POLITOPI
VOLUME E PUNTI INTERI

NOTE DI CLAUDIO PROCESI.

Abstract. Si tratta di una espansione di un corso di eccellenza dato al Politecinico di Torino

INTRODUZIONE

Queste note sono una espansione di un breve corso di eccellenza da me tenuto nel Settembre 2005 al "Dipartimento di Produzione ed Economia dell'Azienda" del Politecnico di Torino.

L'interesse su questi argomenti è iniziato da conversazioni avute con Velleda Baldoni e Michelle Vergne (e leggendo la esposizione [**?**]),

Insieme a Corrado De Concini abbiamo trovato un legame fra questa Teoria e quella da noi sviluppata sui modelli meravigliosi degli arrangiamenti di iperpiani. Da cui sono scaturiti alcuni lavori che in parte sono ripresi in queste note.

Poiché queste note sono state estratte da una presentazione (scritta con beamer) per computer, mantengono tutto lo spirito di una successione di trasparenze.

Spero che comunque anche in questa forma possano essere utili. Mancano molti argomenti collegati per cui rimandiamo alla vasta bibliografia.

Claudio Procesi

L'autore è parzialmente finanziato dal Cofin 40 %, MIUR.

LEZIONE 1. Funzioni di Partizione

1: Politopi convessi Vogliamo trattare, da vari punti di vista, un problema

fondamentale che formuleremo in vari modi distinti.

Partiamo da un sistema di equazioni lineari:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = b, \quad \text{o} \quad Ax = b, \quad A := (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \tag{1}$$

Le *colonne* α_i, b sono vettori ad n coordinate

$$(\alpha_{j,i}, b_j, \ j = 1, \dots, n).$$

Inizialmente assumiamo che la matrice A sia $n \times m$ a coefficienti reali.

L'oggetto di studio Come nella usale programmazione lineare vogliamo studiare l'insieme $P_A(b)$ delle soluzioni di (**??**) in cui le coordinate $x_i \geq 0$ sono numeri reali non negativi.

Studieremo anche il caso più difficile in cui assumiamo che: gli elementi della matrice A e del termine noto b sono numeri interi, ovvero i:

$$(\text{vettori colonna})\ \alpha_1, \dots \alpha_m, b \in \mathbb{Z}^n.$$

Caso aritmetico In questo caso vogliamo calcolare il numero $S_A(b)$ delle soluzioni del sistema $(x_1, \dots, x_m)$ in cui le coordinate x_i sono interi non negativi.

I problemi che vogliamo studiare sono interessanti solo se: assumiamo che l'insieme:

- $$P_A(b) := \{x \mid Ax = b, x_i \geq 0\}$$
  è *limitato* (ovvero compatto) per ogni b.
- In ogni caso $P_A(b)$ è ovviamente convesso, se anche limitato è un *poliedro convesso limitato.*
- In questo caso il suo volume è finito e, nel caso in cui A, b sono a coordinate intere, l'insieme $S_A(b)$ consiste dei punti a coordinate intere in $P_A(b)$ ed è quindi evidentemente un insieme finito.

Usualmente si assume che le colonne α_i generino lo spazio $\mathbb{R}^n$ (o ci si riduce facilmente a questo caso).

Dimensione: Se esiste almeno una soluzione con tutte le coordinate strettamente positive, il poliedro $P_A(b)$ è un poliedro di *dimensione* $m - n$, nello spazio V_b, di dimensione $m - n$, di tutte le soluzioni di $Ax = b$.

Vi è un semplice criterio necessario e sufficiente affinché il poliedro $P_A(b)$ sia sempre compatto, si deve avere che:

Criterio 1.1. *esistono numeri* $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ *tali che*

$$\sum_{j=1}^{n} \ell_j \alpha_{j,i} > 0, \quad \forall i = 1, \dots m. \tag{2}$$

per ogni $i = 1, \dots m$.

In questo caso una restrizione necessaria (ma non sufficiente) su b a che sia $P_A(b)$ non vuoto e non ridotto a $\{0\}$ è

$$\sum_{j=1}^{n} \ell_j b_j > 0$$

ossservazione 1.2. *In effetti per una matrice A con colonne α_i vale una ed una sola delle due possibilitá:*

(1) Esiste un vettore riga ℓ con ℓA a coordinate > 0.
(2) 0 è combinazione lineare convessa delle colonne α_i.

Inoltre 1. è equivalente all'esistenza di un iperpiano passante per l'origine, tale che tutte le colonne α_i siano tutti dallo stesso lato rispetto a tale iperpiano, ovvero l'inviluppo convesso dei punti α_i non incontra l'iperpiano.

In altre parole i vettori $\alpha_1, \dots \alpha_m$ danno luogo ad una mappa:

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

$$f(a_1, \dots a_m) := a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m.$$

Pertanto in questo linguaggio il politopo:

$$P_A(b) = f^{-1}(b) \cap \mathbb{R}^{m+},$$

dove $\mathbb{R}^{m+}$ indica il quadrante positivo .

I nostri obiettivi sono dunque di:

(1) Calcolare il volume di $P_A(b)$.
(2) Nel caso A, b interi, calcolare il numero $S_A(b)$ dei punti a coordinate intere di $P_A(b)$.

Naturalmente si può calcolare tale numero $S_A(b)$ anche se A, b non sono a coordinate intere.

In questo caso il problema si complica enormemente ed è fuori dalla nostra trattazione.

Quando A, b sono interi è naturale pensare ad una espressione:

$b = a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m$ con gli a_i interi non negativi come ad una:

partizione di b tramite i vettori α_i, in $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ parti, da cui il nome *funzione di partizione* per il numero $S_A(b)$, pensato come funzione del vettore b.

Le funzioni di partizione appaiono in vari campi della matematica come ad esempio la Teoria delle Rappresentazioni o la Meccanica Statistica.

Poliedro variabile

È meglio, da un punto di vista geometrico, pensare al poliedro variabile $P_A(b) = f^{-1}(b) \cap \mathbb{R}^{m+}$ come un *poliedro variabile in un unico spazio, lo spazio $f^{-1}(0)$.*

invece che come poliedro nel sottospazio variabile $f^{-1}(b)$.

Questo si può fare se forniamo un modo canonico di identificare gli spazi $f^{-1}(b)$ ad $f^{-1}(0)$.

Poliedro variabile

Una maniera geometricamente utile di farlo è di scegliere in $\mathbb{R}^m$ un sottospazio W complementare a $f^{-1}(0)$, ad esempio il complemento ortogonale.

In tal modo abbiamo una funzione lineare $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con immagine W tale che $f \circ i$ sia l'identità di $\mathbb{R}^n$. Tramite tale mappa identifichiamo:

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(0) + i(b),$$

$$P_A(b) - i(b) \subset f^{-1}(0)$$

è il politopo variabile nello spazio $f^{-1}(0)$.

Nel caso aritmetico dobbiamo scegliere i in modo tale che $i(b)$ sia a coordinate intere se lo è b.

Digressione:

- In generale un politopo convesso è definito come l'inviluppo convesso di un numero finito di punti.
- Un tale politopo può essere anche presentato come inviluppo ovvero con un numero finito di disequazioni lineari $\sum_i a_{j,i}x_i \geq b_i, \ j = 1, \ldots, n$.

Se assumiamo che il politopo sia contenuto nel quadrante positivo $x_i \geq 0$ abbiamo immediatamente la formulazione da noi presa.

Infatti aggiungendo una variabile y_j per ogni disequazione possiamo riformulare la disequazione come:

$$\sum_i a_{j,i}x_i - y_i = b_i, \ y_i \geq 0, \ j = 1, \ldots, n.$$

Questo è il modo che abbiamo scelto per rappresentare i politopi.

Lezione 2. Politopi e networks

2: Grafi orientati

Vogliamo discutere una ricca classe di esempi.

Sia $\Gamma := (V, L)$ un grafo orientato.

- V è l'insieme dei vertici
- L l'insieme dei lati.
- L'orientazione consiste nell'assumere che ogni lato $a \in L$ ha un vertice iniziale $i(a)$ ed un vertice finale $f(a)$.

Assumiamo inoltre che non vi siano lati con $i(a) = f(a)$ e che due vertici siano uniti da al più un lato.

Per associare a tali grafi dei politopi definiamo:

Spazio e vettori associati

(1) Costruiamo uno spazio vettoriale con base elementi e_v al variare di v nei vertici.

(2) Consideriamo l'insieme dei vettori $\Delta_\Gamma := \{x_a := e_{f(a)} - e_{i(a)}\}$ al variare di $a \in L$.

(3) Chiamiamo V_Γ lo spazio generato dai vettori x_a.

Lemma 2.1. *I vettori x_a generano uno spazio V_Γ di dimensione $|V| - b_0$ dove:*

- *V è il numero di elementi di V e*
- *b_0 il numero di componenti connesse di Γ.*

DIM Poiché gli spazi formati dai vettori nelle diverse componenti connesse formano una somma diretta ci si riduce immediatamente al caso Γ connesso ovvero $b_0 = 1$. In questo caso i vettori generano un sottospazio U formato da vettori in cui, la somma delle coordinate nella base e_v è 0. Affermiamo che U coincide con questo sottospazio. Infatti scegliamo un vettore e_v ed aggiungiamolo ad U per connessione ogni $e_w \in U + Re_v$ da cui l'asserto.

ossservazione 2.2. *Se Γ è connesso:*
$|V| - 1$ lati a_i sono tali che i vettori x_{a_i} sono una base di V_Γ
se e solo se tali lati generano un sottoalbero massimale.

Se, con la data orientazione i vettori x_a generano un cono puntuto, parleremo di un network e potremo definire i politopi associati al network.

La prossima proposizione ci da una idea di quando una orientazione fornisce un network e quando si può fare una tale costruzione su un grafo dato.

Proposizione 2.3. *Abbiamo:*

(1) Un modo di ottenere un network consiste nel fissare arbitrariamente un ordinamento totale su tutti i vertici ed orientare i lati secondo questo ordinamento.

(2) Un grafo orientato è un network se e solo se non contiene circuiti orientati chiusi.

(3) In ogni network possiamo ordinare i vertici in modo compatibile alla orientazione.

Dim.

(1) Supponiamo di avere un ordine totale dei vertici, prendiamo un vettore α con coordinate strettamente crescenti rispetto a questo ordinamento, abbiamo allora che il prodotto scalare di α con ogni x_a è strettamente positivo.

(2) Un circuito orientato $a_1, \dots, a_k$ da i vettori $x_{a_1}, \dots, x_{a_k}$ con $x_{a_1} + \cdots + x_{a_k} = 0$ ovvero 0 è combinazione convessa e non abbiamo un network.

(3) Viceversa se non vi sono circuiti prendiamo una catena massimale orientata $v_1, \dots, v_k$, necessariamente v_1 è una sorgente altrimenti potremmo allungare la catena. Prendiamo questa sorgente come vertice minimale, rimuoviamo tale sorgente (e tutti i lati che da essa originano) e poi continuiamo in modo ricorsivo.

3: DUE ESEMPI:

(1) Prendiamo il grafo completo su i vertici $1, 2, \dots, n$ orientato in base all'ordinamento dato.
    Pertanto i vettori x_a sono tutti i vettori $e_i - e_j,\ i < j$.
    Questo oggetto appare anche come l'insieme delle radici positive per il tipo A_{n-1}.

(2) Prendiamo ora due insiemi disgiunti A, B con h, k elementi, prendiamo il grafo orientato con vertici $A \cup B$ e lati tutti i lati che uniscono un punto di A (iniziale) ad uno di B finale.

Pertanto i vettori x_a sono tutti gli elementi $e_b - e_a,\ b \in B,\ a \in A$.

Un vettore $\sum_{a \in A,\ b \in B} r_{b,a}(e_b - e_a)$ dello spazio, con base tali vettori, può alternativamente essere pensato come una

matrice R di indici di riga B e di colonna A.

Prendiamo come vettore b il vettore $r(\sum_{a \in A} e_a) + s(\sum_{b \in B} e_b)$ con r, s due numeri positivi.

La condizione $\sum_{a \in A,\ b \in B} r_{b,a}(e_b - e_a) = r(\sum_{a \in A} e_a) + s(\sum_{b \in B} e_b)$ dice che:

la matrice R è un tipo di rettangolo magico

- Ovvero la somma sulle righe è s e sulle colonne è r.
- In particolare quando A, B hanno lo stesso numero di elementi e $r = s$ abbiamo un quadrato magico.

Lezione 3. Funzioni generatrici

4: Il cono positivo

Evidentemente, l'insieme dei vettori b per cui $P_A(b)$ è non vuoto coincide per definizione con l'insieme:

$$C_A := \{\sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_i \,|\, x_i \geq 0\} \tag{3}$$

Evidentemente C_A è un cono convesso. La condizione (**??**) del Criterio ol dire che il cono C_A meno il punto 0, è tutto contenuto nel semispazio $\sum_{i=1}^{n} \ell_i y_i > 0$. Si dice usualmente che C_A è un cono puntuto e 0 è il suo vertice.

È utile considerare anche il cono duale $\hat{C}_A$ di C_A. Nello spazio duale esso è formato da tutti quei vettori (riga) che hanno prodotto scalare non negativo con tutti i vettori α_i ovvero con tutti i vettori del cono C_A. Sotto la ipotesi (**??**) evidentemente $\hat{C}_A$ è un cono contenente un interno non vuoto.

