Spazi proiettivi:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim .$$

$$\pi: S^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \quad \text{è} \quad 2:1$$
$$(x_0 \dots x_n) \longrightarrow [x_0 \dots x_n]$$

Quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ compatto

Aperti fondamentali $\quad U_i = \{[x_0 \dots x_n] \,/\, x_i \neq 0\}$.

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$[x_0 \dots x_n] \longrightarrow \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots \frac{x_{i-1}}{x_i} \dots \frac{x_n}{x_i}\right)$$

$$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$
$$(y_1 \dots y_n) \to [y_1 \dots y_i, 1, \dots y_n] \longrightarrow \left(\frac{y_1}{y_j} \dots \frac{y_i}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \dots \frac{y_n}{y_j}\right)$$

Funzioni sono C^∞ ...

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^{n-1} \cup \dots \cup \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{punto}}}{\mathbb{R}^0}$$

V spazio vettoriale reale $\quad \mathbb{P}(V)$ stessa definizione

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ uguale ma varietà anche complesse

compattezza $\quad \pi : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \qquad \sum_i |z_i|^2 = 1$.
$$(z_0 \dots z_n) \longrightarrow [z_0 \dots z_n]$$

(2)

Consideriamo ipersuperfici algebriche di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

$F(z_0 \dots z_n) = 0$ polinomio omogeneo di grado d.

$X = \{ [z_0 \dots z_n] \mid F(z_0 \dots z_n) = 0 \} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Tratteremo caso $n = 2$ $\Rightarrow X = \mathcal{C}$ è una curva proiettiva: Assumiamo che $\frac{\partial F}{\partial z_i}(p) \neq 0$ per qualche i e $\forall p \in \mathcal{C}$. Scegliamo $\frac{\partial F}{\partial z_2}(p) \neq 0$.

Allora $\mathcal{C}$ è una varietà complessa compatta di dimensione 1.

Vediamo cos'è $U_2 \cap \mathcal{C}$, equazione diventa

$F(z, w, 1) = 0$ $\quad F(z_0, z_1, z_2) = a_0 z_2^d + z_2^{d-1} a_1(z_0, z_1) + \dots$

$a_d(z_0, z_1)$.

$F(z, w, 1) = a_0 + a_1(z, w) + \dots + a_d(z, w)$

Stiamo assumendo che $\frac{\partial F}{\partial z_2}(p) \neq 0$ per ~~almeno un indice i~~

Allora esiste un altro indice $j \neq i$ t.c. $\frac{\partial F}{\partial z_j}(p) \neq 0$.

Dim F omogeneo. $\Rightarrow$ vale la formula di Eulero $dF(z_0, z_1, z_2) = z_0 \frac{\partial F}{\partial z_0} + z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial F}{\partial z_2}$.

Valutando a $p = [a, b, 1]$ abbiamo

$$0 = a \frac{\partial F}{\partial z_0}(p) + b \frac{\partial F}{\partial z_1}(p) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z_2}(p)}^{\neq 0}$$

quindi almeno una delle altre 2 derivate è $\neq 0$.

$F(z, w, 1) = f(z, w)$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z_0}(z, w, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial F}{\partial z_1}(z, w, 1)$

Allora abbiamo che $f(z, w) = 0$ è una superficie di Riemann

Cosa succede in $U_i \cap U_j$

$f(z, w) = 0$ in U_2. $\quad F(z, w, 1) = 0$

$f(z_1, w_1) = 0$ in U_1 $\quad F(z_1, 1, w_1) = 0$

Il cambio di coordinate è

$w = \frac{1}{w_1} \quad z = \frac{z_1}{w_1}$

Se

$\varphi : U_2 \cap C \longrightarrow \mathbb{C}$

$\psi : U_1 \cap C \longrightarrow \mathbb{C}$

carte locali come proiezione usando T.F.I

$\psi \varphi_1 (\varphi \varphi_2)^{-1}$ è l'applicazione che definisce la carta locale

Adesso $\psi \underbrace{\varphi_1 \varphi_2^{-1}}_{\text{analitica}} \varphi^{-1}$ proiezioni

Quindi O.k. . Curve algebriche piane non singolari in $\mathbb{P}^2$ sono superfici di Riemann compatte

Vedremo che dal punto di vista topologico saranno omeomorfe a tori con $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ buchi. Esempio $d = 1, 2$ sappiamo che otteniamo ~~...~~ la sfera S^2.

