Allora ad ogni coppia (M, p) abbiamo associato uno spazio vettoriale $T_p(M)$

Proprietà funtoriali:

Sia $F : M \longrightarrow N$ applicazione C^∞ tra varietà differenziabili:

Induce
$$F^* : \mathcal{E}^0(N) \longrightarrow \mathcal{E}^0(M)$$
$$f \longrightarrow F^*(f) \overset{def.}{=} f \circ F$$

Verifica immediata (composizione)

$$(FG)^* = G^* \circ F^* \qquad G : L \longrightarrow M.$$
$$(1_M)^* = 1_{\mathcal{E}^0(M)}$$

Localizziamo, ovviamente abbiamo
$$F_p^* : \mathcal{E}^0_{F(p)}(N) \longrightarrow \mathcal{E}^0_p(M)$$
$$[f] \longrightarrow F_p^*[f] = [f \circ F]$$

Omomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre etc.. Passando al duale

$$F_{*,p} : T_p(M) \longrightarrow T_p(N)$$
$$D \longrightarrow F_{*,p}(D)$$

derivazioni spazio

$$F_{*,p}(D)[f] \overset{def}{=} D([fF]) = D(F_p^*[f]) \quad \forall [f] \in \mathcal{E}^0_{F(p)}(N)$$

Proprietà Funtoriali

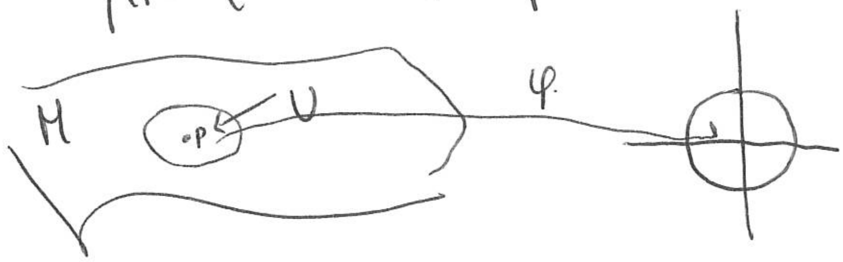
$$(FG)_{*,p} = F_{*G(p)} \circ G_{*,p} \qquad (1_M)_{*p} = 1_{T_p(M)}$$

Da notare adesso $p \in L$. $\quad L \xrightarrow{G} M \xrightarrow{F} N$.

Possiamo calcolare $T_p(M)$ con $\dim M = n$.

(U,φ) carta locale intorno a p.

$$\varphi(p) = (0 - - - 0) = q$$



$$T_p(M) = T_p(U) \xrightarrow[\cong]{\varphi_{*,p}} T_q(\varphi(U)) = T_q(\mathbb{R}^n)$$

Per calcolare $T_q(\mathbb{R}^n)$

siano $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_q - - - \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_q$ dei vettori tangenti (sono derivazioni)

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p [f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0 - - - 0) \qquad [f] \in \mathcal{E}^0_q(\mathbb{R}^n)$$

Dobbiamo poi vedere che $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q$ sono una base. Sono ovviamente indipendenti

$f \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^n)$ sviluppandola intorno a q.

$$f(x_1 \dots x_n) = f(q) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)\, x_i + \sum_i x_i h_i(x_1 \dots x_n)$$

con $h_i(q) = 0$.

$$D([f]) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)\, D(x_i) + \sum_i x_i D(h_i) + h_i D(x_i) \Big|_q$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)\, D(x_i) = \sum_i D(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q [f]$$

Quindi $D = \sum_i D(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q$.

Quindi $(\varphi^{-1})_{*,q} \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q\right)$ sono una base di $T_p(M)$.