5: Funzione generatrice per i punti interi

Nel caso in cui A, b siano interi vi è una semplice riformulazione dei numeri $S_A(b)$:

Teorema 5.1. *Il numero $S_A(b)$ è il coefficiente di $\prod_i x_i^{b_i}$ nella espansione in serie di potenze della funzione razionale:*

$$\prod_j (1 - \prod_{k=1}^n x_k^{a_{k,j}})^{-1} = \prod_j (\sum_{h=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n x_k^{h a_{k,j}}). \tag{4}$$

osservazione 5.1. *Si noti che la espressione* **??** *non solo ha senso formalmente ma converge nella regione $\mathcal{C}$ dello spazio dove $\prod_{k=1}^r x_k^{a_{k,j}} < 1, \ \forall j$.*

Prendiamo coordinate logaritmiche $x_k = e^{\theta_k}$.

Dato un vettore $\alpha := (a_1, \dots, a_n)$ a coordinate intere poniamo e^α:

$$e^\alpha(\theta_1, \dots, \theta_n) := e^{\sum_{j=1}^n a_j \theta_j}$$

Naturalmente abbiamo, dati vettori α, β ed interi m, n:

$$e^{m\alpha + n\beta} = (e^\alpha)^m (e^\beta)^n.$$

In coordinate logaritmiche la regione $\mathcal{C}$ dove $\sum_k \theta_k a_{k,j} < 0$.
è l'interno del cono duale.
Abbiamo quindi nell'interno del cono duale la formula da invertire per calcolare il numero dei punti interi: Formula da Invertire

$$\prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - e^{\alpha_i}} = \sum_{b \in \mathbb{Z}^n} S_A(b) e^b. \tag{5}$$

Nonostante la formulazione data sia semplice il problema dell'inversione è tuttaltro che semplice come vedremo.

Lezione 4. Funzioni generatrici del volume

6: La trasformata di Laplace

D'ora in poi useremo le notazioni

- $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ la lista dei vettori.
- $C_A := \{\sum_i x_i \alpha_i, \ x_i \geq 0\}$, il cono generato¿

Assumeremo sempre che C_A è puntuto e genera lo spazio ambiente V.

Il cono duale $\hat{C}_A$ è puntuto e genera lo spazio duale V^*.

Fissiamo su V una misura di Lebesgue standard che in opportune coordinate si scrive come $dx := dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

La trasformata di Laplace formalmente va da opportune funzioni su V a funzioni su V^* ed è definita come: Trasformata di Laplace

$$Lf(y) := \int_V e^{-(y,x)} f(x) dx. \tag{6}$$

Applicheremo la trasformata di Laplace, in particolare, ad opportune funzioni quasi polinomiali a supporto nel cono C_A.

osservazione 6.1.

- *In questo caso ci limitiamo a definire ed a calcolare la trasformata di Laplace per $y \in \hat{C}_A$.*
- *Solo per tali valori di y l'integrale converge.*

Vogliamo applicare la trasformata di Laplace alla funzione $V_A(b)$ che da il volume del politopo $P_A(b)$.

Si noti che tale funzione è continua ed ha supporto nel cono C_A.

Per calcolare tale trasformata riprendiamo la formulazione funzionale:

$$f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

$$f_A(t_1, \dots t_m) = t_1 \alpha_1 + \dots + t_m \alpha_m.$$

Procediamo in 3 passi

(1) Restringiamo la f_A al quadrante positivo $\mathbb{R}^{m+}$ da cui: $P_A(b) = f_A^{-1}(b)$.
(2) Applichiamo ora il teorema di Fubini alla funzione $e^{-(y, f_A(t))} \chi_+$, dove χ_+ è la funzione caratteristica di $\mathbb{R}^{m+}$.
(3) Dobbiamo normalizzare le misure euclidee in modo che quella di $\mathbb{R}^m$ sia il prodotto di quella della base $\mathbb{R}^n$ per quella della fibra.

Applichiamo dunque il teorema di Fubini alla funzione

$$\chi_+ e^{-(y, f_A(t_1, \dots t_m))} = \chi_+ e^{-\sum_{i=1}^m t_i (y, \alpha_i)}$$

ed abbiamo: Funzione Generatrice

$$\prod_{i=1}^m \frac{1}{(y, \alpha_i)} = \int_{\mathbb{R}^{m+}} e^{-(y, f(t_1, \dots t_m))} dt =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{f^{-1}(x)} e^{-(y,x)}\Big)dx = k \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y,x)} V_A(x)dx. \tag{7}$$

Con k *costante di normalizzazione da* calcolare. Questa analisi è certamente valida quando y si prende nell'interno del cono duale.

In altre parole la trasformata di Laplace del volume è definita all'interno del cono duale e vale la funzione razionale:

$$k^{-1} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} y_k}$$

CONCLUDENDO Sia per il calcolo del numero dei punti interi che per il volume dobbiamo risolvere un *problema di inversione*.

Resta da calcolare la costante k di normalizzazione del volume. Per questo osserviamo che tramite una trasformazione ortogonale U possiamo trasformare la matrice A nella forma a blocchi $AU = (B, 0)$ con B una matrice $n \times n$ invertibile.

Pensiamo quindi alla mappa f_A come ad una composizione:

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{U} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n$$

π è la proiezione di matrice $(1_n, 0)$.

Segue che $\int_{\mathbb{R}^n} g(Bx)dx = |\det(B)| \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx$ da cui $k = |\det(B)|$.
Finalmente $AA^t = (AU)(AU)^t = BB^t$ da cui la formula finale:

$$k^{-1} = |\det(B)| = \sqrt{|\det(AA^t)|}.$$

Riassumendo la formula da invertire per il calcolo del volume:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y,x)} V_A(x)dx = \sqrt{|\det(AA^t)|} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} y_k} \tag{8}$$

Lezione 5. Il problema del *knapsack*

7: Il caso dei numeri: *calcolo del volume*

Prima di affrontare il caso generale discutiamo il caso in cui i vettori α_i sono semplicemente dei numeri positivi, ovvero quando $n = 1$:

Abbiamo dunque interi positivi $\underline{h} := (h_1, \ldots, h_m)$, e chiediamo, dato un intero n di calcolare :

1 La funzione con trasformata di Laplace $\frac{|h|}{\prod h_i} y^{-m}$ cf. (**??**).

2 Il coefficiente di x^n nella funzione

$$F_{\underline{h}}(x) := \prod_i \frac{1}{1 - x^{h_i}}. \tag{9}$$

Il calcolo di 1. è piuttosto facile :

ossservazioni 7.1. • *qui la costante $k = |\underline{h}| = \sqrt{\sum_i h_i^2}$.*

- *Il poliedro $P_{\underline{h}}(b)$ associato ai numeri h_i, b è un simplesso, dato da:*

$$\{(x_1, \dots, x_m) \,|\, x_i \geq 0, \ \sum_i x_i h_i = b.\}$$

- *$P_{\underline{h}}(b)$ è l'inviluppo convesso dei vertici $P_i = (0, 0, \dots, 0, b/h_i, 0, \dots, 0)$.*

RIASSUMENDO

Potremmo calcolare il volume di $P_{\underline{h}}(b)$ direttamente ma calcoliamo la *funzione la cui trasformata di Laplace è y^{-m}.*

Usiamo le formule:

$$\frac{d}{dy} Lf = L(-xf), \qquad \int_0^\infty e^{-yx} dx = \frac{1}{y}. \tag{10}$$

da queste abbiamo che, se χ indica la funzione caratteristica della semiretta $x \geq 0$ si ha: Formula desiderata

$$L((-x)^k \chi) = (-1)^k k! y^{-k-1}.$$

CONCLUDENDO:

Teorema 7.1. *Il volume di $P_{\underline{h}}(b)$ risulta*

$$\boxed{\frac{|\underline{h}| b^{m-1}}{(m-1)! \prod h_i}}.$$

8: Decomposizione di un numero

Passiamo ora al più difficile caso 2.

Dobbiamo calcolare, al variare di n il coefficiente di x^n nella funzione $F_{\underline{h}}(x) = \prod_i \frac{1}{1 - x^{h_i}}$. Ovvero di x^{-1} in $\frac{x^{-n-1}}{\prod_i 1 - x^{h_i}}$.

Abbiamo due strategie possibili, essenzialmente equivalenti ma da analizzare separatamente dal punto di vista algoritmico.

1. Sviluppare $F_{\underline{h}}(x)$ in frazioni parziali.

2. Calcolare il residuo $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{x^{-n-1}}{\prod_i 1-x^{h_i}}dx$ intorno a 0.

In entrambi i casi prima di tutto dobbiamo espandere opportunamente la funzione $F_{\underline{h}}(x)$.

Procediamo con i seguenti passi:

(1) Fissato k poniamo $\zeta_k := e^{\frac{2\pi i}{k}}$, radice $k-$esima di 1.
(2) Ricordiamo l'identità:

$$1 - x^k = \prod_{i=0}^{k-1}(1 - \zeta_k^i x) = \prod_{i=0}^{k-1}(\zeta_k^i - x).$$

(3) Usando la precedente identità abbiamo:

$$F_{\underline{h}}(x) := \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{h_i}\frac{1}{\zeta_{h_i}^j - x} = \prod_{i=0}^{m-1}\prod_{j=1}^{h_i}\frac{1}{1-\zeta_{h_i}^j x}. \tag{11}$$

In altre parole sia m il minimo comune multiplo dei numeri h_i e sia $m = h_i k_i$. Poniamo $\zeta = e^{2\pi i/m}$, si ha $\zeta_{h_i} = \zeta^{k_i}$ pertanto abbiamo:

Lemma 8.1.

$$\prod_i \frac{1}{1-x^{h_i}} = \prod_{i=0}^{m-1}\prod_{j=1}^{h_i}\frac{1}{1-\zeta^{k_i j}x} = \prod_{i=0}^{m-1}\frac{1}{(1-\zeta^i x)^{b_i}}$$

dove gli interi b_i si calcolano facilmente a partire dagli h_j.

- Infatti dato i dobbiamo contare quanti numeri k_i sono divisori di i. Questo numero è b_i.
- In particolare la funzione $\prod_i \frac{x^{-n-1}}{1-x^{h_i}}$, $n \geq 0$ ha poli in 0 e nelle radici $m-$esime di 1 (ma non in ∞).

9: Primo metodo, sviluppo in frazioni parziali.

Il metodo classico implica che esistono numeri c_i per cui:

$$\prod_{i=0}^{m-1}\frac{1}{(1-\zeta^i x)^{b_i}} = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_i}{(1-\zeta^i x)^{b_i}}. \tag{12}$$

Per calcolarli si usa ad esempio ricorsivamente la semplice identità, (valida se $a \neq b$ sono due numeri):

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{1}{a-b}\Big[\frac{a}{(1-ax)} - \frac{b}{(1-bx)}\Big]$$

Il secondo passo è la semplice identità:

$$\frac{1}{(1-t)^k} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{k-1+h}{h} t^h \tag{13}$$

da cui otteniamo:

$$\prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{(1-\zeta^i x)^{b_i}} = \sum_{i=0}^{m-1} c_i (\sum_{h=0}^{\infty} \binom{b_i - 1 + h}{h} (\zeta^i x)^h). \tag{14}$$

In altre parole abbiamo una formula per il coefficiente

$$S_{\underline{h}}(b) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i(\zeta^{ib}) \binom{b_i - 1 + b}{b}.$$

Osserviamo ora che

$$\binom{b_i - 1 + b}{b} = \frac{(b+1)(b+2)\dots(b+b_i-1)}{(b_i-1)!}$$

è un polinomio di grado $b_i - 1$ in b, mentre i numeri ζ^{ib} dipendono solo dalla classe laterale di b modulo m. Fissato quindi un numero $0 \leq a < m$ e restringendoci ai numeri $b = mk + a$ abbiamo che:

Teorema 9.1. *La funzione $S_{\underline{h}}(mk + a)$ è un polinomio nella variabile k di grado $\leq \max(b_i)$, che può essere calcolato.*

A volte si esprime il fatto che $S_{\underline{h}}(b)$ è un polinomio su ogni classe laterale dicendo che:

$S_{\underline{h}}(b)$ è un quasipolinomio oppure un polinomio periodico.

Resta un ultimo piccolo problema algoritmico da discutere. Quando esplicitiamo i calcoli otteniamo, per ogni classe laterale un polinomio che prende valori interi ma che a priori è espresso con coefficienti che sono espressioni nella radice ζ. Bisogna saper quindi manipolare tali espressioni, questo è un semplice problema che però richiede un minimo di analisi con i polinomi ciclotomici (Appendice 1).

10: Secondo metodo, calcolo di residui

In questo caso la strategia è la seguente:

Spostare il calcolo del residuo sui rimanenti poli, sfruttando il fatto che la somma dei residui sui poli per una funzione razionale è 0.

Dalla teoria dei residui abbiamo:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\prod_i \frac{x^{-n-1}}{1-x^{h_i}}dx = -\sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_j}\prod_{i=1}^m \frac{x^{-n-1}}{(1-\zeta^i x)^{b_i}}dx$$

dove C_j è un piccolo cerchio intorno a ζ^{-j}.

Usiamo il fatto che il residuo a ∞ è 0, dato che $n \geq 0$.

