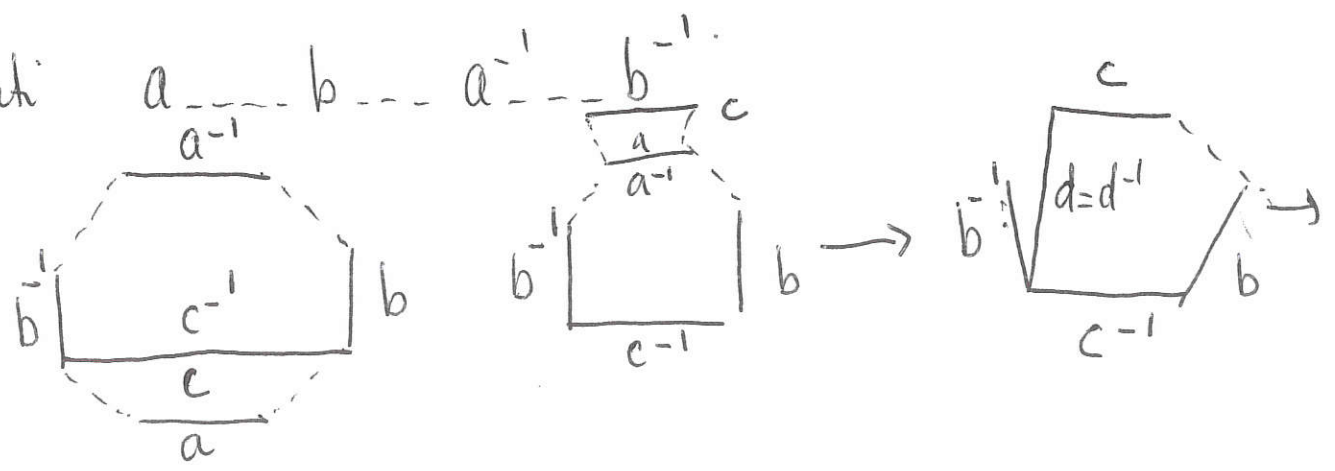


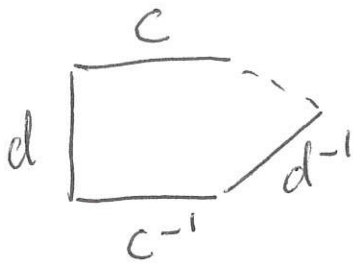
Identifichiamo i 2 vertici di a .

Intorno a P nella di omeomorfismo ad un disco di \mathbb{R}^2

Passo 4: Se abbiamo $aba^{-1}b^{-1}$ o.k.

altrimenti





I lati non sempre gli stessi

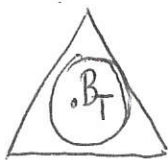
me abbiamo $c d c^{-1} d^{-1}$, Iterando
abbiamo il risultato finale

Adesso vediamo che qualunque sia il numero di
vertici lati e triangoli di una triangolazione
si ha $v - l + t = 2 - 2g$.

Sia S compatte triangolata orientata. \mathcal{T} una
triangolazione $\chi(\mathcal{T}) = v(\mathcal{T}) - l(\mathcal{T}) + t(\mathcal{T})$.
non dipende da \mathcal{T} .

$$V = \{\text{vertici}\} \quad L = \{\text{lati}\} \quad \tilde{T} = \{\text{triangoli}\}$$

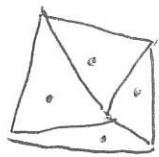
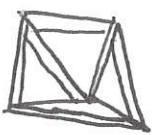
Applichiamo Mayer Vietoris.