Notazione $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \dots$

$$T_p(M) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p .$$

Ovviamente ritornando alle osservazioni iniziali abbiamo che possiamo usare le curve passanti per il punto p per definire $T_p(M)$

$$T_p(M) = \left\{ \gamma_{*,0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\right) \Big/ \begin{array}{l}\gamma : (-1,1) \to M \\ \text{curve } C^\infty \text{ con } \gamma(0) = p.\end{array} \right\}.$$

CAMPI VETTORIALI

Per campo vettoriale su M intenderemo una collezione di vettori tangenti $X = \{ X_p \in T_p(M) \}$ che varia in modo C^∞ con p.

Definizione: k campo A una k-algebra. Una derivazione di A è un'applicazione k-lineare

$$D : A \longrightarrow A$$

$$D(fg) = f D(g) + g D(f)$$

l'insieme delle derivazioni è un A-modulo.

Nel senso che $(a \cdot D)(f) = a \cdot D(f)$

M varietà differenziabile

$A = \mathcal{E}^0(M) \qquad V(M) = \mathrm{Der}(\mathcal{E}^0(M))$.

Sia $F : M \longrightarrow N$ un diffeomorfismo

$F_* : V(M) \longrightarrow V(N)$ isomorfismo.

definito da $F_* X(g) = X(gF) \circ F^{-1} = X(F^* g) \circ F^{-1}$

$(FG)_* = F_* G_* \quad (1_M)_* = 1_{V(M)}$.

con $G : P \longrightarrow M$ un altro diffeomorfismo.

Quindi possiamo considerare i campi vettoriali nelle carte locali e identificarli con quelli di $\mathbb{R}^n$.

Come restringersi a una carta. Vediamo che

$f, g \in \mathcal{E}^0(M) \quad f \equiv g$ in $U \ni p. \implies X(f)(p) = X(g)(p)$

<u>Dim</u> prendiamo $h \equiv 0$ in U e vediamo cosa succede

Sia $\rho \in \mathcal{E}^0(M) \quad \mathrm{supp}\,\rho \subseteq U \quad \rho \equiv 1$ intorno a p.

Allora $\rho h \equiv 0$ in M e quindi

$$0 = X(\rho h)(p) \overset{\text{leibnitz.}}{=} (h X(\rho) + \rho X(h))(p) = X(h)(p).$$

Quindi abbiamo che se $X \in \mathcal{V}(M) \Rightarrow X_p$ è un vettore tangente $\quad X_p([f]) = X(\rho f)(p) \quad f \in \mathcal{E}^\infty(U)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(M) &\longrightarrow T_p(M) \\ X &\longmapsto X_p. \end{aligned}$$

Così abbiamo anche
$$\begin{aligned} \mathcal{V}(M) &\longrightarrow \mathcal{V}(U) \\ X &\longmapsto X|_U. \end{aligned}$$

$X|_U = ?$ Preso $f \in \mathcal{E}^\infty(U)$ possiamo definire

$X|_U(f)(p) = X(\rho f)(p)$ solito ρ i.e. $\operatorname{supp}\rho \subseteq U$, $\rho \equiv 1$ intorno a p.

Proprietà del morfismo di restrizione ci dicono che i campi vettoriali formano un fascio su M, i.e. U, V aperti in M

a) $X, Y \in \mathcal{V}(U \cup V)$ • $X|_U = Y|_U$, $X|_V = Y|_V$

$\Rightarrow X \equiv Y$.

b) $X_U \in \mathfrak{X}(U)$, $X_V \in \mathfrak{X}(U)$

$$X_U|_{U\cap V} = X_V|_{U\cap V} \text{ in } U\cap V$$

allora esiste ed è unico $X \in \mathfrak{X}(U\cup V)$ t.c.

$$X|_U \equiv X_U \quad e \quad X|_V = X_V.$$

Dim a basta $X \equiv 0 \Leftrightarrow X|_U = X|_V = 0$.

$\Rightarrow$ ovvio $\Leftarrow$ Sia $p \in U$ $X(f)(p) = X(gf)(p) =$

$X|_U(gf)(p) = 0$.

b) $X(f)(p) = \begin{cases} X|_U(f|_U)(p) & \text{se } p \in U \\ X|_V(f|_V)(p) & \text{se } p \in V \end{cases}$

Quindi conosciamo un campo vettoriale quando lo conosciamo sulle carte locali.