(1) Per calcolare il termine $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_j}\prod_{i=1}^m \frac{x^{-n-1}}{(1-\zeta^i x)^{b_i}}dx$ si effettua un cambio di coordinate $x = w + \zeta^{-j}$ ottenendo:

(2)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_j}\prod_{i=1}^m \frac{(w+\zeta^{-j})^{-n-1}}{(1-\zeta^{i-j}-\zeta^i w)^{b_i}}dw.$$

(3) Ora $\prod_{i=1,\ i\neq j}^m \frac{1}{(1-\zeta^{i-j}-\zeta^i w)^{b_i}}$ è olomorfa intorno a 0 e si può espandere in serie di potenze esplicitamente $\sum_{h=0}^\infty a_{j,h}w^h$ mentre:

(4)

$$(w+\zeta^{-j})^{-n-1} = \zeta^{j(n+1)}\sum_{k=0}^\infty (-1)^k\binom{n+k}{k}(\zeta^j w)^k.$$

Finalmente abbiamo per il termine $j-$esimo:

$$-\frac{(-1)^{b_j}}{2\pi i}\oint_{C_j}\zeta^{j(n+1-b_j)}(\sum_{k=0}^\infty (-1)^k\binom{n+k}{k}\zeta^{jk}w^k)(\sum_{h=0}^\infty a_{j,h}w^h)w^{-b_j}dw$$

$$= -(-1)^{b_j}\zeta^{j(n+1-b_j)}\sum_{k+h=b_j-1}(-1)^k\zeta^{jk}\binom{n+k}{k}a_{j,h}.$$

Questa formula, sommata su tutti i j, fornisce di nuovo una formula esplicita per $S_{\underline{h}}(b)$ e lo presenta di nuovo come un *quasipolinomio*.

Si noti che per sviluppare queste formule basta calcolare un numero finito dei coefficienti $a_{j,h}$.

Questi teoremi sono dovuti a Bell (1943).

Lezione 6. Più variabili

Seguiamo gli stessi passi del caso 1-dimensionale. Prima analizziamo il calcolo del volume studiando la trasformata di Laplace e poi il problema dei punti interi cercando di generalizzare i due metodi: *le frazioni parziali* ed *i residui.*

11: La trasformata di Laplace

Prima di tutto estendiamo le formule base (**??**) a più variabili.

$$\frac{\partial}{\partial y_i} Lf = L(-x_i f), \quad \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_i y_i x_i} dx = \frac{1}{\prod_i y_i}. \tag{15}$$

Da cui per ogni polinomio $P(x_1, \dots, x_n)$ si ha:

$$P(-\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial y_n}) Lf = L(P(x_1, \dots, x_n) f) \tag{16}$$

Prendiamo una base $\underline{b} := (a_1, \dots, a_n)$ di $\mathbb{R}^n$ con $a_i := (a_{1,i}, a_{2,i}, \dots, a_{n,i})$.

Sia A la matrice con gli a_i come colonne, B la sua inversa.

Sia $C_{\underline{b}} := \{\sum_{i=1}^n t_i a_i,\ t_i \geq 0\}$ il cono da essi generato e $\chi_{\underline{b}}$ la sua funzione caratteristica.

Vogliamo calcolare la trasformata di Laplace di $\chi_{\underline{b}}$.

Facciamo il cambiamento di coordinate $x_i = \sum_j a_{j,i} t_j,\ t_i = \sum_j b_{j,i} x_j$.

Per costruzione, nelle coordinate t_i il cono $C_{\underline{b}}$ è il quadrante positivo.

Abbiamo dunque:

Lemma 11.1.

$$L(\chi_{\underline{b}}) = \int e^{-\sum_i y_i x_i} \chi_{\underline{b}} dx = |\det(A)| \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_i y_i \sum_j a_{j,i} t_j} dt =$$

$$|\det(A)| \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_j (\sum_i y_i a_{j,i}) t_j} dt = |\det(A)| \prod \frac{1}{\sum_i a_{j,i} y_i}.$$

Poniamo $\alpha_j(y) := \sum_i a_{j,i} y_i$.

Abbiamo dalla formula (**??**):

$$L(x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n} \chi_{\underline{b}}) = (-1)^{\sum_i h_i} \frac{\partial^{h_1}}{\partial y_1} \dots \frac{\partial^{h_n}}{\partial y_n} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)}$$

questa ultima espressione è una somma di termini del tipo $\frac{c_{k_1,\dots,k_n}}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)^{k_i}}$ con $\sum_i k_i = \sum_i h_i$ e vediamo che:

Teorema 11.1. *la trasformata di Laplace determina un isomorfismo lineare fra, lo spazio dei polinomi nelle variabili x_i moltiplicati per la funzione caratteristica $\chi_{\underline{b}}$ e lo spazio dei polinomi negli elementi $\frac{1}{\alpha_j(y)} = \frac{1}{\sum_i a_{j,i} y_i}$ moltiplicati per $\prod \frac{1}{\alpha_j(y)} = \prod \frac{1}{\sum_i a_{j,i} y_i}$.*

DIM

1. Utilizziamo un cambiamenteo di variabili $\alpha_i(y) = z_i$.
2. Lo spazio delle funzioni indicate dal Teorema ha come base i monomi $\prod_{j=1}^n z_j^{-h_j}$, con tutti gli esponenti $h_j > 1$.
3. Con una facile induzione si vede che questo spazio si ottiene dalla funzione $\prod \frac{1}{z_j}$ applicando iteratamente operatori di derivazione parziale.
4. Si applica dunque ora la formula **??** da cui il teorema segue. □

12: Riduzione

Vorremmo ora utilizzare questa formula per invertire la formula (**??**) e quindi calcolare la funzione volume.

Questo non si può fare direttamente perché i fattori che appaiono nel denominatore di (**??**) non sono una base.

È necessario quindi poter manipolare l'espressione (**??**) in modo da ridursi ad applicare (**??**). Questo si ottiene da una prima versione dello sviluppo in frazioni parziali nel caso di più variabili. Usiamo il:

Lemma 12.1. *Siano $\alpha_1(y), \dots, \alpha_k(y), \alpha_{k+1}(y)$ forme lineari (non nulle) con $\alpha_1(y) = \sum_{j=2}^{k+1} c_j \alpha_j(y)$ allora si ha:*

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1} \alpha_j(y)} = \sum_{j=2}^{k+1} c_j \frac{1}{\alpha_1(y)^2 \prod_{i=2}^{j-1} \alpha_i(y) \prod_{i=j+1}^{k+1} \alpha_i(y)} \tag{17}$$

DIM

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1} \alpha_j(y)} = \frac{\alpha_1(y)}{\alpha_1(y)^2 \prod_{j=2}^{k+1} \alpha_j(y)} = \sum_{j=2}^{k+1} c_j \frac{\alpha_j(y)}{\alpha_1(y)^2 \prod_{j=2}^{k+1} \alpha_j(y)}.$$

Ora possiamo provare il *Teorema di Riduzione.*

Siano date forme lineari $\alpha_1(y), \dots, \alpha_N(y)$ e sia d la dimensione dello spazio vettoriale che esse generano.

Teorema 12.1. *Ogni espressione $\frac{1}{\prod_{i=1}^N \alpha_i(y)^{h_i}}$ si può esprimere come combinazione lineare di espressioni $\frac{1}{\prod_{j=1}^d \alpha_{i_j}(y)^{m_j}}$ con $\alpha_{i_1}(y), \dots, \alpha_{i_d}(y)$ linearmente indipendenti e $\sum_{j=1}^d m_j = \sum_{i=1}^N h_i$.*

DIM Applichiamo una ricorsione e una induzione sul vettore degli esponenti $(h_1, \dots, h_N)$ nel modo seguente.

(1) Usando l'ordinamento dato prendiamo i primi elementi linearmente dipendenti che appaiono nel prodotto con esponenti non nulli.
(2) Usando il Lemma (**??**) possiamo sostituire il prodotto di questi termini con una somma in cui sviluppando, il vettore degli esponenti è cresciuto nell'ordine lessicografico mantenendo però la stessa somma.
(3) In ogni termine lo spazio generato dai fattori presenti rimane lo stesso.
(4) Chiaramente questo processo ricorsivo termina dopo un numero finito di passi, quando tutti gli addendi sono del tipo desiderato.

13: Circuiti non spezzati

In effetti il Teorema precedente può essere reso ancora più preciso, fornendo una espressione canonica in frazioni parziali. Per questo abbiamo bisogno di una idea che viene dalla:

Teoria delle matroidi.

Partiamo dunque da una lista $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ di vettori non nulli (come ad esempio le nostre funzioni lineari), definiamo *circuito* una sottolista $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_h}$ ordinata e formata da elementi linearmente indipendenti.

Diremo che il circuito è *spezzato* (broken circuit), se esiste un intero $k \leq h$ ed un intero $i < i_k$ tali che i vettori $\alpha_i, \alpha_{i_k}, \dots, \alpha_{i_h}$ siano linearmente dipendenti.

Se il circuito è una base parleremo di *base non spezzata.*

Il significato di questa nozione appare chiaro dal seguente:

Lemma 13.1. *Se $\alpha_{i_1}(y), \dots, \alpha_{i_h}(y)$ è un circuito spezzato allora*

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{h} \alpha_{i_j}(y)}$$

è combinazione lineare di espressioni $\frac{1}{\prod_{j=1}^{N} \alpha_j(y)^{h_j}}$ con il vettore degli esponenti lessicograficamente maggiore del vettore degli esponenti di $\frac{1}{\prod_{j=1}^{h} \alpha_{i_j}(y)}$.

DIM Nelle ipotesi date abbiamo $\alpha_i(y) = c_k \alpha_{i_k}(y) + \dots + c_h \alpha_{i_h}(y)$ con $i < i_k$. Sostituiamo e semplifichiamo:

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{h} \alpha_{i_j}(y)} = \frac{\alpha_i(y)}{\alpha_i(y) \prod_{j=1}^{h} \alpha_{i_j}(y)} = \frac{c_k \alpha_{i_k}(y) + \dots + c_h \alpha_{i_h}(y)}{\alpha_i(y) \prod_{j=1}^{h} \alpha_{i_j}(y)}$$

Semplificando in ogni termine il numeratore con il corrispondente fattore al denominatore otteniamo la espressione desiderata.

Ora possiamo provare il:

Teorema 13.1. *Ogni espressione $\frac{1}{\prod_{j=1}^{N} \alpha_j(y)^{h_j}}$ si può esprimere, in modo unico, come combinazione lineare di espressioni $\frac{1}{\prod_{j=1}^{d} \alpha_{i_j}(y)^{m_j}}$ con $\alpha_{i_1}(y), \dots, \alpha_{i_d}(y)$ un circuito non spezzato*

(e $\sum_{i=1}^{d} m_i = \sum_{i=1}^{N} h_i$).

DIM Il fatto che una espressione del tipo dato si possa esprimere come combinazione lineari di espressioni relative a circuiti non spezzati si prova per induzione sull'ordine lessicografico del vettore esponente come nel Teorema **??**, utilizzando ripetutamente il Lemma **??**.

L'unicità è un punto più delicato e per ora non possiamo provarlo, segue dalla analisi della Lezione **??**.

□

Vogliamo ora analizzare una espressione in frazioni parziali per ogni funzione di $R := \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n, (\prod_{i=1}^{m} \alpha_i(y))^{-1}]$.

Procediamo nel modo seguente:

- Per ciascun circuito non spezzato $S := \alpha_{i_1}(y), \dots, \alpha_{i_d}(y)$, estratto dalla lista $\Delta := \{\alpha_1(y), \dots, \alpha_m(y)\}$, scegliamo coordinate $z_{d+1}, \dots, z_n$ tali che $\alpha_{i_1}(y), \dots, \alpha_{i_d}(y), z_{d+1}, \dots, z_n$ siano coordinate lineari nello spazio.
- Per semplificare le notazioni chiamiamo $\alpha_{i_k}(y) := z_k$, $k = 1, \dots, d$.
- Sia $A_S = \mathbb{C}[z_{d+1}, \dots, z_n]$ il corrispondente anello di polinomi.
- Definiamo

$$R_S := \{f \in R \,|\, f = \frac{g}{\prod_{j=1}^d z_j^{m_j}}, \quad g \in A_S,\ m_j > 0,\ \forall j\}. \tag{18}$$

Teorema 13.2. *(1) Lo spazio R_S ha come base i monomi:*
$\prod_{i=1}^n z_i^{h_i} \,|\, h_i \geq 0, \forall i > d,\ h_i < 0,\ \forall i \leq d.$
(2) $R = \oplus_S R_S$ al variare di S fra i circuiti non spezzati.

CONCLUDENDO Questo è il teorema di espansione delle funzioni in frazioni parziali.

DIM Dimostriamo almeno una parte del teorema lasciando di completarlo nella Lezione **??**.

(1) Gli elementi $z_1, \dots, z_n$ sono coordinate lineari nello spazio e R_S è contenuto nell'anello dei polinomi di Laurent in tali variabili.

   Tali polinomi hanno come base tutti i monomi nelle variabili con esponenti interi.

   I monomi proposti sono dunque parte di questa base e quindi linearmente indipendenti.

(2) Dal Teorema **??** segue immediatamente che ogni funzione in R si può scrivere come combinazione lineare di espressioni $f = \frac{g}{\prod_{j=1}^d \alpha_{i_j}(y)^{m_j}} \,|\, g \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n],\ m_j > 0,\ \forall j$ e $S = \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_d}$ un circuito non spezzato.