\forall triangolo T , B_T barycentro
 $B_T \in D_T \subseteq \overline{D_T} \subset \Delta_T$
 ↑ disco.

$$A = \bigcup_T \{B_T\}$$

$$B = \bigcup_T \Delta_T$$

$A \cong$  \sim  $\sim L$ uno scheletro 8

$$B \cong \bigsqcup_T B_T$$

$$A \cap B \cong \bigsqcup_T S_T^1$$

Allora abbiamo la seguente successione esatta

$$0 \rightarrow H_2(L) \rightarrow H_2(S) \rightarrow H_1\left(\bigsqcup_T S_T^1\right) \rightarrow H_1(L)$$

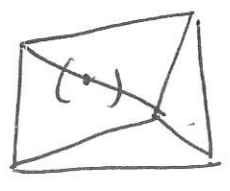
$$\mathbb{R} \leftarrow H_0(S) \leftarrow H_0\left(\bigsqcup_T B_T\right) \oplus H_0(L) \leftarrow H_0\left(\bigsqcup_T S_T^1\right) \leftarrow H_1(S)$$

$R = K$ campo

$$h_2(L) - 1 + t - h_1(L) + 2g - t + (1+t) - 1 = 0$$

$$h_2(L) - h_1(L) = 1 - 2g - t$$

Omologia di L



$\forall l \in L$ lato Sia C_e il centro I_e un intervallo contenente

Aperti $C = L \setminus \cup C_e$, $D = \cup I_e$

$$C \sim V$$

$$D \simeq \coprod_l C_l$$

$$C \cap D \simeq \coprod_l S_l^0 \quad S_l^0 = \{2 \text{ punti}\}$$

Mayer Vietoris.

$$0 \rightarrow H_2(L) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H_1(L) \rightarrow H_0(\coprod_l S_l^0) \rightarrow H_0(V) \oplus H_0(\coprod_l C_l) \rightarrow H_0(L) \rightarrow 0$$

$$h_2(L) = 0 \quad h_1(L) - 2l + (v+l) - 1 = 0$$

Sostituendo abbiamo

$$v - l + t = 2 - 2g$$

Esercizio $T_2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ calcolare $X = \mathbb{R}^3 \setminus T_2$
 $H_k(X, \mathbb{R})$

X ha 2 componenti ^{aperte} connesse per archi.
 A l'interno di T_2 e B l'esterno di T_2 .

$$A \simeq S^1 \text{ e sappiamo } H_k(A, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0,1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$B = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{T}_2$ \bar{T}_2 e il toro "pieno"

Adesso V un toro pieno aperto contenente T_2 (10)

Allora abbiamo $V \sim S^1$.

$$\mathbb{R}^3 = B \cup V \quad B \cap V \sim T_2.$$

Quindi

$$0 \rightarrow H_2(T_2) \rightarrow H_2(B) \oplus H_2(V) \rightarrow H_2(\mathbb{R}^3)$$

$$H_2(B) \cong \mathbb{R}.$$

$$0 \rightarrow H_1(T_2) \rightarrow H_1(B) \oplus H_1(V) \rightarrow 0$$

$\mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$

Quindi $H_k(B) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0,1,2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & k=0,1 \\ \mathbb{R} & k=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio: Omologia di

X ottenuto identificando 2 punti in una superficie compatta di genere 2.



$$X = A = X \setminus \{pt\} \sim S \setminus \{2 \text{ punti}\}$$

$B =$ intorno del punto.

$$H_k(A) = \begin{cases} \mathbb{R}^5 & k=1 \\ \mathbb{R} & k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(11)

$$H_k(B) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$B \sim \text{pto.}$

$$A \cap B = S^1 \sqcup S^1$$

$$H_k(A \cap B) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & k=0,1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_2(X) & \rightarrow & H_2(A \cap B) & \rightarrow & H_1(A) & \rightarrow & H_1(X) \\ & & & & \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^5 & & \downarrow \\ & & & & & & & & H_0(A \cap B) \\ & & & & & & & & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ 0 & \leftarrow & H_0(X) & \leftarrow & H_0(A) \oplus H_0(B) & \leftarrow & & & \\ & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & & & & \end{array}$$

$$h_2(X) - h_1(X) = -1$$

Adesso $H_2(A \cap B) \rightarrow H_1(A)$
 $\gamma, \delta \rightarrow \gamma, -\gamma$

quindi nucleo di
dimensione 1

$$h_2(X) = 1, \quad h_1 = 5$$

Calcolare l'omologia di $X = S^1 \vee S^3$

(18)

$$U = S^3 \vee \{$$

$U \cap V \sim \text{pto.}$

$$V = S^1 \vee \{$$

$$H_k(U \cap V) = 0 \quad k \geq 1.$$

$$H_k(X) \cong H_k(S^1) \oplus H_k(S^3) \quad \underline{k \geq 2}$$

$k=1$

$$0 \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0$$

$$\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}$$

$$0 \rightarrow H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \rightarrow H_0(X) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