Inoltre se ~~lo~~ conosciamo sulle carte locali (ciò che avviene) possiamo incollare campi vettoriali coincidenti nelle intersezioni

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e

$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}$ delle derivazioni

$$V(A) = \mathcal{E}^0(A)\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}^0(A)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

modulo libero di rango n su $\mathcal{E}^0(A)$

$$X \in V(A) \qquad X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1 \dots x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ovviamente $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sono indipendenti.

Supponiamo $X = \sum_i a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv 0 \Rightarrow 0 = X(x_j) = a_j(x)$.

Adesso $X \in V(A)$ $\qquad y = (y_1 \dots y_n) \in V \subseteq A$.

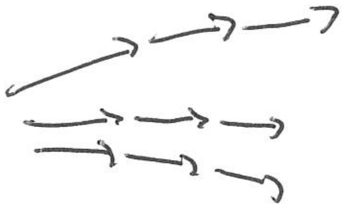
$f \in \mathcal{E}^0(A)$ $\qquad f(x) = f(y) + \sum_i (x_i - y_i)\, h_i(x)$

con $h_i(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)$

$$X(f) = \sum_i X(x_i)\, h_i(x) + \sum_i (x_i - y_i)\, X(h_i(x))$$

$$X(f)(y) = \sum_i X(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \qquad \Rightarrow \qquad X(f) = \sum_i \underbrace{X(x_i)}_{\mathcal{E}^0(A)}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Un campo vettoriale è un vettore tangente che si muove in modo C^∞



<u>Adesso</u> sappiamo cosa succede per i diffeomorfismi
$\psi\varphi^{-1}$ è un diffeomorfismo quindi basta vedere il caso

$$F : A \longrightarrow B \qquad A, B \subseteq \mathbb{R}^n$$

aperti

F diffeomorfismo.

$$F(x_1 \ldots x_n) = (F_1(x_1 \ldots x_n) \ \ldots \ F_n(x_1 \ldots x_n))$$

$(y_1 \ldots\ldots y_n)$ coordinate in B.

$$X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$F_* X = \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Come esprimere le g_j in funzione di F e f_i ??

$$F_* X = \sum_i (f_i \circ F^{-1})\, F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$ Sia $f \in \mathcal{E}^0(B)$

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ F)\circ F^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\circ F^{-1}$$

Quindi
$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\circ F^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial y_j}$$

~~Quindi~~ Pertanto
$$g_j = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i\,\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)\circ F^{-1}$$

Come al solito J_F la matrice jacobiana di F

F_* porta $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_n \end{pmatrix}$ in $J_F\begin{pmatrix} f_1 \\ f_n \end{pmatrix}\underbrace{\circ F^{-1}}$.

di norma non si scrive intendendola sottintesa.

Caso generale.

M varietà differenziabile U,φ carta locale

$$V(U) = \mathcal{E}^0(U)\frac{\partial}{\partial x_1}\oplus \dots\ \mathcal{E}^0(U)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

$X \in V(M)$ vediamo localmente

$$\varphi_*(X|_U) = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\psi_*(X|_V) = \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Quindi abbiamo $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_n \end{pmatrix} = J_{UV} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_n \end{pmatrix} \circ (\varphi \psi^{-1})$

Quindi dare un campo vettoriale $X \in V(M)$ equivale a dare degli $X_U = \sum_i f_i^U \frac{\partial}{\partial x_i^U}$. $\forall (U, \varphi)$ carta locale

Condizione $\begin{pmatrix} f_1^V \\ f_n^V \end{pmatrix} = J_{U,V} \begin{pmatrix} f_1^U \\ f_n^U \end{pmatrix}$

Osservazione finale: Extra struttura

$$V(M) \times V(M) \longrightarrow V(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow [X, Y].$$

Ponendo $[X,Y] f = X Y(f) - Y(X f)$

Si verifica immediatamente

$$[X,Y] = -[Y,X]$$

$$[X[Y,Z]] + [Z[X,Y]] + [Y[Z,X]] = 0$$

i.e. Struttura di algebra di Lie. !!

