Prodotto esterno di k-forme differenziali

Sia $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ $\varphi \in \mathcal{E}^h(M)$

$\omega \wedge \varphi \in \mathcal{E}^{h+k}(M)$ definita che

$$\circledast \; \omega \wedge \varphi(X_1 \dots X_{h+k}) = \sum_{\sigma \text{ scambi}} \varepsilon(\sigma)\, \omega(X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(k)})\, \varphi(X_{\sigma(k+1)} \dots X_{\sigma(k+h)})$$

σ scambio stiamo considerando

$\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(k)$ e $\sigma(k+1) < \dots \sigma(h+k)$

Note: sulle dispense k, h confusi a volte

Da dove viene? Per linearità e per quanto visto precedentemente si può supporre

$\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$

$\varphi = \omega_{k+1} \dots \wedge \omega_{k+h}$.

Adesso per una matrice $A \in M_{h+k,k+h}(\mathbb{K})$

Possiamo considerare lo sviluppo a blocchi (generalizzazione di Laplace)

$$\det A = \sum_J \varepsilon(J)\, A_{I,J}\, A_{I^c J^c}.$$

con A_{IJ} determinante del minore di A con le righe indicizzate da I e le colonne da J

e I^c e J^c rappresentano i complementari di I e J in $\{1 \dots h+k\}$.

$\varepsilon(J)$ è il segno della permutazione $\{J, J^c\}$

Quindi le formule date precedentemente ⊛ non è altro che il determinante nel caso di

$\omega_1 \wedge \dots \omega_k \wedge \omega_{k+1} \quad \wedge \omega_{k+h}$.

<u>Conseguenze</u>: $\mathcal{E}^k(M) = 0 \quad k > n$

basta vederlo localmente.

$$\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \mathcal{E}^k(M)$$

ha una struttura di $\mathcal{E}^0(M)$ algebra

Ovviamente

$$\omega \wedge \varphi = (-1)^{hk} \varphi \wedge \omega.$$

$F: M \longrightarrow N$ è un diffeomorfismo

$$F^*(\omega \wedge \varphi) = F^*\omega \wedge F^*\varphi.$$

$$\omega \wedge \varphi|_U = \omega|_U \wedge \varphi|_U.$$

Inoltre

$\omega = f dg_1 \wedge dg_k \qquad \omega' = f' dg_1' \wedge \dots dg_h'$

$\omega \wedge \omega' = f f' dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k \wedge dg_1' \wedge \dots dg_h'$

Differenziazione

Vogliamo introdurre $d : \mathcal{E}^k(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{k+1}(M)$

Teorema: M varietà differenziabile allora esiste un unico operatore $\mathbb{R}$-lineare

$$d : \mathcal{E}^k(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{k+1}(M)$$

tale che

1) $k=0$ coincide con l'operatore già definito
$$df(X) = X(f)$$

2) $d^2 = 0$

3) $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi \qquad \omega \in \mathcal{E}^k(M)$
$\varphi \in \mathcal{E}^h(M)$

Dim Unicità. Supponiamo di avere d e d' definiti su M e su aperti $U \subseteq M$.

Ovviamente se $\omega|_V = \tilde{\omega}|_V \quad d\omega|_V = d\tilde{\omega}|_V$

Infatti usando i mollificatori possiamo trovare ρ
dire $\rho(\omega - \tilde{\omega}) \equiv 0$ in M

Quindi

$$0 = d'(\rho(\omega-\tilde{\omega})) = \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ in } V}}{d'\rho} \wedge (\omega-\tilde{\omega}) + \rho\, d'(\omega-\tilde{\omega})$$

$$d'\omega|_V = d'\tilde{\omega}|_V.$$

Possiamo vedere quello che succede localmente. $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, intorno a un punto p possiamo sostituire a ω una forma $\tilde{\omega} = \sum h\, dg_1 \wedge\, dg_K$, ..e

$$\omega|_V = \tilde{\omega}|_V.$$

e quindi $d'\omega|_V = d'\tilde{\omega}|_V$.