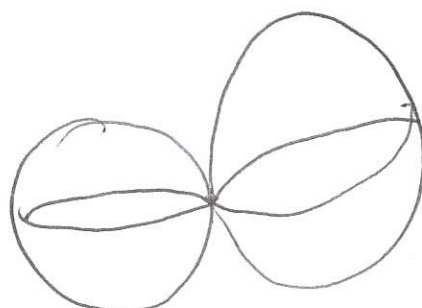
Calcolare omologia

$$\left\{ [x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid xy = 0 \right\} = X_1$$

$$\left\{ [x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid xy \neq 0 \right\} = X_2$$

$$X = 0 \cong \overline{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$$

$$X \cdot Y = 0$$



X_2

Debbo togliere a $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ $\{X=0 \cup Y=0\}$

Questi sono omeomorfi a \mathbb{P}^1 e intersezione è un punto

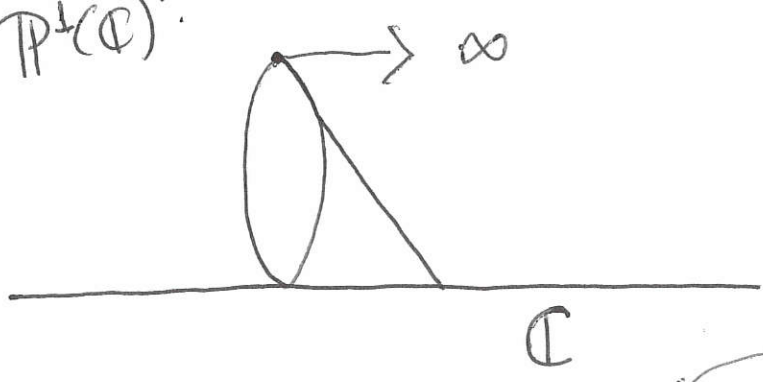
$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{X=0\} = \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ $\mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \setminus \{Y=0\} =$
- punto

$\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \sim S^2$

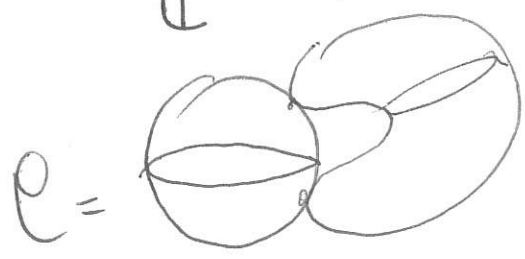
$C = \left\{ [X, Y, Z] \mid X(X^2 + Y^2 - Z^2) = 0 \right\}$

$X=0$ è una copia di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$

$(X^2 + Y^2 - Z^2) = 0 \sim \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è una curva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$



Ma adesso abbiamo



$$C = U \cup V$$

$$U = S^2 \vee D_1.$$

stesso per V .

(44)

$$U \cap S^2 \simeq V \quad U \cap V \simeq \{p, q\}.$$

$$H_k(C, \mathbb{Z}) = 0 \quad k \geq 3.$$

$$0 \rightarrow H_2(S^2, \mathbb{Z}) \oplus H_2(S^2, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X) \rightarrow 0$$

$\mathbb{Z} \qquad \qquad \mathbb{Z}$

$$0 \rightarrow H_1(X) \xrightarrow{\delta_*} \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q \xrightarrow{\alpha_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta_*} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$(a \cdot p, b \cdot q) \rightarrow (a+b, -a-b)$

$$\ker \delta_* = (ap, -aq) \cong \mathbb{Z} = \text{Im } \delta_*.$$

$$H_1(X) \cong \mathbb{Z}$$

Varietà

Sappiamo cosa è una varietà topologica, i.e. uno spazio topologico localmente omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \quad \varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ omeomorfo}$$

$$\phi \neq U_\alpha \cap U_\beta$$

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \text{ omeomorfo.$$

X è una varietà differenziabile di dim n se è una varietà topologica di dim n e se ha un atlante

$$A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \text{ t.c. } \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^\infty(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))$$

Si richiede che tale atlante sia massimale nell'unione degli atlanti con queste proprietà

Come si ottiene $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ appartiene a $\tilde{A} \Rightarrow$.