(3) Scrivendo f come polinomio nelle variabili $\alpha_{i_1}(y), \dots, \alpha_{i_d}(y), z_{d+1}, \dots, z_n$ e semplificando le α_i che appaiono sia al numeratore che al denominatore si prova con una facile induzione che ogni elemento è somma di elementi degli spazi R_S.

ossservazione 13.2. *Il fatto che la somma sia diretta verrà provato utilizzando i $D-$moduli e riducendosi a provare che:*

Lemma 13.3. *Gli elementi $M_S := \frac{1}{\prod_{j=1}^d \alpha_{i_j}(y)}$ al variare di $S = \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}$ nelle basi non spezzate sono linearmente indipendenti.*

14: La funzione volume

Riprendiamo dalla formula (**??**) la funzione da invertire: Trasformata di Laplace del volume

$$\sqrt{|\det(AA^t)|}\prod_{i=1}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_{k,i}y_k} = \sqrt{|\det(AA^t)|}\prod_{i=1}^m \frac{1}{\alpha_i(y)}.$$

Dalla analisi precedente, tale funzione si può espandere (secondo un algoritmo esplicito) come combinazione lineare di termini $\frac{1}{\prod_{j=1}^d \alpha_{i_j}(y)^{m_j}}$ con $\alpha_{i_1}(y),\dots,\alpha_{i_d}(y)$ un circuito non spezzato.

Dalla discussione della sezione 6.1 abbiamo che un tale termine è la trasformata di Laplace di una funzione polinomiale moltiplicata per la funzione caratteristica del cono $C_{\underline{b}}$, dove $\underline{b}$ è la base di $\mathbb{R}^n$ formata dai vettori $\alpha_{i_j} := (a_{1,i_j}, a_{2,i_j},\dots,a_{n,i_j})$ (la colonna i_j della matrice A).

Per invertire la trasformata di Laplace useremo la teoria dei residui. Partiamo dalla identità **??** e Lemma **??**:

$$P(-\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,-\frac{\partial}{\partial y_n})\frac{|\det(A)|}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)} = L(P(x_1,\dots,x_n)\chi_{\underline{b}})$$

Sia NBB l'insieme delle basi non spezzate, sappiamo che possiamo trovare polinomi $P_b(x_1,\dots,x_n)$ indicizzati dalle $b\in NBB$ tali che:

$$\prod_{i=1}^m \frac{1}{\alpha_i(y)} = \sum_{\underline{b}\in NBB} P_{\underline{b}}(-\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,-\frac{\partial}{\partial y_n})\frac{|\det(A)|}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)}. \tag{19}$$

Da cui abbiamo che:
$\prod_{i=1}^m \frac{1}{\alpha_i(y)}$ *è la trasformata di Laplace di:*

$$\sum_{\underline{b}\in NBB} P_{\underline{b}}(x_1,\dots,x_n)\chi_{\underline{b}}. \tag{20}$$

In definitiva abbiamo provato che, dalla formula esplicita **??**:

Teorema 14.1. *Il volume del politopo $P_A(b)$ ha la medesima trasformata di Laplace della combinazione lineare $\sum_{\underline{b}\in NBB} P_{\underline{b}}(x_1,\dots,x_n)\chi_{\underline{b}}$ (formula (**??**)) di funzioni del tipo un polinomio moltiplicato per la funzione caratteristica di un cono $C_{\underline{b}}$, dove $\underline{b}$ è una base non spezzata.*

A questo punto vi è una sottigliezza da capire.

15: Formula del volume

Vorremo usare le formule **??** per determinare la funzione volume. Una prima ipotesi è che la funzione volume sia data dalla formula (**??**). Ma questo a priori è vero solo quasi ovunque, come mostra un semplice esempio.

- Prendiamo i vettori $a_1 = (1,0), a_2 = (0,1), a_3 = (1,1) = a_1 + a_2$.
- Le tre basi che estraiamo generano tre coni.
  Uno il quadrate positivo $C_{\{a_1,a_2\}}$ e gli altri danno metà del quadrante $C_{\{a_1,a_1+a_2\}}, C_{\{a_1+a_2,a_2\}}$.
- Abbiamo chiaramente che $\chi_{a_1,a_2} = \chi_{a_1,a_1+a_2} + \chi_{a_1+a_2,a_2} - \chi_{a_1+a_2}$, dove $\chi_{a_1+a_2}$ è la funzione caratteristica della semiretta per $a_1 + a_2$.
- Per le trasformate di Laplace abbiamo invece:

$$\frac{1}{y_1 y_2} = \frac{1}{y_1(y_1+y_2)} + \frac{1}{y_2(y_1+y_2)}.$$

Il punto è che una funzione con preassegnata trasformata di Laplace è determinata solo a meno dei suoi valori in un insieme di misura nulla.

Di fatto con semplici esempi possiamo vedere che la funzione

$$\sum_{\underline{b} \in NBB} P_{\underline{b}}(x_1, \ldots, x_n)\chi_{\underline{b}}$$

può essere discontinua il alcuni punti mentre è facile convincersi che *il volume è una funzione continua.*

Dobbiamo quindi capire come eventualmente modificare la formula proposta.

Per questo dobbiamo fare un poco di geometria sul cono $C(A)$.

Geometria per i poliedri

Facciamo prima di tutto una osservazione generale.

- Siano dati N punti P_i nello spazio ad n dimensioni e sia X il loro inviluppo convesso. Supponiamo che i punti non siano contenuti in alcun sottospazio lineare proprio.
- Presi comunque $k \leq n$ fra questi punti che siano indipendenti essi generano un simplesso di dimensione $k-1$, sia Y la unione di tutti questi simplessi.
- Y è un sottoinsieme chiuso di X di dimensione $n-1$.
- Le componenti connesse di $X-Y$ vengono dette *grandi celle* associate ai punti.
- Le piccole celle, che non utilizzeremo, si ottengono togliendo ad X tutti i punti giacenti sui sottospazi generati da tali insiemi di punti.

Stessa geometria per il cono $C(A)$.

Sia data una lista A di vettori v_i in uno spazio ad n dimensioni, che generano un cono puntuto $C(A)$.

- Prendiamo un iperpiano che interseca in le semirette $\mathbb{R}^+ v_i$ in punti P_i (esiste per ipotesi).

- Il cono $C(A)$ è la proiezione dall'origine dell'inviluppo convesso X dei punti P_i.
- Ogni simplesso di dimensione $\leq n-2$ si proietta in un cono simpliciale di dimensione $\leq n-1$.
- L'unione di tali coni proietta Y e le grandi celle di $C(A)$ sono le proiezioni delle grandi celle di X meno l'origine.

Punti regolari I punti delle grandi celle vengono anche detti regolari, gli altri singolari.

Diremo che X, Y rappresentano $C(A)$ ed i suoi punti singolari *in sezione.*

Conclusione

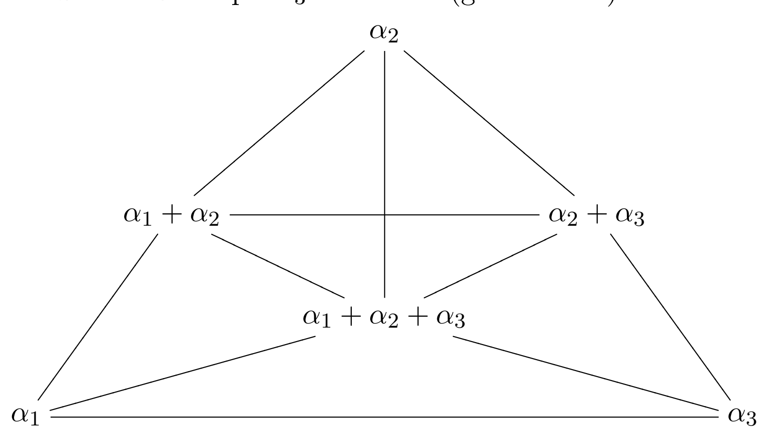
(1) Evidentemente la funzione $F(x) = \sum_{\underline{b} \in NBB} P_{\underline{b}}(x)\chi_{\underline{b}}$ data dalla formula (**??**) è un polinomio sulle grandi celle.
(2) La funzione volume d'altra parte è, per ragioni geometriche una funzione continua.
(3) Da proprietà elementari della trasformata di Laplace la formula (**??**) coincide con il volume all'interno delle grandi celle.
(4) D'altra parte su una grande cella $\mathfrak{c}$ svaniscono tutte le funzioni $\chi_{\underline{b}}$ per cui il cono $C_{\underline{b}}$ non contenga la cella $\mathfrak{c}$.

Per continuità segue dunque la formula generale per il volume:

Teorema 15.1. *Dato un punto c nella chiusura di una grande cella $\mathfrak{c}$ si ha:*

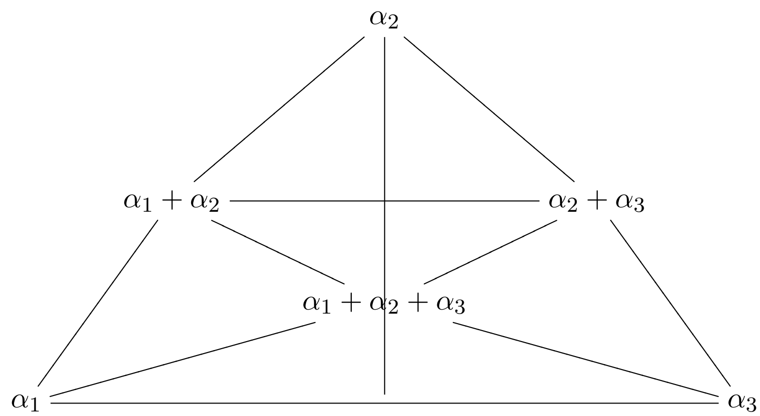
$$V_A(c) = \sum_{\underline{b} \in NBB, \ | \ \mathfrak{c} \subset C_{\underline{b}}} P_{\underline{b}}(c)$$

ESEMPIO Il tipo A_3 in sezione (grandi celle):



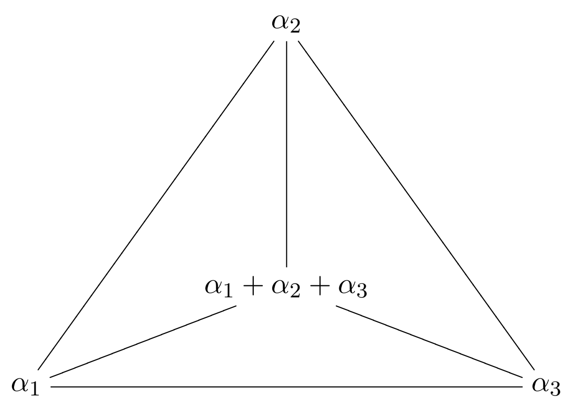
Abbiamo 7 grandi celle.

ESEMPIO Il tipo A_3 in sezione (piccole celle):



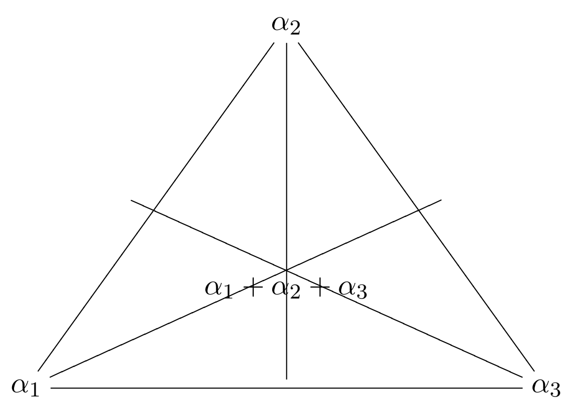
Abbiamo 8 piccole celle.

ESEMPIO 2 in sezione (grandi celle):



Abbiamo 3 grandi celle.

ESEMPIO 2 in sezione (piccole celle):



Abbiamo 6 piccole celle.

Essenzialmente la formula data definisce la nozione di:
residuo di Jeffry–Kirwan

Per rendere questa formula effettiva servono due algoritmi.

- Il primo un algoritmo che permetta di individuare, dato $p = (a_1, \dots, a_n)$:
  - una grande cella C con $p \in \overline{c}$ e
  - l'insieme delle $\underline{b} \in NBB, \mid c \subset C(\underline{b})$.

- Il secondo che calcoli i polinomi $P_{\underline{b}}(c)$.

Vedremo nei prossimi paragrafi che tali polinomi si possono calcolare, a meno del segno come opportuni residui che saranno definiti in seguito e denotati con $res_{\underline{b}}(e^{\sum_i a_i y_i} \frac{\sqrt{|\det(AA^t)|}}{\prod_{i=1}^N \alpha_i(y)})$.