Usiamo le proprietà 1, 2, 3 e vediamo

$$d'(h\, dg_1 \wedge \dots dg_k) = d'h \wedge dg_1 \wedge dg_K + h\, d'(dg_1 \wedge \dots dg_k)$$

$$= \cancel{d'h \wedge dg}\ \underset{\text{punto 1.}}{dh} \wedge dg_1 \wedge dg_K + h\, d'(\underset{\text{punto 1.}}{d'g_1} \wedge \dots d'g_K)$$

$$= dh \wedge dg_1 \wedge dg_K.$$

Quindi $d' \equiv d$ su forme $h\,dg_1 \wedge dg_k$.
e loro combinazioni, di conseguenza su tutte le k-forme.

Esistenza: Notare che dall'unicità otteniamo anche una definizione di d su aperti $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$\omega = \sum_I f_I \, dx_I \in \mathcal{E}^k(A)$$

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_I.$$

~~Dim~~ Verifichiamo che valgono 1, 2, 3) in questo caso.
Ovviamente $d\omega \in \mathcal{E}^{k+1}(A)$ e 1 vale.
2) Per linearità basta verificare

$$d^2(f\,dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = 0$$

$$d^2(f\,dx_1 \wedge \dots dx_k) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

$$= \left(\sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i\right) dx_1 \dots \wedge dx_k = 0$$

perché $dx_i \wedge dx_i = 0$
$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad i \neq j$

Rimane 3), cioè

$$d(f\,dx_I \wedge g\,dx_J) = d(fg\,dx_I \wedge dx_J)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J =$$

$$d(f dx_I) \wedge g\,dx_J) + (-1)^k f\,dx_I \wedge d(g\,dx_J)$$

Osservazione $F : A \longrightarrow B$ diffeomorfismo

$$F^* dv = dF^* v \quad v \in \mathcal{E}^k(B)$$

(già visto per $k=0$)

Possiamo assumere $v = f\,dx_I$.

$$F^* d(f d_I) = F^*(df \wedge dx_I) = F^*(df) \wedge F^*(dx_I)$$

$$dF^* f \wedge d(F^* dx_I) = d(F^*(f)\, F^* dx_I)$$

Esterno su M $\quad \omega \in \mathcal{E}^k(M)$ (U, φ) carta locale $\omega|_U = \varphi^* \mu \quad \mu \in \mathcal{E}^k(\varphi(U))$

$$d\omega|_U = \varphi^* d\mu$$

Si verifica che è ben posta se si fa il conto su un'altra carta locale e possiamo applicare al cambio di carta $\psi\varphi^{-1}$ quanto appena visto per la F.
L'operatore d verifica le proprietà nelle carte locali e si incolla bene.

Funtorialità

$F: M \longrightarrow N$ diffeomorfismo

abbiamo visto

$F_*: V(M) \longrightarrow V(N)$ e

$F^*: \mathcal{E}^k(N) \longrightarrow \mathcal{E}^k(M)$

Relativamente a F^* abbiamo anche

$$F^*: \mathcal{E}^0(N) \to \mathcal{E}^0(M)$$

$\forall\ F: M \longrightarrow N$. C^∞.

Abbiamo quindi il seguente:

<u>Teorema</u>: $F: M \longrightarrow N$ C^∞. Allora $\forall\, k \geq 0$ esiste ed è unico un omomorfismo

$$F^*: \mathcal{E}^k(N) \longrightarrow \mathcal{E}^k(M)$$

con le seguenti proprietà

1) $F^* f = f \circ F$ per $f \in \mathcal{E}^0(M)$
2) $F^*(\omega \wedge \omega') = F^*\omega \wedge F^*\omega'$ $\omega \in \mathcal{E}^k(N), \omega' \in \mathcal{E}^h(N)$
3) $F^* d = d F^*$
4) $U \subseteq M$ aperto $(F^*\omega)|_U = F|_U^{\,*}\, \omega|_V$

dove $F: U \longrightarrow V$.