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \text{ è } C^\infty.$$

Data X varietà differenziabile ^{quando} (U, φ) è una carta definisce la struttura differenziale di X .

(U, φ) è detto anche un sistema di coordinate

locali

$$\varphi : \begin{matrix} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & (x_1(p) \dots x_n(p)) \end{matrix}$$

È possibile su una varietà topologica avere due strutture diff. diverse (non paragonabili) gli atlanti massimali.

1984 Freedman Strutture "esotiche" su \mathbb{R}^4 .

Varietà differenziabili sono gli oggetti della nostra categoria. Maxima?

X, Y varietà differenziabili. Un'applicazione $f: X \rightarrow Y$ si dice differenziabile C^∞ .

se soddisfa le seguenti proprietà U, φ, V, ψ carte locali t.c. $f(U) \subseteq V$:

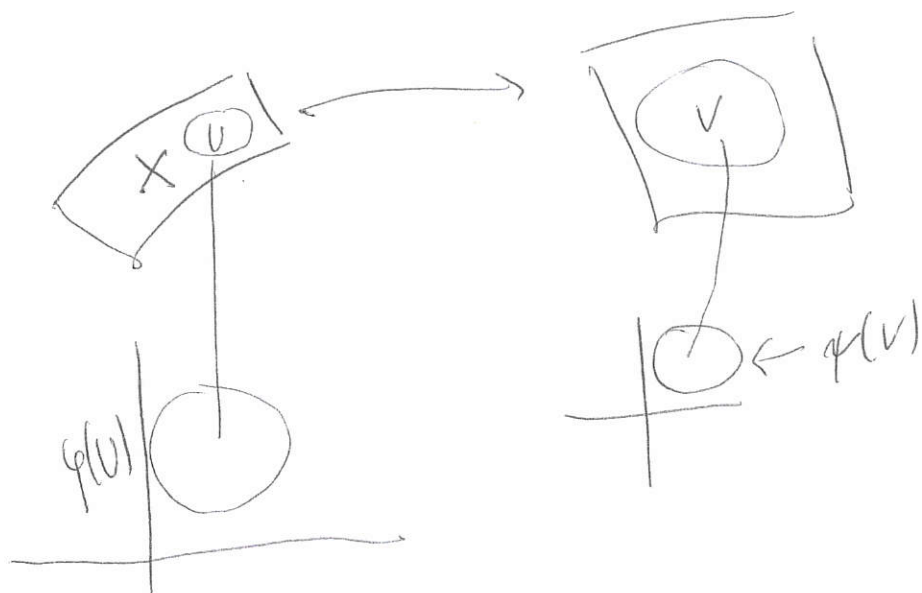
l'applicazione $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ è C^∞ .

quindi se $\varphi(p) = (x_1(p) \dots x_n(p))$

$f(p) = q \quad \psi(f(p)) = (y_1(q) \dots y_m(q))$

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1 \dots x_n) = (y_1(x_1 \dots x_n) \dots y_m(x_1 \dots x_n))$

Richiediamo $y_1 \dots y_m$ sono C^∞ in $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$



Si dice ~~se~~ che $f: X \rightarrow Y$ è un diffeomorfismo se f ha un'inversa $(f^{-1}) \in C^\infty$.

Una varietà complessa di dimensione (complesse) n è una varietà diff X di dim $2n$ con un atlante

$$A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \quad \varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \text{ è analitica}$$

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (w_1(z_1, \dots, z_n), \dots, w_n(z_1, \dots, z_n))$$

olomorfe.