Nozioni di Algebra multilineare

V, W spazi vettoriali di dim finita su $\mathbb{K}$

$L(V,W) = \{$ spazio vettoriale di dimensione infinita con base $(v,w) \in V \times W \}$

$R(V,W) \subseteq L(V,W)$

sottospazio generato da
$$(v_1+v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$$
$$(v, w_1+w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$$
$$(av, w) - a(v,w)$$
$$(v, aw) - a(v,w)$$

$a \in \mathbb{K}$
$v \in V$
$w \in W$

prodotto tensoriale

Definizione: $V \otimes W = L(V,W) / R(V,W)$

$\pi: V \times W \longrightarrow V \otimes W$ proiezione naturale
$(v,w) \longmapsto v \otimes w$

$V \otimes W$ soddisfa la proprietà universale

$\varphi: V \times W \longrightarrow U$ bilineare

$\exists!\ \bar{\varphi}: V \otimes W \longrightarrow U$ t.c. $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

Si verifica che

$V \otimes W \cong W \otimes V$

e inoltre vale: $(V \otimes W) \otimes U = V \otimes (W \otimes U)$

Usando la proprietà universale

$$V^* \otimes W \xleftrightarrow{F} \mathrm{Hom}(V, W) \qquad \text{isomorfismo}$$

$$(\varphi \otimes w) \qquad \varphi(\cdot) w.$$

Quindi $\dim V \otimes W = m \cdot n$.

$f : V \to W \quad g : V' \to W'$ lineari

$f \otimes g : V \otimes V' \longrightarrow W \otimes W'$

$f \otimes g (v \otimes v') = f(v) \otimes g(v')$

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$$

algebra associativa del prodotto tensoriale

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ volte}} \qquad V^{\otimes 0} = K.$$

Consideriamo l'ideale $I(V)$ generato dagli elementi del tipo $v \otimes v \quad v \in V$

Esempio $\quad v_1 \otimes v_2 \otimes v \otimes v \otimes v_3 + v_4 \otimes w \otimes w \otimes v_5$.

L'algebra esterna è $\Lambda(V) = T(V)/I(V)$

$[v_1 \otimes \dots \otimes v_k] = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$.

$$\Lambda(V) = K \oplus V \oplus \Lambda^2 V$$

Osservazione: Poichè $v \wedge v = 0$ $\quad v \wedge w = -w \wedge v$

e inoltre $\Lambda^k V = 0 \quad k > n$.

$\alpha \in \Lambda^k V \quad \beta \in \Lambda^h V \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{hk} \beta \wedge \alpha$.

Sia $e_1 \dots e_n$ una base di V.

$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \quad i_1 < i_2 < i_k$. è una base

di $\Lambda^k V$.

Proprietà universale.

$$\varphi : V \times \dots \times V \longrightarrow W$$

multilineare alterna $\varphi(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, \varphi(v_1, \dots v_n)$

fattorizza su $\Lambda^k V$. $\quad \varphi = \overline{\varphi}\pi$

$\pi : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ volte}} \longrightarrow \Lambda^k V \qquad \overline{\varphi} : \Lambda^k V \longrightarrow W$.

$v_1 \dots v_k \longrightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_k$

Esempio $\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \mathbb{R}^n}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}$

multilineare alterna. fattorizza su $\Lambda^n \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}$.

$\varphi = c \det(\ )$

In generale $f : V \to W$

$\Lambda^k f : \Lambda^k V \to \Lambda^k W$.

$\Lambda^k(f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_k)$.

$\Lambda^k(f \circ g) = \Lambda^k f \circ \Lambda^k g$.

In notazioni matriciali stiamo considerando i minori $k \times k$ della matrice M associata a f rispetto a basi di V e W.