Inoltre

5) $(1_M)^* = 1_{\mathcal{E}^k(M)}$
6) $(G F)^* = F^* \circ G^*$ con $G: N \longrightarrow P$ C^∞.

<u>Dimostrazione</u>: Unicità

Usiamo vecchie notazioni $\hat{\omega}$ comb lineare di $\mu = h\, dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$.

$\hat{\omega}|_V = \omega|_V$

$F^*\omega|_U = F^*\hat{\omega}|_U$

Ma adesso su $dg_1 \wedge \dots dg_k$.

F^* è lineare, infatti

$$F^*\mu = F^*(h\, dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = F^*h\, F^*(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)$$

$$= F^*h\, d(F^*g_1) \wedge \dots \wedge d(F^*g_k).$$

Ovviamente la scelta di $\hat{\omega}$ non è unica. Bisogna verificare l'indipendenza dalla scelta di $\hat{\omega}$. Ma questa è ovvia una volta che si prende $\hat{\omega}'$ t.c. $\hat{\omega} - \hat{\omega}' \equiv 0$ in un intorno di $F(p)$. Infatti queste forme differenziali calcolate in campi vettoriali nel punto p coincidono. L'unico problema è definire

$$F_{*,p}(X_p) = Y_{F(p)}$$

, ma questo si può fare localmente, infatti se $X_1 \dots X_k \in V(M)$ possiamo scegliere dei campi vettoriali $Y_1 \dots Y_k \in V(N)$ t.c. $F_{*,p}(X_{i,p}) = Y_{i,F(p)}$

Poi tutto è routine (Sugli appunti un po' diverso con dettagli!!)

Esempi

Ipersuperfici $\quad M = \{(x_1 \dots x_n) / F(x_1 \dots x_n) = 0\}$

Sia $\quad v = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \in T_p(M)$.

Poniamo $v(F) = 0$ e verifichiamo che $v \in T_p(M)$

$f \in \mathcal{E}^0(M) \quad v(f) = v(\tilde{f})$ dove $\tilde{f}$ estensione a $\mathbb{R}^n$ di f intorno a p.

Ben posta Sia $\tilde{g}$ un'altra estensione e $\tilde{h} = \tilde{f} - \tilde{g}$. Sia $(V, \bar{\varphi})^{\subseteq (U,\varphi)}$, $p \in V$ una carta locale indotta dal teorema delle funzioni implicite, quindi $\varphi : V = U \cap M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ha equazione $x_n = 0$

$$\tilde{h} \varphi^{-1}(x_1 \dots x_{n-1}, 0) \equiv 0.$$

quindi $\tilde{h} \varphi^{-1}(x_1 \dots x_n) = x_n k(x_1 \dots x_n) + \sum f_i g_i$

$$0 = f_i(0 \dots 0) = g_i(0 \dots 0)$$

quindi $v(\tilde{h}) \equiv 0$.

Quindi campi vettoriali su M sono del tipo $X = \sum_i a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ con la condizione $X(F) \equiv 0$

Sfere

$$S^n = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1 = 0$$

Campo vettoriale (n dispari)

$$X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots\cdots + x_{2k} \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} - x_{2k-1} \frac{\partial}{\partial x_{2k}} .$$

Campo vettoriale mai nullo su S^n.

n pari $n = 2k$

$$x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots\cdots - x_{2k-1} \frac{\partial}{\partial x_{2k}} .$$

Campo vettoriale mai nullo eccetto che ai 2 poli $(0 \ldots 0, \pm 1)$.