Atlante massimale etc. --

Una varietà complessa di dim 1 si dice Superficie di Riemann

Domande

- 1) X, Y varietà complesse possono essere diffeomorfe (18)
ma non analiticamente equivalenti?
- 2) X varietà diff ha sempre una struttura di varietà analitica
- 3) X varietà complesse quante strutture complesse sulla stessa varietà diff. sottostante?
- 4) Date 2 varietà differenziabili possono essere omeomorfe ma non diff.
- 5) Date varietà top. possono sempre dotarle di una struttura differenziabile?
- 6) Date una varietà topologica "quante" strutture diff. possono essere introdotte

Esempi:

Esempi

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

$$A = \{ (U, \varphi) \quad (V, \psi) \}$$

$$U = S^1 - \{1\} \quad V = S^1 - \{-1\}$$

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R} \\ z = e^{i\theta} \rightarrow \theta \in (0, 2\pi)$$

$$\psi: V \rightarrow \mathbb{R} \\ z \rightarrow (-\pi, \pi)$$

$$\psi\varphi^{-1}: (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \rightarrow (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \\ \theta \rightarrow \begin{cases} \theta \in (0, \pi) \\ \theta - 2\pi \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Varietà complessa.

$$U = \mathbb{C} \quad V = \hat{\mathbb{C}} - \{0\}$$

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{C} \\ z \rightarrow z$$

$$\psi: V \rightarrow \mathbb{C} \\ z \rightarrow \frac{1}{z} \\ \infty \rightarrow 0$$

$$\psi\varphi^{-1}: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \rightarrow \frac{1}{z}$$

oboviene perché $\frac{1}{z} \neq 0$.
Per un polo in $z=0$.

$$F \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

I per superficie
20

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) \mid F(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

X con topologie indotte

Assumiamo che in $p = (a_1, \dots, a_n) \in X$ $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0$ per qualche i

Quindi esiste un intorno $W \ni p$.

e un intorno A di $(a_1, \dots, \hat{a}_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$

e $h \in C^\infty(A)$ t.c. $\forall (y_1, \dots, y_{n-1}) \in A$.

$$F(y_1, \dots, y_{i-1}, h(y_1, \dots, y_{n-1}), y_{i+1}, \dots, y_{n-1}) = 0$$

Inoltre ogni punto $(x_1, \dots, x_n) \in W$ t.c. $F(x_1, \dots, x_n) = 0$

è della forma $(x_1, \dots, x_{i-1}, h(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n)$

con $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \in A$

Interpretazione geometrica

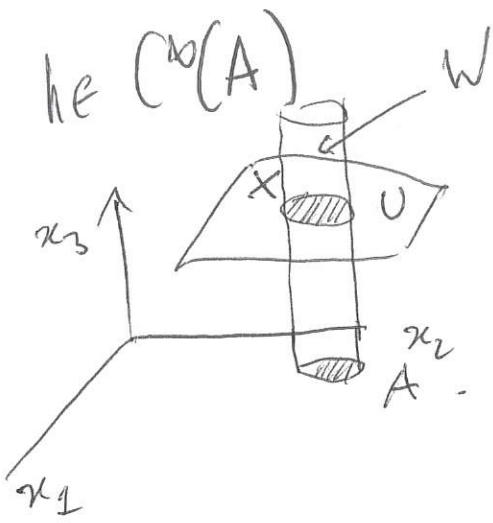
$$\pi^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$$

Allora esiste un intorno A di $\pi^i(p)$ e un intorno $U \ni p$ $X \supseteq U$

$\pi^i|_U: U \rightarrow A$ è un omeomorfismo.

$$(\pi^i|_U)^{-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = (y_1, \dots, y_{i-1}, h(y_1, \dots, y_{n-1}), \dots, y_{n-1})$$



(U, π_U^i) è una carta locale.

Supponiamo vero $\forall p \in X$.

Consideriamo 2 carte locali:

$$(V, \pi_V^j) \quad \pi_V^j \circ \pi_U^{i-1} : \pi_U^i(U \cap V) \rightarrow \pi_V^j(U \cap V)$$

$$\xrightarrow{L \neq 1} (y_1 \dots y_{n-1}) \rightarrow (y_1 \dots \hat{y}_j, h(y_1 \dots y_{n-2}) \dots y_{n-1})$$

è ovviamente C^∞

se $i=j \Rightarrow$ l'applicazione è l'identità.

Esempi di ipersuperfici: le sfere S^n .

Infatti in ogni punto $\exists i: \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0$.