Scoppiamenti e desingolarizzazioni di curve piane. ⑤
X definite.

$F(z_0, z_1, z_2) = 0$ una curva algebrica piana.

Possiamo avere anche che le derivate svaniscano tutte in qualche punto Es: $z_0 \cdot z_1 = 0$, $p = [0,0,1]$.

Quindi X non è una varietà.

Trovare una superficie di Riemann compatta $\mathcal{C}$ e un'applicazione analitica $f : \mathcal{C} \longrightarrow X$ tale che $f : \mathcal{C} \setminus f^{-1}(\operatorname{Sing} X) \longrightarrow X \setminus X_{sing}$. è un isomorfismo analitico.

Consideriamo $\mathbb{C}^2 \ni P = (0,0)$. Scoppiamento di $\mathbb{C}^2$ in P.

$$\tilde{U} = \left\{ (z, w), [\xi, \eta] \in U \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \;/\; z\eta = w\xi \right\}$$

· $\tilde{U}$ è una varietà complessa di dimensione 2.

$$\tilde{U}_0 = \left\{ (z,w) \times [\xi, \eta] \;/\; \eta \neq 0 \right\} = \left\{ (z, w, x) \;|\; z = wx \right\}.$$

$$\tilde{U}_1 = \left\{ (z,w) \times [\xi, \eta] \;/\; \xi \neq 0 \right\} = \left\{ (z, w, y) \;/\; w = zy \right\}$$

Carte locali

$$\varphi_0 : \tilde{\hat{U}}_0 \longrightarrow V_0$$
$$(z, w, x) \longrightarrow (w, x)$$

$$\varphi_1 : \tilde{\hat{U}}_1 \longrightarrow V_1$$
$$(z, w, y) \longrightarrow (z, y)$$

$$\varphi_1 \varphi_0^{-1} : \varphi_0(\tilde{\hat{U}}_0 \cap \tilde{\hat{U}}_1) \longrightarrow \varphi_1(\tilde{\hat{U}}_0 \cap \tilde{\hat{U}}_1)$$
$$(w, x) \longrightarrow \left(wx, \frac{1}{x}\right)$$

$$\pi : \tilde{\hat{U}} \longrightarrow U$$
$$(z, w), [\xi, \eta] \longrightarrow (z, w)$$

IDENTIFICHIAMO CON LE CARTE

$$\pi|_{\tilde{\hat{U}}_0} : \tilde{\hat{U}}_0 \longrightarrow U$$
$$(w, x) \longrightarrow (xw, w)$$

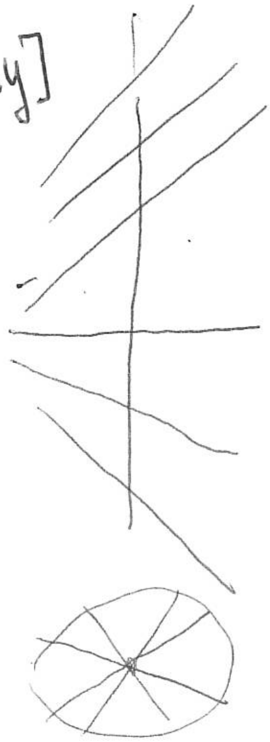
$$\pi|_{\tilde{\hat{U}}_1} : \tilde{\hat{U}}_1 \longrightarrow U$$
$$(z, y) \longrightarrow (z, zy).$$

$$\tilde{\hat{U}} \supseteq E = \pi^{-1}(0) = \{(0,0) \times [\xi, \eta]\} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$\shortparallel$

tutte le direzioni per l'origine.

$$\tilde{\hat{U}} \setminus E \xrightarrow{\cong} U - \{0\}$$
$$(x, y) \times [x, y] \qquad (x, y)$$



$\tilde{\hat{U}}$ come una scala a chiocciola infinita.

U

Consideriamo una retta l per l'origine in $U = \mathbb{C}^2$.

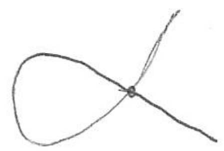
$az + bw = 0$

$$\frac{\pi^{-1}(l) \ni E}{\pi^{-1}(l \setminus \{0\})} = \tilde{l} \quad \text{trasformata propria.}$$

$(z,w) \times [-b, a]$ $\qquad \tilde{l} \cap E = (0,0) \times [-b, a]$

coefficiente direttore della retta.