Gruppi di Lie

Identificazione $V = T_v(V)$ pensando un vettore $w \in V$ come alla ~~der~~ derivazione D_w in v.

derivata direzionale

$$D_w(f) = \frac{d}{dt} f(v + tw) \Big|_{t=0}$$

Abbiamo visto i gruppi classici come sottovarietà aperte o chiuse di $M_n(K)$ $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$G \subseteq M_n(K)$ $\quad l_g : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto gx$ diffeomorfismo

$$(l_g)_* T_e(G) = T_g(G) \qquad e = Id$$

$G = GL(n,K) \subseteq M_n(K)$ aperto

$$T_I(GL(n,K)) = T M_n(K)$$

Gli altri sottogruppi sono chiusi in $GL(n,K)$ definiti da equazioni $F_i = 0$. in $M_n(K)$

Quindi

$$D_A(\det X) = \frac{d}{dt} \det(I + tA)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(1 + t\, tr(A) + t^2(\dots)\right)$$

$$= tr(A) \longleftarrow \text{coeff termine grado 1}$$

$$D_A({}^tXX) = \frac{d}{dt} \det({}^t(I+tA)(I+tA))\Big|_{t=0}$$

$$= {}^tA + A \longleftarrow \text{coeff termine grado 1}$$

Inoltre $T_e(G)$ si può identificare con un'algebra di Lie.

Quindi

$$T_I(SL(n,K)) = \{ A \in M_n(K) \ / \ Tr(A) = 0 \}$$

$$T_I(O(n,K)) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tA = -A \}.$$

$$T_1(S^1)$$

$$S^1 = \{(x,y) \ / \ x^2+y^2=1\} \ = SO(2) = U(1).$$

$$T_I(SO(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$T_1(U(1)) = \{ z = -\bar{z} \} = \{ iy \}.$$

$$T_{[W]}\mathbb{P}(V) = T_0\mathbb{C}^{n-1} = Hom(W \longrightarrow V/W)$$

leggere sugli appunti

$\boxed{V/W}$

$Hom(W / V/W)$

Forme differenziali su S^1.

Carte locali $S^1 \setminus \{N\} = U \qquad S^1 \setminus \{S\} = V$.

$$\varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

$$\theta \longrightarrow \theta \qquad \theta \in (0, \pi)$$

$$\theta \longmapsto \theta - 2\pi \qquad \theta \in (\pi, 2\pi)$$

$$\omega|_U = \varphi^* d\theta$$

$$\omega|_V = \psi^* d\theta.$$

Forma "$d\theta$"

Osservazione $d\theta = d \operatorname{arctg}(y/x) = \frac{1}{1+(y/x)^2} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} =$

$$\frac{1}{x^2+y^2}(x\,dy - y\,dx) = x\,dy - y\,dx$$

Campo vettoriale $x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$

duale $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cdot} dy - y\,dx\right)$

Forme differenziali su $T_n = \mathbb{R}^n / \Lambda$

$$\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n / \Lambda$$

Forme ω_i t.c. $\pi^* \omega_i = dx_i$

Di fatto $d(x_i+\lambda) = dx_i$

$\mathcal{C}$ curva algebrica proiettiva non singolare piana

$\mathcal{C}$ è una superficie di Riemann compatta.

equazione $F_d(X,Y,Z) = 0$

$\varphi(X,Y,Z)$ un qualunque polinomio omogeneo di grado $d-3$

Vogliamo forme differenziali

Vediamo nelle carte locali di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$U_0 = \{[X,Y,Z] \,/\, X \neq 0\}$ $\quad U_1 = \{[X,Y,Z] \,/\, Y \neq 0\}$

$U_2 = \{[X,Y,Z] \,/\, Z \neq 0\}$

In U_2 poniamo $\dfrac{X}{Z} = x$, $\dfrac{Y}{Z} = y$.

In U_2 $\quad \dfrac{X}{Y} = u \quad \dfrac{Z}{Y} = v$.

In U_0 $\quad \dfrac{Y}{X} = \xi \quad \dfrac{Z}{X} = \eta$.