Adesso che S^n ha una struttura di varietà complessa ($n=2m$) N_0 $n \neq 2, 6$.

S^6 aperto

Sottovarietà di \mathbb{R}^n (22)
definite da $m \leq n$ equazioni X definite da

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\forall p \in X \text{ ok } \left(\frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \right) (p) = m.$$

Traduciamo quanto fatto prima

$$\pi^I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \text{ la proiezione}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i_m}, \dots, x_n)$$

Allora esiste un intorno A di $\pi^I(p)$ e un intorno $U \ni p$

$$\text{t.c. } \pi^I|_U : U \rightarrow A \text{ omeomorfo}$$

$$(\pi^I)^{-1}(y_1, \dots, y_{n-m}) = (y_1, \dots, h_{i_1}(y_1, \dots, y_{n-m}), \dots, h_{i_m}(y_1, \dots, y_{n-m}), \dots, y_{n-m})$$

h_{i_k} sono C^∞ e quindi ok.

Esempio in \mathbb{R}^3

$$X = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{cases} y - x^2 = 0 \\ xy - z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\text{matrice jacobiana } \begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ y & x & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango massimo
quindi ok

Note

$$X \cong \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
 \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (x, y, z) &\longrightarrow x \\
 (t, t^2, t^3) &\longleftarrow t
 \end{aligned}$$

Subvarietà complesse definite da $m \leq n$ equazioni

$$F_1(z_1, \dots, z_n) = \dots = F_m(z_1, \dots, z_n) = 0$$

F_i analitiche Caso di una variabile

$$\begin{aligned}
 f(z) &= u(x, y) + i v(x, y) \\
 \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2
 \end{aligned}$$

$$X = \left\{ (z, w) \mid F(z, w) = 0 \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 F \text{ analitica} \quad z &= x + iy \\
 w &= \xi + i\eta
 \end{aligned}$$

$$F(z, w) = u(x, y, \xi, \eta) + i v(x, y, \xi, \eta)$$

$$F(z, w) = 0 \iff u(x, y, \xi, \eta) = v(x, y, \xi, \eta) = 0$$

Supponiamo che in p $\frac{\partial F}{\partial w}(p) \neq 0$.

(23)

$$\left| \frac{\partial F}{\partial w}(p) \right|^2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}(p). \quad p = (a+ib, \alpha+i\beta)$$

dunque per il teorema delle funzioni implicite
abbiamo esiste un intorno $A \subseteq \mathbb{R}^2$ di a, b t. c.

$$\xi(a, b) = \alpha \quad \eta(a, b) = \beta.$$

$$u(x, y, \xi(x, y), \eta(x, y)) = v(x, y, \xi(x, y), \eta(x, y)) = 0$$

Oppure che $A \subseteq \mathbb{C}$ intorno di $a+ib$

$$\exists h(z, \bar{z}) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$$

$$F(z, h(z, \bar{z})) = 0. \quad h \in C^\infty(A)$$

Ricerchiamo che intorno a un punto una funzione
 $f(z)$ è olomorfa se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Allora deriviamo rispetto a \bar{z} .

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \quad \text{adesso } \frac{\partial F}{\partial w}(p) \neq 0$$

allora intorno a p $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$. h è olomorfa

quindi abbiamo

$$\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{proiezione}$$

$$(z, w) \mapsto z$$

$$\pi^{-1}(z) = (z, h(z)) \quad \forall z \in A, \quad \text{con } h \in \mathcal{O}(A).$$

Quindi se una delle 2 derivate $\bar{\partial} \neq 0$ abbiamo una struttura di varietà complesse di dim 1. (i.e. una superficie di Riemann).

$$X = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^m + w^m = 1 \}$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = m w^{m-1}$$

$\Rightarrow X$ è non singolare

$$\frac{\partial F}{\partial z} = m z^{m-1}$$

\Rightarrow è una superficie di Riemann

In verità $F(z, w) = 0$ è una curva non singolare \Rightarrow abbiamo una superficie di Riemann.

$F(z_1, \dots, z_n) = 0$ in cui almeno una derivata $\bar{\partial} \neq 0$ produce un'ipersuperficie non singolare varietà complessa di dim $n-1$.