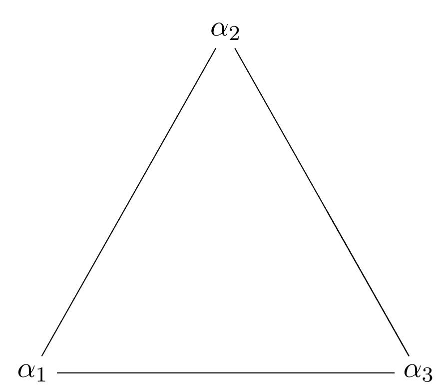
Un teorema, provato in [**?**] prova che l'insieme Y si può costruire solo tramite i simplessi formati da circuiti non spezzati. Esempio A_3 ordinato come:

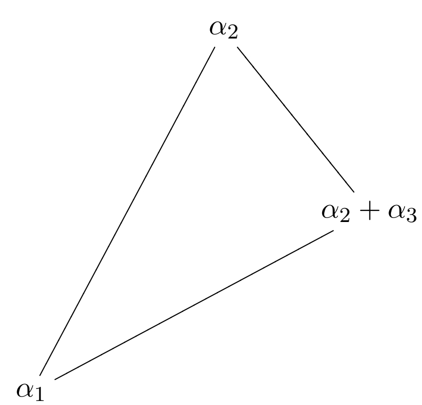
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

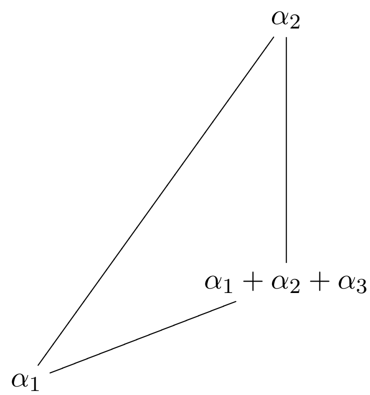
Le n.b.b contengono tutte necessariamente α_1, gli altri due elementi sono dati da 6 possibili scelte:

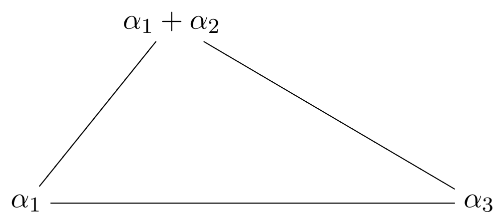
(1) α_2 e uno degli elementi $\alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
(2) $\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
(3) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3$

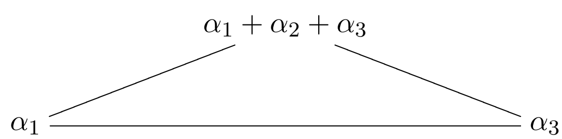
Visualizziamo i simplessi generati dalle 6 n.b.b:

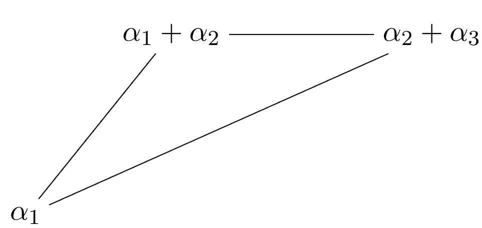




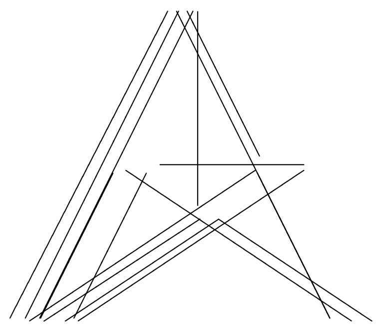

α_2
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
α_1


$\alpha_1 + \alpha_2$
α_1
α_3


$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
α_1
α_3


$\alpha_1 + \alpha_2$
$\alpha_2 + \alpha_3$
α_1

Visualizziamo la decomposizione in grandi celle, come ottenuta sovrapponendo i coni generati dalle basi non spezzate.



Per rendere la discussione precedente più efficiente dal punto di vista algoritmico, e per collegarla con la teoria dei residui multidimensionali, dobbiamo fare due ulteriori costruzioni:
Il residuo totale
Il residuo di Jeffry–Kirwan.

Per dare una definizione chiara è opportuno introdurre un linguaggio più geometrico.

16: Arrangiamenti di iperpiani

Indichiamo con $\Delta := \{\alpha_1(y), \dots, \alpha_N(y)\}$ la lista delle forme lineari $\alpha_i(y) = \sum_j a_{j,i}y_j$ associate alle colonne α_i di A.

Ogni forma $\alpha_i(y)$ definisce, come luogo di zeri, un iperpiano H_i.

Definizione 1. *Questa lista di iperpiani e tutti i sottospazi che si ottengono da essi per intersezione si chiama un*
Arrangiamento di iperpiani.

NOTA BENE: Anche se le forme sono a coefficienti reali penseremo sempre a tutti i punti complessi.

Il complementare della unione di tali iperpiani (nello spazio complesso) sarà indicato con $\mathcal{A}_\Delta$. Il punto geometrico da mettere in evidenza è: Una funzione razionale nelle variabili y_i è ben definita (non ha poli) sull'aperto $\mathcal{A}_\Delta$ se e solo se il suo denominatore è un prodotto di potenze delle forme lineari $\alpha_j(y)$.

L'insieme di tali funzioni in geometria algebrica viene chiamato *anello delle coordinate di* $\mathcal{A}_\Delta$.

È di questo anello che ora dobbiamo occuparci.

Indichiamolo con il simbolo R_Δ.

Osserviamo anche che, detto $d = \prod_{i=1}^N \alpha_i(y)$L

gli elementi di R_Δ si possono anche scrivere come f/d^k con f un polinomio. In altre notazioni:

$$R_\Delta := \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n, d^{-1}]. \tag{21}$$

Questo anello è anche descritto come l'anello di una ipersuperficie nello spazio ad $n+1$ dimensioni di equazione $1 - zd = 0$:

$$R_\Delta := \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n, z]/(1 - zd). \tag{22}$$

Il dato combinatorio principale, associato ad un arrangiamento di iperpiani, è la lista di tutti i sottospazi ottenuti per intersezione di tali iperpiani.

Tale insieme è un insieme *parzialmente ordinato* per inclusione (in breve un *poset*).

Come poset ha alcune proprieà particolari:

(1) Dati due elementi a, b esiste il loro minimo $\min(a, b)$, (l'intersezione dei due sottospazi).
(2) Ogni catena ordinata massimale ha lunghezza n (la dimensione dello spazio).
(3) Ogni elemento ha un rango $r(a)$. In ogni catena crescente massimale in cui compare a, esso compare al posto $r(a) + 1$.

Si parla di *ranked poset.*

ESEMPIO Le configurazioni di numeri .

Esempio 16.1. *Nello spazio ad n dimensioni di coordinate z_i consideriamo gli iperpiani $z_i - z_j = 0, i < j$.*

Un tale iperpiano consiste dei punti in cui le due coordinate z_i, z_j sono uguali.

Una intersezione di un insieme di tali iperpiani definisce dunque un sottospazio in cui vari sottoinsiemi (disgiunti) degli indici hanno coordinate uguali.

In altre parole, un tale sottospazio, corrisponde ad una partizione $\mathcal{P} := \{A_1, \ldots, A_k\}$ dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ in sottoinsiemi A_i disgiunti.

La dimensione del sottospazio è il numero di insiemi della partizione.

Un sottospazio corrispondente ad una partizione $\mathcal{P}$ contiene il sottospazio corrispondente ad una partizione $\mathcal{Q}$ se e solo se la partizione $\mathcal{P}$ si ottiene dalla partizione $\mathcal{Q}$ per *raffinamento* ovvero suddividendo in parti le parti di $\mathcal{Q}$.

Il minimo sottospazio consiste della retta formata dai vettori con tutte le coordinate uguali.

ossservazione 16.2. *Usualmente è conveniente ridursi ad:*

arrangiamenti centrali

ossia in cui la intersezione di tutti gli iperpiani si riduce a 0 (equivalentemente le equazioni lineari degli iperpiani generano lo spazio duale).

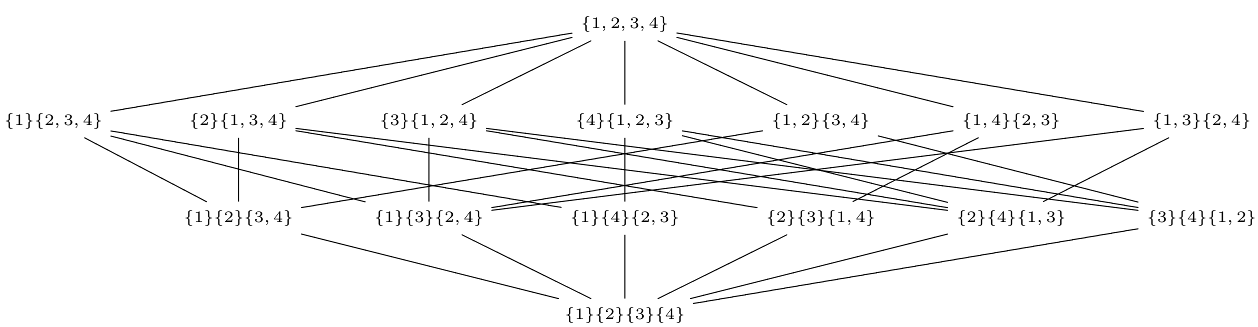
Nel caso delle configurazioni di numeri, conviene restringerci allo spazio $n-1$ dimensionale dove la somma delle coordinate è 0 per ottenere un arrangiamento centrale.

Questo esempio appartiene ad una classe importante di esempi, quelli dei sistemi di radici e dei gruppi di riflessione.

Esempi importanti in vari settori della Matematica come la teoria di Lie e quella delle singolarità.

[shrink=20]

ESEMPIO Il poset delle partizioni di $\{1, 2, 3, 4\}$:



Una delle caratteristiche notevoli di questa teoria consiste nel fatto che, molte proprietà geometriche, topologiche ed algebriche dell'arrangiamento dipendono esclusivamente dalla combinatoria del poset, ovvero sono:

proprietà combinatorie .

Forse la più interessante è la *coomologia* di $\mathcal{A}_\Delta$, data dalla Teoria di Orlik–Solomon [**?**].

17: Il residuo totale

Il residuo totale è sostanzialmente un concetto di coomologia, ma iniziamo ad introdurlo in modo elementare.

Definiamo il sottospazio $\partial(R_\Delta)$ come lo spazio generato da tutte le derivate parziali ovvero dagli elementi $\dfrac{\partial f}{\partial y_i},\ f \in R_\Delta,\ i = 1, \dots, n.$

Esempio una variabile: Sia $R_\Delta = \mathbb{C}[y, y^{-1}] = \{\sum_{i=-h}^{k} a_i y^i,\ h, k \in \mathbb{N}\}$ lo spazio dei polinomi di Laurent.

Lo spazio delle derivate consiste di tutti i polinomi senza y^{-1}.

Similmente per i polinomi di Laurent nelle variabili $y_i, y_i^{-1},\ i = 1, \dots, n$ lo spazio delle derivate consiste di tutti i polinomi senza il termine $\prod_{i=1}^{n} y_i^{-1}$.

Definizione 2. *Sia H_Δ il sottospazio generato da tutti gli elementi* $M_{\underline{b}} := \frac{1}{\prod_{h=1}^{n} \alpha_{i_h}(y)}$, *al variare delle basi $\underline{b} := \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}\}$ estratte dalla lista Δ.*

Il Teorema fondamentale è il seguente:

Teorema 17.1. *(1) Abbiamo la decomposizione in somma diretta:*

$$R_\Delta = H_\Delta \oplus \partial(R_\Delta)$$

(2) Una base di H_Δ è data dagli elementi $M_{\underline{b}}$, al variare di $\underline{b}$ nelle basi non spezzate.

In seguito dovremo anche lavorare con un'algebra più grande di funzioni. L'algebra S_Δ formata dalle funzioni (meromorfe) fd^{-k} dove f è una qualunque funzione olomorfa in un intorno di 0.

Corollario 17.1. *Non è difficile convincersi (assumendo il precedente Teorema). Che si ha di nuovo:*

$$S_\Delta = H_\Delta \oplus \partial(S_\Delta)$$

Questo Teorema si può provare come corollario del teorema **??**. Nella prossima lezione lo riformuleremo in un modo più intrinseco ed importante, introducendo il linguaggio delle *forme differenziali.*

Dimostrazione del teorema

Per dimostrare il Teorema bisogna riprendere la decomposizione $R_\Delta = \oplus_S R_S$ data dal Teorema **??** dove **??**:

$$R_S := \{f \in R \,|\, f = \frac{g}{\prod_{j=1}^{d} z_j^{m_j}}, \quad g \in A_S,\ m_j > 0,\ \forall j\}.$$

con le coordinate z_i dipendenti dalla base non spezzata S.

Dimostrazione del teorema

La osservazione fondamentale da fare è che: Gli spazi vettoriali R_S sono tutti stabili rispetto a tutte le derivate parziali.

Infatti, con le notazioni del Teorema **??**, sia $\prod_{i=1}^{n} z_i^{h_i} \in R_S \,|\, h_i \geq 0, \forall i > d$, $h_i < 0 \forall i \leq d$.

Possiamo prendere come base degli operatori di derivata parziale, le derivate nelle variabili z_i ed abbiamo:

$$\frac{\partial \prod_{i=1}^n z_i^{h_i}}{\partial z_j} = h_j z_1^{h_1} \dots z_{j-1}^{h_{j-1}} z_j^{h_j - 1} z_{j+1}^{h_{j+1}} \dots z_n^{h_n},$$

che è 0 ovvero un monomio in R_S.

Ora osserviamo che:

Proposizione 17.2. *Se la cardinalità d di S è $< n$ allora ogni elemento di R_S è somma di derivate.*

Un monomio $\prod_{i=1}^n z_i^{h_i} \in R_S$ ha dunque $h_n \geq 0$ da cui

$$\prod_{i=1}^n z_i^{h_i} = \frac{\partial}{\partial z_n}\Big((h_n+1)^{-1} \prod_{i=1}^{n-1} z_i^{h_i} z_n^{h_n+1}\Big).$$

Prendiamo ora il caso $d = n$ ora i monomi da considerare sono del tipo $\prod_{i=1}^n z_i^{-h_i}$, $h_i > 0$, prendiamo una derivata ed abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \prod_{i=1}^n z_i^{-h_i} = -h_j z_1^{h_1} \dots z_{j-1}^{-h_{j-1}} z_j^{-h_j - 1} z_{j+1}^{-h_{j+1}} \dots z_n^{-h_n}.$$

Vediamo quindi che:

otteniamo come derivate tutti i monomi in cui almeno uno degli esponenti $h_i > 2$. resta l'unico monomio $(\prod_{i=1}^n z_i)^{-1}$ che non è somma di derivate.