Definiamo le 1-forme

$$\omega|_{U_2} = \frac{\varphi(x,y,1)\,dx}{\frac{\partial}{\partial y} F(x,y,1)} \quad , \quad \omega_{U_1} = -\frac{\varphi(u,1,v)\,du}{\frac{\partial}{\partial v} F(u,1,v)}$$

$$\omega_{U_0} = \frac{\varphi(1,\xi,\eta)\,d\xi}{\frac{\partial F}{\partial \eta}(1,\xi,\eta)}$$

Vediamo ~~che~~ ω_{U_i} sono C^∞. Basta un caso.

Dalle formule di ~~Plucker~~ Eulero sappiamo che:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,1)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,1)\,dy = 0$$

quindi

$$\omega_{U_2} = \frac{\varphi(x,y,1)\,dx}{\frac{\partial}{\partial y} F(x,y,1)} = -\frac{\varphi(x,y,1)\,dy}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

Attenzione Note errate!!

Una delle due è diversa da zero quindi C^∞

Inoltre

$$\omega_{U_2}|_{U_2 \cap U_1} = \omega_{U_1}|_{U_1 \cap U_2} \quad , \quad \text{infatti}$$

$$\omega_{V_1}|_{V_1\cap V_2} = \frac{\varphi(u,1,v)\,dv}{\frac{\partial}{\partial u}F(u,1,v)} = \frac{\varphi\left(\frac{x}{y},1,\frac{1}{y}\right)d\left(\frac{1}{y}\right)}{\partial/\partial(x/y)\;F\left(x/y,1,\frac{1}{y}\right)} =$$

$$\frac{\varphi\left(\frac{x}{y},1,\frac{1}{y}\right)d\left(\frac{1}{y}\right)}{y\,\frac{\partial}{\partial x}F\left(\frac{x}{y},1,\frac{1}{y}\right)} = -\frac{y^{-d+3}\varphi(x,y,1)\,y^{-2}dy}{y^{-d+1}\,\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,1)} =$$

$$\omega_{V_2}|_{V_1\cap V_2}.$$

Quindi le ω_U definiscono 1-Forme C^∞ su $\mathcal{C}$.

OSSERVAZIONE: Su $\mathcal{C}$ possiamo trovare un insieme di $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ forme differenziali indipendent.
Basta calcolare la dimensione dei polinomi omogenei di grado $d-3$ in 3 variabili

In generale abbiamo che

$$\dim \mathbb{C}[X,Y,Z]_{n} = \binom{n+2}{2}$$

dim per induzione. $n=0$ ok.

supponiamolo vero per $n=k$

Verifichiamolo per $n=k+1$

$$\dim \mathbb{C}[X,Y,Z]_k = \dim \mathbb{C}[x,y]_{\leq k}. =$$

$$\dim \mathbb{C}[X,Y,Z]_{k+1} = \underbrace{\dim \mathbb{C}[x,y]_{\leq k}}_{\binom{k+2}{2}} + \underbrace{\dim \mathbb{C}[x,y]_{k+1}}_{k+2}$$

$$\binom{k+2}{2} + (k+2) = \frac{1}{2}(k+2)(k+1) + (k+2) = \frac{1}{2}(k+3)(k+2) \checkmark.$$

Complesso di de Rham e lemma di Poincaré

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{E}^k(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{k+2}(M)$$

complesso di de Rham

$$Z^k_{dR}(M) = \{\omega \in \mathcal{E}^k(M) \mid d\omega = 0\}$$ forme chiuse

$$B^k_{dR}(M) = \{\omega \in \mathcal{E}^k(M) \mid \omega = d\varphi\}$$ forme esatte

Abbiamo $d^2 = 0$ quindi

$$H^k_{dR}(M) = Z^k_{dR}(M) \big/ B^k_{dR}(M) .$$

$F: M \longrightarrow N$ applicazione C^∞.

abbiamo $$F^*: \mathcal{E}^k(N) \longrightarrow \mathcal{E}^k(M)$$

Inoltre sappiamo $F^* d = dF^*$, quindi

F^* porta forme esatte in forme esatte
" chiuse " " chiuse

$$F^*: H^k_{dR}(N) \longrightarrow H^k_{dR}(M)$$

Se $G: N \to L$ un'altra applicazione

abbiamo $(G\circ F)^* = G^*\circ F^*$ $\quad (1_M)^* = 1_{H^k_{dR}(M)}$

Abbiamo quindi un funtore controvariante dalla categoria delle varietà differenziabili a quella degli spazi vettoriali (reali)