Esempio Γ una curva con un nodo nell'origine (cioè 2 tangenti principali distinte)



Equazione

$zw + p(z,w) = 0$

In $p(z,w)$ monomi di grado almeno 3

Il termine di grado minimo produce le tg. principali $\underline{z=0,\ w=0}$

Solo nodo in O.

$$C = \overline{\pi^{-1}(\Gamma \setminus \{0\})}$$

$\boxed{z = wx}$

polinomio!!

$$w^2 x + p(xw, w) = w^2\left(x + \frac{p(xw,w)}{w^2}\right)$$

$\boxed{w=0}$ retta eccezionale

$$C \cap \tilde{U}_0 = \left\{ (x,w) \;\middle|\; x + \frac{p(xw,w)}{w^2} = 0 \right\}$$

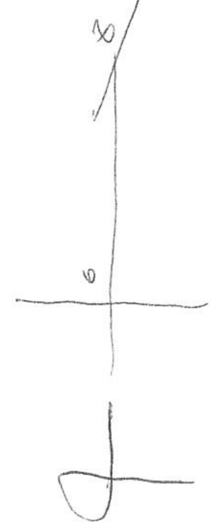
$$C \cap \tilde{U}_1 = \left\{ (z,y) \;\middle|\; y + \frac{p(z,yz)}{z^2} = 0 \right\}$$

$\Rightarrow C$ è una sottovarietà complesse.

$$C \cap E = \{ (\underset{z,w}{(0,0)} , \underset{\xi,\eta}{[0,1]}), ((0,0) \times [1,0]) \}$$
$$\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{P} \qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{Q}$$

perchè $C \cap E \cap \tilde{U}_0$ poniamo $w=0 \Rightarrow x=0$. e quindi $(0,0) \times [0,1]$

$C \setminus \{Q,R\} \longrightarrow \Gamma \setminus \{0\}$ isomorfismo



Questa è una procedura generale: prendiamo un numero finito di punti singolari

$$\Pi : \mathcal{C} - \{ \Pi^{-1}(P_1) \dots \Pi^{-1}(P_d) \} \to \Gamma \setminus \{ P_1 \dots P_d \}$$

è un isomorfismo analitico

Possiamo "riempire" i buchi e ottenere una superficie di Riemann compatta

Esempio $x^7 = y^4$ in $\mathbb{C}^2$.

Scoppiamo l'origine I^ carta $\begin{cases} x = yt \Rightarrow y^7 t^7 = y^4 \\ y^4 (y^3 t^7 - 1) = 0 \end{cases}$

Intersezione con la retta eccezionale $y=0$ otteniamo insieme $\emptyset$. Altra carta

$$y = xu$$

$$x^4(x^3-t^4) = 0$$

$$\begin{cases} x^3-t^4 = \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ in } x^3-t^4$$ da scoppiare ancora

Procedura $x = ts$. $\leadsto$ $\begin{cases} s^3-t=0 \\ t=0 \end{cases}$ $(0,0)$ non è singolare

Si vede che nell'altra carta non vi è nulla.

Prodotto di varietà con la topologia prodotto sono <u>varietà</u>.

<u>Gruppi di Lie</u>.

G gruppo astratto con una struttura di varietà differenziabile tale che

$$\mu : G \times G \longrightarrow G$$
$$(g,h) \longrightarrow gh.$$
$$i : G \longrightarrow G$$
$$g \longrightarrow g^{-1}$$

sono applicazioni C^∞.

$$l_g : G \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto gx \qquad \text{è un diffeomorfismo}$$

base di intorni $V_i = l_g(U_i)$ $U_i \ni e$.

Gruppi di Lie abeliani sono

$$\mathbb{R}^n, \ \mathbb{C}^n, \ T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots S^1}_{n \text{ volte}}.$$

Gruppi classici di matrici $M_n(K)$ $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$$GL(n,k) = \{ A \in M_{n,n}(K) \mid \det A \neq 0 \}$$
$$SL(n,k) = \{ A \in M_{n,n}(k) \mid \det A = 1$$
$$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I$$
$$SO(n) = \{ A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$$
$$U(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A}A = I \}$$
$$SU(n) = \{ A \in U(n) \mid \det A = 1 \}$$
$$Sp(2n, K) = \{ A \in GL(2n, k) \ {}^tAJA = J \}$$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0 \end{pmatrix}$$

(11)

$GL(n,K)$ aperto di $M_n(K) \cong K^{n^2}$.