18: I residui

Per ora definiamo in modo elementare il residuo totale $Tres$. Dal precedente teorema, una funzione $f \in R_\Delta$ (o anche in S_Δ) si decompone in modo unico come $f = a + b$, $a \in H_\Delta$, $b \in \partial(R_\Delta)$.

Definizione 3. *Poniamo*

$$Tres(f) := a.$$

Il residuo totale di f.

In altre parole $Tres$ è la proiezione sull'addendo H_Δ della decomposizione.

Denotiamo con NBB l'insieme delle basi non spezzate, e con

$$\alpha_{\underline{b}} := \frac{\det(A)}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)}, \ \epsilon_{\underline{b}} := \frac{|\det(A)|}{\det(A)} = \pm 1, \quad \underline{b} := \{\alpha_i(y), \ i = 1, \dots, n\}.$$

Sappiamo che gli elementi $\alpha_{\underline{b}}$ formano una base di H_Δ e quindi: possiamo definire i numeri $res_{\underline{b}}(f)$ tramite la formula:

$$Tres(f) = \sum_{\underline{b} \in NBB} res_{\underline{b}}(f)\alpha_{\underline{b}}. \tag{23}$$

La applicazione che abbiamo in mente è alla formula (**??**). Vogliamo provare il:

Teorema 18.1.

$$P_{\underline{b}}(a_1, \ldots, a_n) = \epsilon_{\underline{b}} res_{\underline{b}}\left(\frac{e^{\sum_i a_i x_i}}{\prod_{i=1}^m \alpha_i(y)}\right).$$

Una volta provato questo Teorema il punto delicato sarà infine di sviluppare un *metodo per calcolare* $res_{\underline{b}}(\frac{e^{\sum_i a_i x_i}}{\prod_{i=1}^m \alpha_i(y)})$.

Per provare questo Teorema dobbiamo sviluppare alcune proprietà di $Tres$.

La prima proprietà di $Tres$, che segue dalla definizione, è che data una funzione f ed i si ha $Tres(\frac{\partial f}{\partial y_i}) = 0$, da cui per due funzioni f, g:

$$Tres(\frac{\partial f}{\partial y_i} g) = -Tres(f \frac{\partial g}{\partial y_i}).$$

Ovvero per un polinomio P:

$$Tres(P(\frac{\partial}{\partial y_i})(f)g) = Tres(fP(-\frac{\partial}{\partial y_i})(g)). \tag{24}$$

Useremo la precedente relazione (**??**) in particolare per la funzione $f = e^{\sum_i a_i y_i}$ per la quale si ha:

$$P(\frac{\partial}{\partial y_i})e^{\sum_i a_i y_i} = P(a_i)e^{\sum_i a_i y_i}, \tag{25}$$

La seconda proprietà semplice da verificare di $Tres$ è che, data una base $\underline{b} := \{\alpha_i(y),\ i = 1, \ldots, n\}$ estratta da Δ ed una funzione f olomorfa intorno a 0 si ha:

$$Tres(\frac{f}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)}) = \frac{f(0)}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)}. \tag{26}$$

Continuando:

$$\begin{gathered} Tres(e^{\sum_i a_i y_i} P(-\frac{\partial}{\partial y_i}) \frac{1}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)}) = \\ Tres(\frac{1}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)} P(\frac{\partial}{\partial y_i})(e^{\sum_i a_i y_i})) = \\ \frac{P(a_i)}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)} = \frac{P(a_i)}{|\det(A)|} L(\chi_{\underline{b}}). \end{gathered} \tag{27}$$

Prendiamo quindi una funzione scritta nella forma

$$f := \sum_{\underline{b}\in NBB} P_{\underline{b}}(-\frac{\partial}{\partial y_i})\alpha_{\underline{b}} = L(\sum_{\underline{b}\in NBB} P_{\underline{b}}(x_i)\epsilon_{\underline{b}}\chi_{\underline{b}})$$

Teorema 18.2. *Deduciamo che:*

$$Tres(e^{\sum_i a_i y_i} f) = \sum_{\underline{b}\in NBB} P_{\underline{b}}(a_i)\alpha_{\underline{b}}.$$

osservazione 18.1. *Questo ci permette di ricostruire i polinomi $P_{\underline{b}}(x_i)$ conoscendo il valore di $Tres(e^{\sum_i a_i y_i} f)$. Infatti:*

$$P_{\underline{b}}(a_i) = res_{\underline{b}}(e^{\sum_i a_i y_i} f). \tag{28}$$

Applichiamo il metodo al volume

In particolare per la funzione volume dobbiamo calcolare:

$$Tres(\frac{e^{\sum_i a_i x_i}}{\prod_{i=1}^m \alpha_i(y)}) =$$

$$\sum_{\underline{b}\in NBB} Tres(e^{\sum_i a_i x_i} P_{\underline{b}}(-\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial y_n})\frac{|\det(A)|}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)}) = \tag{29}$$

$$\sum_{\underline{b}\in NBB} P_{\underline{b}}(a_1, \dots, a_n)\frac{|\det(A)|}{\prod_{i=1}^n \alpha_i(y)}$$

Preliminare formula di inversione

da cui la funzione:

$$V(a_1, \dots, a_n) := \sum_{\underline{b}\in NBB} res_{\underline{b}}(e^{\sum_i a_i y_i}\frac{\sqrt{|\det(AA^t)|}}{\prod_{i=1}^N \alpha_i(y)})\epsilon_{\underline{b}}\chi_{\underline{b}}. \tag{30}$$

Ripetiamo una discussione già fatta.

Evidentemente, mentre la funzione volume è continua ovunque, sulla funzione $V(a_1, \dots, a_n)$ (cf. **??**), possiamo solo dire che è continua sui punti regolari ossia sulle grandi celle.

Da proprietà elementari della trasformata di Laplace (provate nell'Appendice) possiamo dedurre che $Vol_A(b) = V(b)$ se b è regolare.

Possiamo ora concludere.

La formula del volume

Sia $b := (b_1, \dots, b_n) \in C(A)$, Fissata una grande cella c con $b \in c$ abbiamo evidentemente:

$$V(b) = \sum_{\underline{b} \in NBB,\ c \subset C(\underline{b})} res_{\underline{b}}\left(e^{\sum_i b_i y_i} \frac{\sqrt{|\det(AA^t)|}}{\prod_{i=1}^N \alpha_i(y)}\right)$$

D'altra parte ora questa funzione è continua sulla chiusura di c e quindi infine abbiamo:

Teorema 18.3. *Se $b \in \overline{c}$ (chiusura di c) abbiamo:*

$$Vol_A(b_1, \dots, b_n) = \sum_{\underline{b} \in NBB,\ c \subset C(\underline{b})} res_{\underline{b}}\left(e^{\sum_i b_i y_i} \frac{\sqrt{|\det(AA^t)|}}{\prod_{i=1}^N \alpha_i(y)}\right). \tag{31}$$

NOTA

- Questa formula fornisce una formula del volume sulla chiusura di una cella.
- Per un punto nella chiusura di due celle abbiamo due formule diverse che coincidono sulla intersezione delle chiusure di tali celle.

Lezione 7. Forme differenziali

19: Forme differenziali

La teoria delle forme differenziali appare sia in geometria differenziale che in algebra, diamo una idea dei suoi punti essenziali.

La teoria inizia dal concetto di differenziale df di una funzione, questo si può fare in vari modi e rimandiamo ai testi per una discussione.

Il primo punto fondamentale è che, fissate delle coordinate x_i (esse stesse funzioni) si ha la formula:

$$df(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

In coordinate locali una 1-forma differenziale è una espressione

$$\psi := \sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i.$$

In generale una tale ψ non è il differenziale di una funzione.

Perché lo sia (localmente), è necessario e sufficiente che valgano le: regole di compatibilità:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j.$$

Questo, in un linguaggio geometrico, è quanto si impara in fisica studiando la: teoria del *potenziale di un campo conservativo.*

20: Calcolo di Grassmann

Il secondo punto fondamentale consiste nel:
calcolo di Grassmann o esterno.

Questo è essenzialmente un concetto algebrico. Si introduce un prodotto, detto *prodotto esterno* (in quanto produce nuove forme a partire da quelle date) ed indicato con il simbolo $\wedge$.

Si assume che tale prodotto è associativo e distributivo ma che valga la: regola fondamentale:

$$df \wedge dg = -dg \wedge df$$

(questo tipo di regola appare ora spesso in Fisica nella teoria dei Fermioni e nella supersimmetria).

Con questo prodotto, a partire dalle 1-forme possiamo costruire per ogni $k \leq n$ le $k-$forme che sono del tipo:

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1, i_2, \ldots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Per due forme ϕ, ψ di gradi h, k vale ora la regola di commutazione $\phi \wedge \psi = (-1)^{hk} \psi \wedge \phi$.

Esempio 20.1. *Date n funzioni $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ in n variabili, si ha*

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_n = J(f_1, \ldots, f_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Con $J(f_1, \ldots, f_n) = \det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ il determinante Jacobiano.

21: Calcolo differenziale

Il secondo concetto essenziale è di tipo analitico.

Si tratta di definire il *differenziale* $d\psi$ di una forma ψ.

Tale operatore è completamente caratterizzato dalle seguenti proprietà:

(1) d è un operatore lineare dalle $k-$forme alle $k+1$-forme per ogni k.
(2) Se f è una funzione df è il differenziale già definito.
(3) Per due forme ϕ, ψ di gradi h, k vale la regola (di Leibniz):

$$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi + (-1)^h \phi \wedge d\psi.$$

Da tali regole si vede facilmente che:

osservazione 21.1.

$$d\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} f_{i_1,i_2,\dots,i_k}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} =$$

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_{i_1,i_2,\dots,i_k}(x)}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

NOTA:

- $\psi := dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} = 0$ se $i = i_j$ per qualche j.
- Se invece $i_j < i < i_{j+1}$, ψ si riscrive come

$$(-1)^j dx_{i_1}\wedge\dots dx_{i_j}\wedge dx_i\wedge dx_{i_{j+1}}\cdots\wedge dx_{i_k} = 0$$

Esempio 21.2.

$$d\sum_{i=1}^{n} f_i(x)dx_i = \sum_{i<j}(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j})dx_i\wedge dx_j$$

- Nota che la condizione di integrabilità della 1-forma $\psi := \sum_{i=1}^{n} f_i(x)dx_i$ è quindi $d\psi = 0$!

In effetti valgono le due: proprietà fondamentali del calcolo differenziale:

(1) $d^2 = 0$.
(2) Una k-forma ψ è (localmente) del tipo $d\phi$ (con ϕ una $k-1$ forma) se e solo se $d\psi = 0$.

Abbiamo insistito sull'aspetto (locale), perché la teoria dei *residui* è essenzialmente legata alla non integrabilità globale.

Si usa la seguente: terminologia:

- Una forma ψ si dice *chiusa* se $d\psi = 0$.
- Si dice *esatta* se $\psi = d\phi$.

Pertanto esatta implica chiusa, l'implicazione inversa è solo locale.

L'esempio fondamentale è la forma $1/zdz$

La forma $1/zdz$ è una forma complessa, definita su tutti i numeri complessi non nulli $\mathbb{C}^*$.

Si ha in effetti:

$$z^{-1}dz = d\log(z),$$

ma ora bisogna capire che $\log(z)$ non può essere definita ovunque sull'insieme $\mathbb{C}^*$, se ne può solo scegliere localmente una determinazione.

(in termini classici è una *funzione polidroma*)

La ragione in un certo senso si può capire pensando che la funzione di cui una 1-forma è il differenziale si ottiene per integrazione su cammini.

Quando si integra la forma $z^{-1}dz = d\log(z)$ su un cammino chiuso intorno a 0 si ottiene un valore non nullo (un residuo) che fa passare da una determinazione del logaritmo ad un'altra.

Ovviamente per le forme di grado superiore la teoria è più complessa e va discussa con le idee di omologia e coomologia.

La teoria delle forme differenziali acquista il suo pieno potere quando la si sviluppa (senza riferimento alle coordinate) per una *varietàdifferenziabile.*

Inoltre nel nostro caso vogliamo utilizzare variabili complesse $z = x + iy$ e pensiamo a $dz = dx + idy$.

Non avremo bisogno di approfondire questo punto importante.

22: Calcolo integrale

L'ultimo punto di tipo fondamentale della teoria è la:

Integrazione delle forme

ed il

Teorema di Stokes.

Prima di tutto va capito il comportamento delle forme rispetto alle mappe differenziabili.

Se $F : M \to N$ è una mappa differenziabile di varietà e ψ una k forma su N possiamo definire la forma $F^*(\psi)$ come $k-$forma su M usando le seguenti regole:

(1) Se $\psi = f$ è una funzione si ha $F^* f(x) = f(F(x))$.
(2) $d(F^*(\psi)) = F^*(d\psi)$.
(3) $F^*(\phi \wedge \psi) = F^*(\phi) \wedge F^*(\psi)$.

In coordinate, $(x_1, \dots, x_m)$ su M ed $(y_1, \dots, y_n)$ su N, con $y_i = F_i(x_1, \dots, x_m)$ si ha: Formula di sostituzione

$$F^*(f(y_1, \dots, y_n)dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) =$$

$$f(F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m))dF_{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_{i_k}.$$

Una $k-$forma va integrata su un oggetto $k-$dimensionale orientato. (una 1-forma su una curva, una 2-forma su una superficie etc.)