Osservazione possiamo considerare forme differenziali complesse (a valori complessi)

$\mathcal{E}^k(M,\mathbb{C}) \qquad \omega \overset{loc}{=} \sum_I f_I \, dx_I$

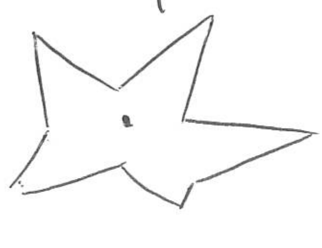
funzioni C^∞ a valori complessi

e abbiamo un complesso simile

$$\mathcal{E}^k(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{k+2}(M) \to \dots$$

Calcolo della coomologia

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto stellato rispetto a un punto $p \in U$ se $\forall\, q \in U$ $\overline{pq} \in U$



Di nuovo $p = 0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$.

U aperto stellato

$$\mathcal{E}^k(U) \longrightarrow \mathcal{E}^{k+1}(U) \to \dots$$

Vogliamo costruire $T : \mathcal{E}^k(U) \longrightarrow \mathcal{E}^{k-1}(U)$

tale che $\forall\, \omega \in \mathcal{E}^k(U)$

$$\omega = dT\omega + Td\omega .$$

Da qui avremo che $H^k_{dR}(U) = 0 \quad k > 0$

Infatti se ω è chiusa $\omega = dT\omega + \cancel{Td\omega}$

$\Rightarrow \omega$ esatta (Lemma di Poincaré).

<u>Osservazione</u> U stellato $\Rightarrow$ U connesso quindi

$$Z^0_{dR} = \{\text{costanti}\} \qquad H^0_{dR}(M) = \mathbb{R} .$$

$$B^0_{dR} = 0$$

Costruiamo T prendiamo $\omega = \sum f_I \, dx_I$,

quindi lo definiamo su $\omega = f\, dx_I$.

$$T\omega = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^{k-1} f(tx)\, x_{i_\alpha}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge dx_{i_k}.$$

dimostriamo la formula

deriviamo x_{i_α}.

$$dT\omega = \sum k \int_0^1 t^{k-1} f(tx)\, dx_I$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, x_{i_\alpha}\, dx_j \wedge \dots \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$$

$$T(d\omega) = \sum_{j=1}^{n} \int t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, x_j\, dx_I +$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha} \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, x_{i_\alpha}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \quad \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge dx_{i_k}$$

$$dT\omega + Td\omega = k\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\, dx_I +$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^k \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, x_{i_\alpha}}\, dx_I$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t^k f(tx)\right) dx_I \quad = f\, dx_I.$$

Integrazione delle k-forme differenziali

M varietà differenziale

$$\sigma : \Delta_k \longrightarrow M \qquad k\text{-simplesso } C^\infty$$

σ la pensiamo C^∞ in un intorno di Δ_k.

$$C_k^\infty(M,A) = \left\{ c = \sum_i a_i \sigma_i \quad \begin{array}{l} a_i \in A \\ \sigma_i \ k\text{-simpl. } C^\infty \end{array} \right\}$$

Ovviamente $\partial : C_k^\infty(M,A) \longrightarrow C_{k-1}^\infty(M,A)$

Possiamo considerare $H_k^\infty(M,A)$

che è isomorfo a $H_k(M,A)$ in quanto ogni simplesso singolare è omotopo a uno C^∞.