Come nel caso reale

$$F_1(z_1, \dots, z_m) = \dots = F_m(z_1, \dots, z_m) = 0$$

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(z_1, \dots, z_m)}(p) \neq 0 \quad \forall p \in X$$

$\Rightarrow X$ è una varietà complessa di dimensione $n-n$.

Sottovarietà immerse e immersioni non singolari

Definizione $Y \subseteq X$ è una sottovarietà immersa di dimensione $n-m$ in una varietà diff (analitica) X se $\forall p \in Y$ esiste una carta locale (U, φ) definita intorno a p

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$$

tale che $U \cap Y = \varphi^{-1}(H)$

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) \mid x_1 = \dots = x_m = 0 \right\}$$

Oramai $\{ (U \cap Y, \varphi|_{U \cap Y}) \}$ è un atlante su Y .

Varietà fluore considerate come varietà immerse (26)

$$X = \{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid f_1(x_1, \dots, x_m) = \dots = f_m(x_1, \dots, x_m) = 0 \}$$

Prendiamo un punto $p \in X$ e assumiamo per un abuso

$$\star \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_m)}(p) \neq 0.$$

Adesso consideriamo.

$$\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_m) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_m)$$

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{\star} & 0 \\ \star & I \end{pmatrix}(p) \text{ è invertibile}$$

quindi φ è localmente un omeomorfismo. $\exists U \ni p$.

t.e. $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ è diffeomorfismo

(U, φ) è la carta cercata.

Immersione non regolare.

$$U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} W \\ J(G \circ F) = J(G) J(F)$$

$f: Y \rightarrow X$ applicazione C^∞ .

(27)

ha senso parlare di rango delle matrici jacobiane di f in p .

(U, φ) (V, ψ) carte locali intorno a p intorno a $f(p)$

$\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$

$$\text{rang}_{\varphi(p)}(\varphi \circ f \circ \psi^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{rang}_p J(f)$$

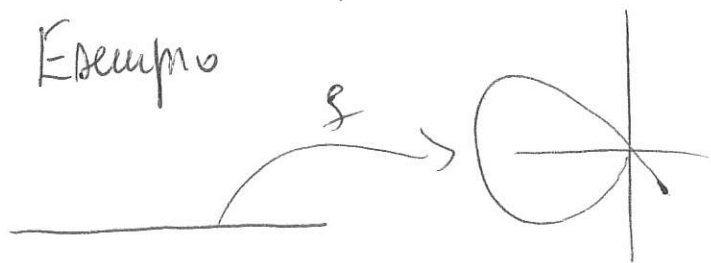
Si vede che è ben posto perché cambiando carte locali cambiano per isomorfismo e quindi per matrici invertibili.

Def $f: X \rightarrow Y$ applicazione C^∞ tra varietà è un'immersione non singolare se

a) Y e $f(Y)$ sono manifolds

b) In ogni punto di Y il rango è massimo

Esempio



non è un'immersione non

singolare

Si dimostra che se f è un'immersione non

singolare e $f(Y) \subseteq X$ chiuso \Rightarrow .

$f(Y)$ ha in modo naturale una struttura di varietà immerse. Caso \mathbb{C}^n (Complesso è reale)

a) $\Rightarrow \forall p \in Y$ U, φ piccola intorno a p . esiste V, ψ per X intorno a $f(p)$ t.c. $f(U) = f(Y) \cap V$.
 quindi da vedere che $\psi \circ f(U)$ è immersa in $\psi(V)$
sottovarietà

$$\varphi(U) \xrightarrow{h} \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Jacobiano di h ha rango massimo
 quindi localmente abbiamo $U' \subseteq \varphi(U)$ } Supponiamo
 matrice $\frac{\partial(h_1, \dots, h_m)}{\partial(x_1, \dots, y_m)}$

$$q: U' \rightarrow \varphi(U) \quad \text{t.c.} \quad hq(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, R_{m+1}(x_1, \dots, x_m), \dots, R_n(x_1, \dots, x_m))$$

$$hq(U') = (y_1, \dots, y_m) / y_i - R_i(y_1, \dots, y_m) = 0 \quad \forall$$

$$i = m+1, \dots, n.$$