Altra caratterizzazione di $\Lambda^k V$. o meglio del suo duale

$A_k(V)$ = spazio delle forme multilineari alterne $\varphi : V \times \dots \times V \longrightarrow K$.

φ fattorizza su $\Lambda^k V$ quindi $A_k(V) = (\Lambda^k V)^*$

$\varphi \longrightarrow \bar{\varphi}$

$$(\Lambda^k V)^* \cong \Lambda^k V^*$$

$$\Lambda^k V^* \times \Lambda^k V \longrightarrow K$$

$$\varphi_1 \wedge \dots \varphi_k \ , \quad v_1, \dots v_k \longrightarrow \det(\varphi_i(v_j))$$

è ben definita e non degenere.

Quindi $A_k(V) = \Lambda^k V^*$.

forme k-lineari multilineari alterne = k-ma potenza esterna di V^*.

Osservazione Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è un esempio di prodotto alterno.

FORME DIFFERENZIALI

M varietà differenziabile $\quad \mathcal{E}^0(M)$ funzioni C^∞.

$\mathcal{E}^k(M) = \{$ applicazioni $\mathcal{E}^0(M)$-multilineari alterne di $V(M) \}$

$$V(M) \times \dots \times V(M) \xrightarrow{\omega} \mathcal{E}^0(M)$$

$$\omega(X_1, \dots f_1 X_i^1 + f_2 X_i^2, \dots X_k) = f_1\, \omega(X_1, \dots, X_i^1, \dots X_k) + f_2\, \omega(X_1 \dots X_i^2 \dots X_k)$$

$$\omega(X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\, \omega(X_1 \dots X_k).$$

Esempi $\mathcal{E}^1(M)$

$$\omega : V(M) \longrightarrow \mathcal{E}^0(M)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^0(M)}(V(M), \mathcal{E}^0(M))$$

$f \in \mathcal{E}^0(M)$ $\quad df \in \mathcal{E}^1(M)$ $\quad df(X) \overset{def}{=} X(f)$

$M = \mathbb{R}^n$ $\quad df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$

Verifica $\mathcal{E}^0(M)$ linearità

$$df(gX + hY) = gX + hY(f) = gX(f) + hY(f)$$
$$= g\,df(X) + h\,df(Y).$$

Lemma tecnico: ω una k-forma differenziale $X_1 \dots X_k \in V(M)$ e supponiamo che intorno al punto p $X_i \equiv 0$ (i.e $X_i|_U \equiv 0$)

Allora $\omega(X_1 \dots X_k)(p) = 0$

Dimostrazione (come al solito)

ρ t.c. $\rho \equiv 1$ intorno a p $\quad$ supp $\rho \subseteq U$.

$$0 = \omega(X_1 \dots, \underbrace{\rho X_i}_{0}, \dots X_k)(p) = \underbrace{\rho(p)}_{1} \, \omega(X_1 \dots X_k)(p).$$

Quindi anche nel caso delle k-forme differenziali possiamo restringerci ad aperti $U \subseteq M$

$$\mathcal{E}^k(M) \longrightarrow \mathcal{E}^k(U)$$
$$\omega \longrightarrow \omega|_U .$$

D'altronde se $X_1, \dots X_k \in V(U)$ possiamo sempre estenderle a $V(M)$ usando il mollificatore ρ

Come nel caso ~~delle k~~- dei campi vettoriali le k-forme differenziali formano un fascio

<u>Lemma</u> U, V aperti di M.

a) ω e $\omega' \in \mathcal{E}^k(U \cup V)$ $\quad \omega = \omega' \iff \omega|_U = \omega'|_U$

$\omega|_V = \omega'|_V$.

b) $\omega_U \in \mathcal{E}^k(U)$ $\quad \omega_V \in \mathcal{E}^k(V)$ tali che