Inoltre $X = (x_{ij})$ $Y = (y_{ij})$.

le entrate $X \cdot Y$ è una funzione C^∞ di x_{ij} e y_{hk}.

$$X^{-1} = \frac{\pm \det(X_{ij})}{\det X}$$

$X_{ij} = X \setminus$ riga i colonna j.

quindi $GL(n,K)$ gruppo di Lie di dim n^2.

$SL(n,K)$ ipersuperficie definita da $\det X = 1$.

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(\det X - 1) = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det X = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) X_{1\sigma(1)} \dots X_{n\sigma(n)}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(\det X - 1)\right|_I = 1 \quad i=j \quad 0 \text{ altrimenti}$$

allora in I almeno una derivata è $\neq 0$.

Adesso $A \in SL(n,\mathbb{R})$ $\det(AX) = \det X$.

$$F(X) = \det X - 1$$

$$F l_A(X) = F(X)$$

$$J(F)_I = J(F l_A)_I$$

$$\| $$

$$J(F_A) \cdot J(L_A)_I$$

rg massimo

Gruppo ortogonale

${}^tXX = I$. condizione ${}^tX_iX_j = \delta_{ij}$ $1 \le i \le j \le n$.

Abbiamo quindi $\frac{1}{2}n(n+1)$ equazioni

$$F_{ij} = {}^tX_iX_j - \delta_{ij} = 0.$$

Abbiamo n^2 incognite <u>idea</u> varietà definite da $\frac{1}{2}n(n+1)$ equazioni. Osserviamo $\forall A \in O(n)$ abbiamo ${}^t(AX_i)(AX_j) = \cancel{I}\,{}^tX_iX_j$. e quindi come $SL(n,k)$ possiamo considerare intorno all'origine I.

$$\left.\frac{\partial F_{ij}}{\partial X_{st}}\right|_{=I} \delta_{is}\delta_{tj} \quad i \le j.$$

Quindi matrice Jacobiana sarà

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rango massimo}$$

$SO(n)$ uguale componente connessa di $O(n)$

Calcolo sulle varietà differenziabili

X varietà differenziabile X spazio topologico a base numerabile.

Possiamo assumere che gli aperti siano contenuti in dischi quindi li prendiamo a chiusure compatte.

Dati 2 ricoprimenti di aperti $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$

$\mathcal{V}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$ $\quad \mathcal{V} > \mathcal{U}$

se esiste $\alpha : I \longrightarrow A$ t.c. $V_i \subseteq U_{\alpha(i)}$

$\forall i \in I$.

Lemma X varietà $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento di aperti $\Rightarrow \exists$ un raffinamento $\mathcal{V} > \mathcal{U}$ dove $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ è numerabile, localmente finito (i.e. $\forall x \in X$ $\exists$ un intorno $A \ni x$ t.c. $A \cap V_i \neq \emptyset$ solo per # finito di V_i) e con $\overline{V_i}$ compatto.

Dim I passo : Costruzione di un ricoprimento numerabile di X costituito di aperti A_i a chiusura compatta t.c. $\overline{A_i} \subset A_{i+1}$ 14

Esempi dischi D_n in $\mathbb{R}^k$.

Sia $B_1 \dots B_n \dots$ una base numerabile di aperti a chiusura compatta.

$A_1 = B_1$ Sia $A_k = B_1 \cup \dots B_{i_k}$ e sia i_{k+1} il più piccolo indice $> i_k$. t.c.

$\overline{A_k} \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \dots B_{i_k} \cup \dots B_{i_{k+1}} \overset{def}{=} A_{k+1}$.

Osserviamo che $\overline{A_i} \setminus A_{i-1}$ è compatto $\subseteq \underset{\text{aperto}}{A_{i+1} \setminus \overline{A_{i-2}}}$

$\overline{A_2} \subseteq \{ U_\alpha \cap A_3 \}$ scegliamo un sottoricoprimento finito

$i \geq 3$

$\{ U_\alpha \cap (A_{i+1} \setminus \overline{A_{i-2}}) \} \supseteq \overline{A_i} \setminus A_{i-1}$

estraiamo un sottoricoprimento finito.

Unione su tutti questi aperti abbiamo il ricoprimento

$V > U$ localmente finito.

<u>Definizione</u> X varietà differenziabile. Una partizione dell'unità su X è una collezione di funzioni $\rho_i \in C^\infty(X)_{i\in I}$

tali che

1) $\forall i$ $\operatorname{supp} \rho_i$ ha chiusura compatta
2) $\{\operatorname{supp} \rho_i\}$ aperti è localmente finito.
3) $\sum_i \rho_i(x) = 1$ $\forall x \in X$ e $\rho_i(x) \geq 0$ $\forall x \in X$ $\forall i \in I$.