(fare approssimazione C^∞ nelle carte)

Quindi se $\sigma \in \mathcal{E}^k(M)$, definiamo

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_k} \sigma^* \omega .$$

adesso $\sigma^*\omega$ è una k-forma diff definita in $U \supseteq \Delta_k$

Quindi $\sigma^*\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$.

$$\int_{\Delta_k} \sigma^*\omega = \int_{\Delta_k} f .$$

Ovviamente si estende a catene $c \in C_k^\infty(M,\mathbb{R})$

$$\int_c \omega = \sum_i k_i \int_{\sigma_i} \omega . \qquad c = \sum_i k_i \sigma_i$$

Teorema (Stokes I^a versione) M varietà differenziabile $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(M)$ $c \in C_k^\infty(M,\mathbb{R})$. Allora

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega .$$

Dim possiamo ridurci a $c = \sigma$.

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\Delta_k} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta_k} d\sigma^*\omega .$$

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{\sigma \circ J_s} \omega = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{\Delta_{k-1}} J_s^* \sigma^* \omega .$$

Posto $\sigma^*\omega = \varphi$ dobbiamo verificare.

$$\int_{\Delta_k} d\varphi = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{\Delta_{k-1}} J_s^* \varphi .$$

Per linearità abbiamo

$$\varphi = f\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge dx_k$$ (28)

$$\int_{\Delta_k} d\varphi = \int_{\Delta_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k =$$

$$(-1)^{i-1} \int_{\Delta_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = (-1)^{i-1} \int_{\Delta_{k-1}} \Big[f(x_1 \dots x_{i-1}, 1 - \sum_{j \neq i} x_j, \dots x_k) - f(x_1 \dots x_{i-1}, 0, \dots x_k) \Big]$$

D'altra parte

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{\Delta_{k-1}} j_s^* \varphi = f(1 - \sum_i y_i, y_1 \dots y_{k-1})(-dy_{i-1}) \wedge$$

$$dy_1 \dots \wedge \widehat{dy_{i-1}}\, dy_{k-1}$$

$$+ (-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} f(y_1 \dots y_{i-1}, 0, \dots y_{k-1})\, dy_1 \wedge \dots dy_{k-1} =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{\Delta_{k-1}} f(1 - \sum_i y_i, y_1 \dots y_{k-1}) + (-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} f(y_1 \dots y_{i-1}, 0 \dots y_{k-1})$$

Come calcolare integrale

$U \subseteq \mathbb{R}^k$ dominio $\quad F: U \to F(U)$ diffeomorfismo

$$\int_{F(U)} f = \int_U |J_F| \, f \circ F .$$

valore assoluto del determinante

Adesso

$$F : \Delta_{k-1} \longrightarrow \Delta_{k-1}$$

$$(y_1 \dots y_{k-1}) \rightarrow (y_1 \dots, y_i, 1-\Sigma_i y_i, y_{i+1} \dots y_{k-2})$$

$$\int_{\Delta_{k-1}} f(1-\Sigma_i y_i, y_1 \dots y_{k-1}) = \int_{\Delta_{k-1}} f(y_1 \dots y_i, 1-\Sigma_i y_i, \dots y_{k-1}$$

Quindi il teorema è dimostrato

Teorema di Stokes induce un omomorfismo

$$I : H_k^{(\infty)}(M) \longrightarrow H^k_{dR}(M)^*$$

$$[c] \longrightarrow \Phi_{[c]} \quad \text{con } \Phi_{[c]}(\omega) = \int_c \omega .$$

Definizione ben posta

$$\int_c \omega = \int_{c+\partial\gamma} \omega + d\varphi$$

. Infatti x Stokes

abbiamo

$$\int_{c+\partial\gamma} \omega + d\varphi = \int_c \omega + \int_c d\varphi + \int_{\partial\gamma} \omega + \int_{\partial\gamma} d\varphi =$$

$$\int_c \omega + \int_\gamma d\omega + \int_{\partial c} \varphi + \int_\gamma d^2\varphi = \int_c \omega .$$

Si dimostrerà che se M è una varietà abbastanza buona $\Rightarrow I$ è un isomorfismo. Teorema di de Rham. Quindi i gruppi di coomologia che sono invarianti per diffeomorfismi in verità sono invarianti omotopici.