$\omega_U|_{U\cap V} = \omega_V|_{U\cap V} \Rightarrow \exists!$
$\omega \in \mathcal{E}^k(U\cup V)$ t.c. $\omega|_U = \omega_U$, $\omega|_V = \omega_V$

Quindi possiamo fare studio locale e poi incollare il tutto. A tal fine occorre sapere come si comporta $F: M \longrightarrow N$ diffeomorfismo sulle k-forme. Definire un

$$F^*: \mathcal{E}^k(N) \longrightarrow \mathcal{E}^k(M)$$

$X_1 \dots X_k \in \mathcal{V}(M)$

$$F^*\omega(X_1 \dots X_k) = \omega(F_* X_1 \dots F_* X_k) \circ F$$

generalizzazione di $F^*: \mathcal{E}^0(N) \longrightarrow \mathcal{E}^0(M)$

$F^*(f) = f \circ F$.

$(1_M)_* = 1_{\mathcal{E}^k(M)}$ $\quad (FG)^* = G^* F^*$.

Osservazione

$F^*(df) = dF^*f$ infatti

$$F^*(df)(X) = df(F_* X) \circ F = F_* X(f) \circ F$$

$$d(F^*(f))(X) = X(f \circ F) \circ F^{-1} \circ F$$

Quindi possiamo considerare
(U, φ) carta locale $\varphi(U) = A$.

$$\varphi^*: \mathcal{E}^k(A) \longrightarrow \mathcal{E}^k(U)$$

Forme differenziali in $\mathbb{R}^n$

$$V(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{E}^0(A) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\mathcal{E}^1(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^0(A)}(V(A), \mathcal{E}^0(A))$$

è un $\mathcal{E}^0(A)$ modulo libero di rango n.
ha una base duale formata da $dx_1 \dots dx_n \in \mathcal{E}^1(A)$

$$dx_i\left(\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = f_i \qquad \mathcal{E}^1(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{E}^0(A) dx_i$$

Quindi una 1 forma differenziale

$$\omega = \sum f_i dx_i \qquad \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = f_i$$

$$f \in \mathcal{E}^0(A) \quad df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

$$\mathcal{E}^k(A) = A_k(V(A)) \cong \Lambda^k \mathcal{E}^1(A)$$

Dunque usando l'algebra multilineare.
Abbiamo che ponendo

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \qquad I = (i_1 < \dots < i_k)$$

$$\mathcal{E}^k(A) \cong \bigoplus_{|I| = k} \mathcal{E}^0(A)\, dx_I$$

$$\omega = \sum f_I \, dx_I \, .$$

Calcolo: Siano $X_1 \dots X_k \in \mathcal{V}(A)$

$$\omega(X_1 \dots X_k) = \sum f_I \, dx_I (X_1 \dots X_k)$$

$$= \sum f_I \det\left(dx_{i_s}(X_t)\right) = \sum f_I \det\left(X_t(x_{i_s})\right)$$

Supponiamo $F : A \to B$ $\quad F(x_1 \dots x_n) = (F_1(x_1 \dots x_n), \dots F_n(x_1 \dots x_n))$

un diffeomorfismo tra 2 aperti di $\mathbb{R}^n$ $\quad F = \psi \circ \varphi^{-1}$

$$F^* : \mathcal{E}^k(B) \longrightarrow \mathcal{E}^k(A)$$

$(x_1 \dots x_n)$ coordinate in A
$(y_1 \dots y_n)$ " " B.

$\omega = \sum_I f_I \, dy_I \in \mathcal{E}^k(B)$

Vogliamo $F^*\omega = \sum_J g_J \, dx_J$

<u>Passo 1</u> $F^* dy_i = dF_i$

$\omega = \sum_i f_i \, dy_i$ $\quad F^*\omega = \sum_i F^*(f_i) \, F^*(dy_i) =$

$$\sum_i (f_i \circ F) \, dF_i =$$

$$\sum_{i,j} (f_i \circ F) \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j .$$

Quindi J_F é la matrice Jacobiana.