Partizioni dell'unità risultano utili perché se abbiamo una funzione f, forma diff ω definita su tutto X

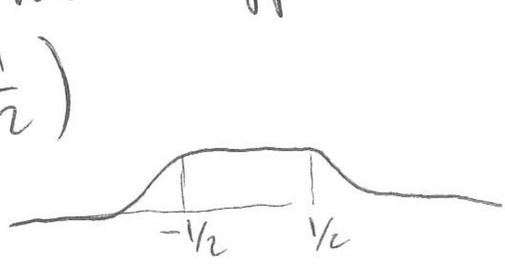
$$\omega = 1 \cdot \omega = \left(\sum_i \rho_i(x)\right)\omega = \sum \omega_i \qquad \omega_i = \omega \cdot \rho_i$$

supporto compatto

<u>Proposizione</u>: Sia X una varietà differenziabile. $\mathcal{U} = U_\alpha$ un ricoprimento aperto di X $\Rightarrow$ $\exists$ una partizione dell'unità numerabile $\{\rho_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
t.c. $\{\operatorname{supp} \rho_i\} > \mathcal{U}$.
è un raffinamento

<u>Dim</u> $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.c. $\operatorname{supp} \chi \subseteq (-1, 1)$

$\chi \equiv 1$ in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Similmente possiamo costruire $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con supporto nell'ipercubo e $\equiv 1$, $-\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{1}{2}$

Consideriamo il ricoprimento A_i come prima

poniamo $A_0 = A_{-1} = \phi$.

Dato $x \in X$ sia i_x il più piccolo intero t.c.

$x \in A_{i_x+1} \setminus \bar{A}_{i_x}$. Scegliamo α_x t.c. $x \in U_{\alpha_x}$

e una carta locale $U_x \subseteq U_{\alpha(x)} \cap (A_{i_x+2} \setminus \bar{A}_{i_x})$

$\varphi_x(U_x) \longrightarrow (-1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$

$W_x \subseteq U_x = \operatorname{supp} \chi \circ \varphi_x$.

Adesso $\forall i$ scegliamo # finito di punti x t.c.

W_x ricoprano $\bar{A}_i \setminus A_{i-1}$

Rinumerando tutto abbiamo delle funzioni $\sigma_i = \chi \circ \varphi_i$

Otteniamo quindi $\{ \operatorname{supp} \sigma_i \}$ ricoprimento aperto localmente finito di X che raffina U

Possiamo quindi definire $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i$

σ è sempre > 0 $\quad \rho_i = \frac{\sigma_i}{\sigma}$.

Corollario: $A \subseteq X$ aperto B chiuso $\subseteq A$

$\Rightarrow \exists\, f \in C^\infty(X)$ t.c.

1) $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$.

2) $f(x) \equiv 1$ su B.

3 $\cancel{f}$ $\operatorname{Supp} f \subseteq A$.

Partizione unità ρ_i con ricoprimento $A, X \setminus B$

$$f = \sum_{i \ \operatorname{supp}(\rho_i) \subseteq A} \rho_i$$

SPAZIO TANGENTE

$M \subseteq \mathbb{R}^d$ ipersuperficie liscia $\quad M = \{(x_1 \dots x_d) / F(x_1 \dots x_d) = 0\}$

con $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)$ non tutti nulli

$p = (y_1 \dots y_d)$

Allora nel punto $p \in M$ definiamo l'iperpiano Tangente.

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)(x_i - y_i) = 0$$

Così anche se M è una varietà immersa definita da m equazioni: avremo uno spazio $(d-m)$ dim tangente

Indichiamo con $T_p(M)$ la giacitura dello spazio tangente

$$T_p(M) = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \,/\, \sum_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) v_i = 0 \right\}.$$

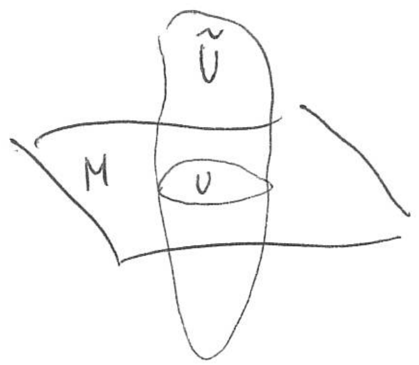
Si usa il fatto che M sia immersa in $\mathbb{R}^d$.