Definizione 4. *Localmente in coordinate (orientate)* $(x_1, \dots, x_m)$ *l'integrale di* $f(x_1, \dots, f_k)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ *è l'usuale integrale multiplo* $\int f(x_1, \dots, f_k)dx_1 \dots dx_k$.

L'integrazione globale si può fare tramite le *partizioni dell'unità.*

L'usuale teorema di cambiamento di coordinate negli integrali multipli implica che la definizione è ben posta.

Tipicamente, data una varietà M ed una k forma la integriamo su una $k-$varietà fissando una *parametrizzazione* $i : N \to M$ con N una $k-$varietà.

Non è necessario per la definizione di assumere che i immerge N in M.

Ma, per definizione, integriamo su N la forma $i^*(\psi)$.

Si ha dunque, prendendo una varietà orientata M di dimensione k, con bordo ∂M (di dimensione $k-1$) ed una $k-1$ forma ψ la regola fondamentale: Teorema di Stokes

$$\int_M d\psi = \int_{\partial(M)} \psi.$$

Una conseguenza importante è dunque la seguente:

ossservazione 22.1. *Quando integriamo una $k-$forma chiusa ψ su una $k-$varietà che è il bordo di una $k+1$ varietà otteniamo 0.*

Nel caso di $d\log(z)$ integrata su una circonferenza intorno all'origine abbiamo un integrale non nullo poiché, mentre è vero che tale circonferenza è il bordo di un disco, tale disco contiene il punto 0, che non è in $\mathbb{C}^*$ dove la forma è definita.

Quindi in $\mathbb{C}^*$ tale circonferenza non è un bordo.

In realtà non è conveniente integrare le forme solo su varietà, conviene integrarle su opportune *catene di integrazione.*

23: Catene, omologia

La definizione di catena è un poco formale ma molto utile. Si può dare in modo molto generale partendo dal simplesso standard:

$$\Delta_n := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ \forall i\}.$$

Per un qualunque spazio topologico X possiamo definire:

- Un *simplesso singolare* è una funzione continua $\sigma : \Delta_n \to X$.
- Una *catena singolare* è una combinazione lineare $\sum_{i=1}^k c_i\sigma_i$ formale di simplessi singolari.

Nota: I coefficienti per noi saranno numeri reali (ma in una teoria più topologica si prendono come coefficienti vari anelli come i numeri interi o i numeri modulo un intero m).

Se X è una varietà differenziabile ha senso di parlare di simplessi o catene differenziabili (usualmente C^∞).

Pertanto, data una varietà differenziabile M, una $k-$forma ψ su M ed una catena differenziabile c di dimensione k ha senso integrare ψ su c.

Le nozioni di bordo e ciclo

A questo punto si introduce la nozione di *bordo* δ di una catena singolare come segue.

- Ogni *faccia* $\Delta_n^i := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n \,|\, x_i = 0\}$ è un simplesso $(n-1)-$ dimensionale.
- Restringendo a tale faccia un simplesso singolare $n-$dimensionale si ottiene un simplesso $(n-1)-$dimensionale $\epsilon_i(\sigma)$.
- Definiamo dunque Il bordo di una catena

$$\delta(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \epsilon_i(\sigma), \ \ \delta(\sum_{i=1}^{k} c_i \sigma_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i \delta(\sigma_i)$$

Definizione 5.
- *Diremo che una catena c è un bordo se è della forma* $\delta(e)$.
- *c è un ciclo o chiusa se* $\delta(c) = 0$.

Si vede facilmente che $\delta^2 = 0$:
un bordo è dunque necessariamente un ciclo.
Tutte queste informazioni si mettono insieme in questo modo:

Definizione 6. *Detti* $B_k(X) \subset Z_k(X)$ *gli spazi dei bordi, rispettivamente dei cicli singolari si definisce:*

$$H_k(X) := Z_k(X)/B_k(X),$$

il $k-$*esimo gruppo di omologia singolare.*

Catene differenziabili

Quando ci restringiamo a catene differenziabili abbiamo per le catene e le forme il Teorema di Stokes $\int_c d\psi = \int_{\delta(c)} \psi$.

ossservazione 23.1. *Se X è una varietà differenziabile abbiamo prima di tutto che la omologia si può calcolare usando solo catene differenziabili, pertanto d'ora in poi useremo tali catene.*

Definizione 7. *Definiamo con* $B^k(X) \subset Z^k(X)$ *gli spazi delle* $k-$*forme esatte e chiuse rispettivamente e:*

$$H^k(X) := Z^k(X)/B^k(X),$$

$k-$*esimo gruppo di coomologia di De Rham .*

Da queste definizione e dal teorema di Stokes e suoi corollari segue, nel caso differenziabile che l'integrazione sulle catene determina un accoppiamento di dualità:

$$H^k(X) \times H_k(X) \to \mathbb{R}, \quad (\psi, x) \mapsto \int_c \psi.$$

Il fatto profondo e fondamentale è: Teorema di De Rham afferma che, se X è una varietà compatta i due spazi vettoriali $H^k(X), H_k(X)$ sono di dimensione finita ed in dualità perfetta.

A noi interessa applicare questa Teoria nel caso della varietà (algebrica affine) $\mathcal{A}_\Delta$ che non è compatta, e alle forme differenziali algebriche $\Omega^*(\mathcal{A}_\Delta)$, ovvero le forme a coefficienti nell'anello di coordinate R_Δ.

In questo caso l'analogo del Teorema di De Rham è dovuto a Grothendieck.

Abbiamo una dualità perfetta fra la coomologia calcolata con le forme differenziali algebriche e la omologia singolare complessa.

Indichiamo con

$$\Omega^k_\Delta := \{ \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} f_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \mid f_{i_1,\ldots,i_k}(x)\in R_\Delta\}$$

lo spazio delle le forme differenziali algebriche,

In particolare guardiamo al grado massimo e vediamo immediatamente la interpretazione degli spazi $\partial(R_\Delta), H_\Delta$. Abbiamo:

$$d(\Omega^{n-1}_\Delta) = \partial(R_\Delta)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

Possiamo dunque identificare lo spazio H_Δ allo spazio $H^n(\mathcal{A}_\Delta)$.

Inoltre vediamo immediatamente che, date n forme indipendenti $\alpha_i(y) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j$ con $A=(a_{i,j})$ invertibile abbiamo la formula:

$$\det(A)\prod_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i(y)}dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n = d\log(\alpha_1(y))\wedge\cdots\wedge d\log(\alpha_n(y)).$$

Essendo $\det(A)\prod_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i(y)}dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n = \alpha_{\underline{b}}dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n$ ne deduciamo che:

Teorema 23.1. *Le classi di coomologia delle forme*

$$\omega_{\underline{b}} := d\log(\alpha_1(y))\wedge\cdots\wedge d\log(\alpha_n(y))$$

al variare delle $\alpha_1(y),\ldots,\alpha_n(y)$ nelle basi non spezzate, formano una base della coomologia $H^n(\mathcal{A}_\Delta)$.

Non è difficile verificare che otteniamo la stessa coomologia se, invece di prendere le forme a coefficienti in R_Δ prendiamo coefficienti del tipo f/d^k con f una qualsiasi funzione olomorfa in un intorno di 0.

In definitiva possiamo ora definire in modo più intrinseco le nozioni di *residuo totale* $Tres$ e dei residui $res_{\underline{b}}$.

Ora questi operatori sono definiti sulle forme differenziali di grado n invece che sulle funzioni (avendo identificato una funzione f alla forma $fdy_1\wedge\cdots\wedge dy_n$).

Definizione intrinseca di $Tres$ e dei residui $res_{\underline{b}}$. $Tres(fdy_1\wedge\cdots\wedge dy_n)$ è la classe di coomologia di $fdy_1\wedge\cdots\wedge dy_n$.

$$Tres(\psi) = \sum_{\underline{b}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\in NBB} res_{\underline{b}}\psi \; d\log(\alpha_1(y))\wedge\cdots\wedge d\log(\alpha_n(y))$$

Lezione 8. Il calcolo dei residui

Per ora la nostra definizione dei residui $res_{\underline{b}}\psi$ è puramente algebrica. Dovremo dargli un contenuto geometrico che permetta di calcolarli.

Questo è un punto sottile che affrontiamo prima in modo sostanzialmente locale ed elementare e poi daremo una idea del suo vero significato geometrico, dando un contenuto più generale alla nozione di residuo a più dimensioni.

Spieghiamo la strategia lasciando i dettagli alla prossima Lezione.

Il passo fondamentale consiste nell'effettuare, per ogni base non spezzata $\underline{b}$ un *cambiamento di coordinate non lineare.*

- Di fatti dato $\underline{b}$ facciamo il cambiamento in due passi.
  - Prima scegliamo un sistema di coordinate y_i lineari dipendente da $\underline{b}$.
  - Poi costruiamo coordinate $z_1, \dots, z_n$ in cui ogni y_i si esprime come un opportuno prodotto (monomio) di un sottoinsieme delle coordinate $z_1, \dots, z_n$ che dipende dalla combinatoria associata a $\underline{b}$ tramite la teoria dei nested sets.
- In questo nuovo sistema di coordinate ogni funzione $\alpha_i(y)$ diventa un polinomio della forma:

$$\alpha_i(y_1(z), \dots, y_n(z)) = \prod_{j=1}^{n} z_j^{h_{i,j}} Q_i(z), \ | \, Q_i(0) \neq 0, \ h_{i,j} = 0, 1. \tag{32}$$

- Ne segue che ogni denominatore che appare in R_Δ diviene:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{N} \alpha_i^{k_i}} =$$

$$\prod_{j=1}^{n} z_j^{-\sum_{i=1}^{N} h_{i,j} k_i} \prod_{i=1}^{N} Q_i(z)^{-h_{i,j} k_i} = \prod_{j=1}^{n} z_j^{-\sum_{i=1}^{N} h_{i,j} k_i} T(z), \ | \, T(0) \neq 0.$$

- In definitiva, mentre prima intorno allo 0 i poli della funzione formano una struttura geometrica molto complicata in queste nuove coordinate abbiamo *sciolto la complicazione* ed i poli sono solo sugli iperpiani coordinati.
- Il prezzo pagato sta nel fatto che dobbiamo fare molti cambiamenti di coordinate non lineari, che vedremo significa in sostanza modificare lo spazio ambiente *scoppiando* alcuni luoghi.

- Con le nuove coordinate, una $n-$forma algebrica si scrive nella forma
$$(z_1 \dots z_n)^{-k} f(z_1, \dots, z_n) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$
con $f(z_1, \dots, z_n)$ olomorfa intorno a 0 e se ne può calcolare il residuo intorno allo 0 che coincide con il coefficiente di $(z_1 \dots z_n)^{-1}$.
Chiamiamo questo residuo res_z provvisoriamente.
- Questo residuo è un integrale $\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_T \psi$ dove $T = \{(z_1, \dots, z_n) \,|\, |z_i| = \epsilon\}$ è un piccolo toro intorno a 0.
Naturalmente nelle vecchie coordinate la definizione di T è più complicata e non appare immediatamente come un toro.
- Il fatto veramente fondamentale, che permette di concludere tutta la discussione è il seguente:
$$res_z = res_{\underline{b}}$$
- Poiché il residuo dipende solo dalla classe di coomologia, questo si prova verificando che, data una base non spezzata $\underline{c} := \{\alpha_1(y), \dots, \alpha_n(y)\}$:
$$res_z \; d\log(\alpha_1(y)) \wedge \cdots \wedge d\log(\alpha_n(y)) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \underline{c} = \underline{b} \\ 0 & \text{se} \quad \underline{c} \neq \underline{b} \end{cases}$$

Tutti i passi della precedente discussione sono in effetti costruttivi e quindi forniscono un algoritmo di calcolo.

Per costruire i cambiamenti di coordinate dobbiamo sviluppare una nuova teoria di tipo algebrico combinatorio.

Modelli meravigliosi

- Questa teoria è stata sviluppata in [**?**] con lo scopo di costruire i cosiddetti *modelli meravigliosi* delle configurazioni di iperpiani.
- Si tratta di costruire una varietà algebrica X_Δ con un morfismo proprio $\pi : X_\Delta \to \mathbb{C}^n$ in modo tale che $\pi^{-1}(A_\Delta)$ sia isomorfo tramite π ad A_Δ ed il complementare in X_Δ di $\pi^{-1}(A_\Delta)$ sia *un divisore ad incroci normali.*

Non avremo bisogno di queste nozioni e quindi non le approfondiamo.

Lezione 9. Irriducibili e "nested sets"

Prima di introdurre i concetti di questa lezione ricordiamo alcune definizioni base.

Somme dirette

- Sia dato uno spazio vettoriale V e k sottospazi $U_1, \dots, U_k$ di V, lo spazio U generato dagli U_i è il sottospazio formato da tutti gli elementi $u := u_1 + u_2 + \cdots + u_k, \; u_i \in U_i$.

- Si dice che U è *somma diretta* degli U_i quando la espressione di un vettore di U come somma degli u_i è unica ovvero, se $0 = u_1 + u_2 + \cdots + u_k,\ u_i \in U_i$, deve essere necessariamente $u_i = 0,\ \forall i$.

  In questo caso scriviamo:

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k.$$

In queste ipotesi, due proprietà evidenti che useremo sempre sono: Proprietà della somma diretta

- $$\dim(U) = \sum_{i=1}^{k} \dim(U_i)$$
- Se $W_i \subset U_i$ sono sottospazi anche i W_i formano somma diretta.