Abbiamo che

$$ {}^tJ_F \begin{pmatrix} f_1 \\ \\ f_n \end{pmatrix} \circ F = \begin{pmatrix} g_1 \\ \\ g_n \end{pmatrix}$$

Nel caso delle k-forme differenziali avremo

$$g_I = \Lambda^k({}^tJ_F)(f_I)$$

Quindi per un abuso di notazioni abbiamo

$$\omega|_U = \sum_I f_I^U \, dx_I^U \qquad \left(f_I^U \right) = \Lambda^k({}^tJ_{UV}) \left| g_J^V \right|$$

Teorema M varietà differenziabile.
$\{(U, \phi)\}$ atlante di carte locali

Dare una k-forma differenziale $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$
è equivalente a dare k-forme differenziali

$$\sum_I f_I^U \, dx_I^U \in \mathcal{E}^k(U)$$

soggette alle precedenti condizioni
di compatibilità.

Dim $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$

$$\omega_U = \omega|_U \qquad \omega_V = \omega|_V.$$

$$\omega_U = \sum_I f_I \, dx_I \qquad \omega_V = \sum_J g_J \, dy_J$$

$$\omega_U|_{U \cap V} = \omega_V|_{U \cap V}$$

diventa $\sum_I f_i \, dx_I = \sum_J g_J \, dy_J$ in $U \cap V$

Questa condizione si esprime come
avevamo detto precedentemente.
Il viceversa è ovvio.

Altro lemma di carattere tecnico

Lemma $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ $p \in M$, allora esiste un intorno V di p e una forma differenziale $\tilde{\omega} \in \mathcal{E}^k(M)$ del tipo $\tilde{\omega} = \sum_I h_I \, d\varphi_{i_1} \wedge \dots d\varphi_{i_k}$.

h_I e $\varphi_i \in \mathcal{E}^k(M)$ in modo che

$$\tilde{\omega}|_V = \omega|_V.$$

<u>Dim</u> (U, φ) carta locale intorno a p.

$$\omega|_U = \sum_I f_I \, dx_I \qquad \text{abbiamo identificato } U \text{ con } \varphi(U)$$

adesso $\lambda \equiv 1$ intorno a p $\operatorname{supp} \lambda \subseteq U$.

$$h_I = \lambda f_I \qquad \varphi_i = \lambda x_i.$$

$$\tilde{\omega} = \sum_I h_I \, d\varphi_{i_1} \wedge \dots d\varphi_{i_k}.$$

e quindi $\tilde{\omega}|_V = \omega|_V$.

Corollario $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ e $X_1 \dots X_k \in V(M)$

Supponiamo che per qualche i si abbia $X_{i,p} = 0$

Allora $\omega(X_1 \dots X_p)(p) = 0$

<u>Dim</u> basta vederlo in un intorno del punto p qui possiamo assumere

$$\omega = f\, d\varphi_1 \wedge d\varphi_K .$$

$$\omega(X_1 \dots X_k)(p) = f(p) \det\left(X_s(g_t)\right)(p)$$

ma adesso $X_i(g_j)(p) = X_{i,p}(g_j)$

Abbiamo $X_{i,p}(g_j) = 0 \quad \forall\, j = 1 \dots n$.

Come conseguenze abbiamo

$\omega \in \mathcal{E}^k(M) \quad p \in M$

Sia $\omega(p) \in \Lambda^k T_p^*(M) = \left(\Lambda^k T_p(M)\right)^*$

definito da

$$\omega(p)(v_1 \dots v_k) = \omega(X_1 \dots X_k)(p)$$

dove $v_i \in T_p(M)$, $X_i \in \mathcal{V}(M)$ e

$$X_{i,p} = v_i$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^k(M) &\longrightarrow \Lambda^k T_p^*(M) \\ \omega &\longrightarrow \omega(p) \end{aligned}$$

Quindi una k-forma differenziale può essere vista come un vettore $\omega(p) \in \Lambda^k T_p^*(M)$ che varia in modo C^∞ con p.