Voglio avere una definizione più intrinseca

$p \in U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^d$.

$f \in \mathcal{E}^0(U)$ è la restrizione ad U di $\tilde{f}$ definita in $\underset{\text{aperto}}{\tilde{U}} \subseteq \mathbb{R}^d$

con $\tilde{U} \cap M = U$.



$v \in T_p(M)$ possiamo associare un operatore

$$D_v : \mathcal{E}^0(U) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$D_v(f) = \sum_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p)\, v_i$$

Consideriamo $\gamma : [-1, 1] \longrightarrow M \subseteq \mathbb{R}^d$ $\quad$ γ regolare C^∞. $\quad \gamma(0) = p$. $\quad \gamma'(0) = v$

$$\frac{d}{dt}(f\gamma)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\tilde{f}\gamma\Big|_{t=0} = \sum_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} x_i'(0) = \sum_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} v_i$$

Poiché un lato non dipende da γ e l'altro da $\tilde{\gamma}$

Abbiamo che la definizione è ben posta.

Proprietà: Vale la regola di Leibnitz

$D_v(f \cdot g) = D_v(f)\, g(p) + f(p)\, D_v g$

Tali operatori si chiamano derivazioni nel punto p

$$\Phi : T_p(M) \longrightarrow \{\text{Derivazioni in } p\}$$
$$D_v : \mathcal{E}^0(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Φ isomorfismo di spazi vettoriali

$\forall v$ consideriamo la funzione x_i $\quad D_v(x_i) = \cancel{0}\, v_i = 0$

quindi $v = 0$.

Assumiamo Φ suriettiva (lo vedremo dopo)

Quindi Spazio tangente a p $\longleftrightarrow$ Spazio delle derivazioni a p.

<u>Problema</u> $p \in U$ perché U. ? La soluzione sta

nella seguente osservazione.

M varietà differenziabile $p \in M$ $f, g \in \mathcal{E}^0(M) = C^\infty(M)$

$f \sim g$ se esiste $p \in U$ / $f|_U \equiv g|_U$.

$\mathcal{E}^0_p(M) = \mathcal{E}(M)/\sim$. germi di funzioni C^∞ in p.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^0(M) &\longrightarrow \mathcal{E}^0_p(M) \\ f &\longrightarrow [f]. \end{aligned}$$

$\mathcal{E}^0_p(M)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, meglio è una $\mathbb{R}$ algebra $[f]\cdot[g] = [f\cdot g]$.

<u>Definizione</u> Una derivazione in p di $\mathcal{E}^0_p(M)$ è un'applicazione lineare $D : \mathcal{E}^0_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$. tale che valga la regola di Leibnitz.

$$D([f][g]) = f(p)D[g] + g(p)D[f].$$

Le derivazioni in p formano uno spazio vettoriale

Def: M varietà diff $p\in M$. Lo spazio tg in p di M è lo spazio delle derivazioni in p di $\mathcal{E}^0_p(M)$ $T_p(M)$.

<u>Osservazione</u> 1) $[c]$ germe della funzione costante $\Rightarrow D([c])=0$

basta $[1]$ $\quad D([1][1]) = 2D([1]) = 0$.

2) $f \in \mathcal{E}^0(U)$ allora $D(f)$ dipende solo da $D([f])$

Prendiamo $h \equiv 0$ in $V \subseteq U$. $\Rightarrow D(h) = 0$

Prendiamo ψ $\psi \equiv 1$ intorno a p e ~~per~~ 0 supp $\subseteq V$.

$\psi h \equiv 0$ in U.

$0 = D(\psi h) = D(h)$.

Osserviamo

$T_p(M) = \{$ Derivazioni in p di $\mathcal{E}^0_p(M)\} = \{$ Derivazioni in p di $\mathcal{E}^0(U)\}$

$U \hookrightarrow M$ aperto $\qquad \mathcal{E}^0_p(M) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}^0_p(U)$

$[f] \longrightarrow [f|_U]$.

Iniettiva ovvio, suriettiva $f \in \mathcal{E}_p(U)$

in U $f \cdot \rho$ $\quad \rho \equiv 1$ intorno a p Supp $\rho \subseteq U$.

in $M \setminus U$ 0

Quindi anche $T_p(M) \cong T_p(U)$.

$(M, p) \longrightarrow T_p(M)$

PROPRIETÀ FUNTORIALI.