24: Irriducibili e decomposizioni

Le nozioni che ora daremo possono essere sviluppate anche in modo più combinatorio (cf. [**?**]) ma le sviluppiamo nel seguente contesto:

Sia data una lista di vettori non nulli $\Delta := \{v_1, \dots, v_N\}, \quad v_i \in \mathbb{C}^n$.

Dato un sottoinsieme $A \subset \Delta$ definiamo:

Insiemi completi

(1) $\langle A \rangle$ lo spazio vettoriale generato da A.

(2) $\overline{A} := \Delta \cap \langle A \rangle$ il *completamento* di A.

Diremo dunque che A è completo se $A = \overline{A}$.

Nelle nostre applicazioni, pensiamo i vettori Δ come equazioni lineari sullo spazio duale, che chiameremo V.

Dato un insieme A sia $A^{\perp}$ il sottospazio di V definito dall'annullarsi delle equazioni in A.

ossservazione 24.1. *Per dualità, il completamento $\overline{A}$ è l'insieme di tutte le equazioni in Δ che svaniscono su $A^{\perp}$.*

In definitiva: *i sottoinsiemi completi di Δ sono in corrispondenza biunivoca (che inverte l'ordinamento di inclusione), con i sottospazi dell'arrangiamento definito da Δ.*

Decomposizioni ed irriducibili

3 Dato un insieme completo $A \subset \Delta$, una sua decomposizione è una scomposizione $A = A_1 \cup A_2$ in insiemi non vuoti, tale che:

$$\langle A \rangle = \langle A_1 \rangle \oplus \langle A_2 \rangle.$$

Evidentemente i due insiemi A_1, A_2 sono necessariamente completi.

4 Diremo che un insieme completo A è irriducibile se non ammette alcuna decomposizione .

Naturalmente Δ è completo per definizione, può essere o non essere irriducibile. Ci si riduce sempre a discutere il caso irriducibile.

Se $A = A_1 \cup A_2$ è una decomposizione di un insieme completo e $B \subset A$ è ancora completo si ha:

$B = B_1 \cup B_2,$ *dove* $B_1 = A_1 \cap B, \; B_2 = A_2 \cap B.$

Dato che evidentemente $\langle B \rangle = \langle B_1 \rangle \oplus \langle B_2 \rangle$, si ha che:

Corollario 24.2. *$B = B_1 \cup B_2$ è una decomposizione, a meno che uno dei due insiemi sia vuoto.*

Ne deduciamo immediatamente:

Lemma 24.3. *Se $A = A_1 \cup A_2$ è una decomposizione e $B \subset A$ è irriducibile, allora $B \subset A_1$ ovvero $B \subset A_2$*

Per induzione si prova:

Teorema 24.1. *Ogni insieme A si può decomporre come $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ con gli A_i irriducibili e:*

$$\langle A \rangle = \langle A_1 \rangle \oplus \langle A_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle A_k \rangle.$$

Questa decomposizione è chiaramente *unica a meno dell'ordine*:

infatti se $A = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_h$ è una seconda decomposizione, dal Lemma precedente ogni B_i è contenuto in un A_j e viceversa.

Questo implica che gli insiemi sono gli stessi a meno dell'ordine. La decomposizione in irriducibili $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ viene detta la *decomposizione in irriducibili di A* .

Esempio 24.4. *Illustriamo questi concetti per l'esempio dello spazio delle configurazioni* **??***, i vettori sono le equazioni $z_i - z_j$.*

- Abbiamo già visto che gli insiemi completi corrispondono ai sottospazi di questa configurazione, che sappiamo corrispondono ad una partizione $\mathcal{P} := S_1, \ldots, S_k$ di $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- Data una tale partizione ad essa corrisponde l'insieme completo formato dagli elementi $z_i - z_j$ tali che i, j siano in una stessa parte della partizione $\mathcal{P}$.

A questo punto lasciamo come esercizio di verificare che:

Esercizio

(1) Insiemi irriducibili corrispondono a partizioni con una sola parte con almeno 2 elementi.
(2) Quindi gli irriducibili sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi $C \subset \{1, 2, \dots, n\}$ con almeno 2 elementi.
(3) All'insieme C corrisponde $I_C := \{z_i - z_j \mid i, j \in C\}$.
(4) Se A corrisponde ad una partizione $S_1, \dots, S_k$ la sua decomposizione in irriducibili è formata dagli elementi I_{S_i} al variare di S_i sui sottoinsiemi della partizione con almeno 2 elementi.

Insiemi "nested"

Il passo successivo definisce la nozione di *insieme nested*.

Prima di tutto ricordiamo che due insiemi A, B sono *comparabili* se uno è contenuto nell'altro:

Definizione 8. *Diremo che una famiglia $\mathcal{S}$ di irriducibili A_i è nested se vale la seguente proprietà:*

Dati elementi $A_1, \dots, A_i \in \mathcal{S}$ mutualmente non comparabili si ha:

$C := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i$ è completo e $C := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i$ è la sua decomposizione in irriducibili.

Noi saremo in particolare interessati nelle famiglie nested massimali che indicheremo con MNS (maximal nested set).

Useremo spesso due semplici metodi induttivi per costruire insiemi nested:

ESERCIZIO

(1) Dati:
    - Un insieme nested $\mathcal{S}$.
    - Un irriducibile A minimale in $\mathcal{S}$.
    - Un insieme nested $\mathcal{P}$ contenuto in A si ha:

    $\mathcal{S} \cup \mathcal{P}$ *è nested.*
(2) Dati:
    - Un insieme nested $\mathcal{S}$.
    - Un insieme completo A contenente $\mathcal{S}$.
    - Sia $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ la sua decomposizione in irriducibili, si ha:

    $\mathcal{S} \cup \{A_1, \dots, A_k\}$ *è nested.*

Esempio dello spazio delle configurazioni. Sappiamo che gli irriducibili sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi $C \subset \{1, 2, \dots, n\}$ con almeno 2 elementi.

Dobbiamo capire quando una famiglia di tali sottoinsiemi è nested. Lasciamo lla risposta al lettore:

ESERCIZIO Verificare che in questo caso la condizione è che due sottoinsiemi della famiglia o sono comparabili o sono disgiunti.

OSSERVAZIONE Se $A_1, \dots, A_k$ è nested si ha che $\cup_i A_i$ è completo, infatti tale unione si può fare prendendo gli elementi massimali che sono necessariamente non comparabili ed applicando la definizione di nested.

Sia dunque $\Delta \subset V$ con $\langle \Delta \rangle = V$.

Teorema 24.2. *Sia $\mathcal{S} := \{A_1, \dots, A_k\}$ un MNS in Δ.*

Dato $A \in \mathcal{S}$ siano $B_1, \dots, B_s$ gli elementi di $\mathcal{S}$ contenuti propriamente in A e massimali con questa proprietà.

(1) $C := B_1 \cup \cdots \cup B_s$ è completo e decomposto dai B_i.
(2) $\dim\langle A \rangle = \dim\langle C \rangle + 1$.
(3) $k = n = \dim(V)$.

Teorema

(1) $C := B_1 \cup \cdots \cup B_s$ *è completo e decomposto dai* B_i.
(2) $\dim\langle A \rangle = \dim\langle C \rangle + 1$.
(3) $k = n = \dim(V)$.

DIM 1. è la definizione di Nested in quanto i B_i, essendo massimali sono necessariamente non comparabili.

2. Consideriamo $\langle C \rangle = \oplus_{i=1}^s \langle B_i \rangle \subset \langle A \rangle$.
Non può essere $\langle C \rangle = \langle A \rangle$ altrimenti essendo, per definizione di nested, C completo si deve avere $A = C$.

Questo è assurdo in quanto A è irriducibile ed i B_i sono propriamente contenuti in A.

Pertanto esiste un elemento $a \in A \,|\, a \notin C$, poniamo $A' := \Delta \cap \langle C, a \rangle$.
Si ha $C \subsetneq A' \subset A$. Affermo che $A = A'$.

Altrimenti come si vede facilmente, aggiungendo tutti gli irriducibili che decompongono A' alla famiglia $\mathcal{S}$ si ottiene una famiglia nested che contiene propriamente $\mathcal{S}$ contraddicendo alla massimalità.

Evidentemente $A = A'$ implica che $\langle A \rangle = \langle C \rangle \oplus \mathbb{C}a$ e quindi $\dim\langle A \rangle = \dim\langle C \rangle + 1$.

3. Dimostriamolo per induzione.

Se $n = 1$ non vi è nulla da dimostrare, vi è un unico insieme completo ed irriducibile Δ.
Prima di tutto, decomponiamo $\Delta = \cup_{i=1}^h \Delta_h$ in irriducibili.

Si ha che un MNS in Δ è la unione di MNS in ciascun Δ_i e che $n = \dim(\langle \Delta \rangle) = \sum_{i=1}^h \dim(\langle \Delta_h \rangle)$.
Possiamo quindi ridurci al caso Δ irriducibile. In questo caso si ha che $\Delta \in \mathcal{S}$ per qualunque MNS $\mathcal{S}$.

Siano $B_1, \dots, B_s$ gli elementi di $\mathcal{S}$ contenuti propriamente in Δ e massimali con questa proprietà.

L'insieme $\mathcal{S}$ consiste di Δ e dei sottoinsiemi $\mathcal{S}_i := \{A \in \mathcal{S} \,|\, A \subset B_i\}$.

Evidentemente $\mathcal{S}_i$ è un MNS relativamente all'insieme B_i (altrimenti potremmo aggiungere un elemento sia ad $\mathcal{S}_i$ che a $\mathcal{S}$ contraddicendo la massimalità di $\mathcal{S}$).

Per induzione $\mathcal{S}_i$ ha $\dim\langle B_i\rangle$ elementi e da 2) l'enunciato segue. □

Esempio dello spazio delle configurazioni

Si vede facilmente (esercizio) che un insieme massimale $\mathcal{S}$ nested di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ è formato da $n-1$ elementi ed ha la seguente proprietà:

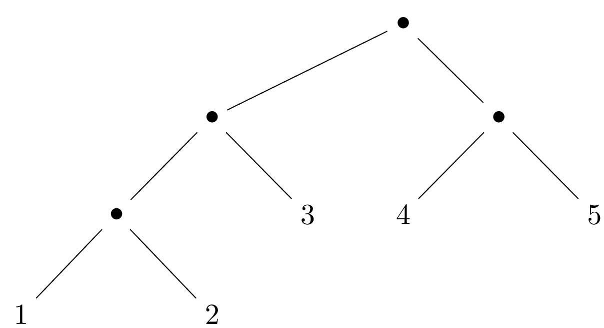
Dato $A \in \mathcal{S}$ un insieme con a elementi.

Abbiamo una delle due seguenti possibilità per gli elementi $B_1, \dots, B_s$ di $\mathcal{S}$ contenuti propriamente in A e massimali con questa proprietà.

- $s = 1$ e B_1 ha $a - 1$ elementi.
- $s = 2$ e $A = B_1 \cup B_2$.

Un tale MNS si può presentare in modo conveniente come un *grafo piano binario*.

Esempio 24.5.



Ogni vertice interno al grafo corrisponde all'insieme dei numeri che appaiono sulle sue *foglie*, nell'esempio il MNS è:

$$\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Dato un MNS $\mathcal{S}$ definiamo una applicazione:

$$p_{\mathcal{S}} : \Delta \to \mathcal{S}$$

come segue:

- Se un elemento $a \in \Delta$ appare in due elementi $A, B \in \mathcal{S}$ i due elementi devono essere necessariamente comparabili, quindi esiste un minimo fra i due.
- Poiché $\Delta \in \mathcal{S}$ esiste un minimo elemento $A \in \mathcal{S}$ con $a \in A$.
- Definiamo allora $A := p_{\mathcal{S}}(a)$.

Ora una nuova definizione:

Definizione 9. *Diremo che una base di* $\mathbb{C}^n$, $\underline{b} := \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \Delta$ *è adattata al MNS* $\mathcal{S}$ *se l'applicazione* $a_i \mapsto p_{\mathcal{S}}(a_i)$ *è una applicazione biunivoca fra* $\underline{b}$ e $\mathcal{S}$.

Una tale base esiste sempre, basta prendere, come nella dimostrazione di **??** , per ogni $A \in \mathcal{S}$ un elemento $a \in A - \cup_i B_i$ con i B_i gli elementi di $\mathcal{S}$ propriamente contenuti in A.

Ora passiamo alla costruzione geometrica fondamentale.

Dato un MNS $\mathcal{S}$ ed una base $\underline{b} := \{a_1, \ldots, a_n\}$ adattata a $\mathcal{S}$ *consideriamo le* a_i *come un sistema di coordinate lineari su* V.

Se $p_{\mathcal{S}}(a_i) = A$ scriveremo anche $a_i := a_A$. Costruiamo ora nuove coordinate $z_A,\ A \in \mathcal{S}$ utilizzando le espressioni monomiali:

$$a_A := \prod_{B \in \mathcal{S},\ A \subset B} z_B. \tag{33}$$

I residui Il residuo di una forma ψ in 0 rispetto alle coordinate z_A associate ad $\mathcal{S}$ e $\underline{b}$ verrà indicato con il simbolo $res_{\mathcal{S},\underline{b}}\psi$ o $res_{\mathcal{S}}\psi$ se $\underline{b}$ è chiaro dal contesto.

Vediamo come si scrive un elemento $a \in \Delta$ in queste coordinate.

Preso $A \in \mathcal{S}$ sia $\mathcal{S}_A := \{B \subset A,\ B \in \mathcal{S}\}$.

Evidentemente $\mathcal{S}_A$ è un MNS per A (al posto di Δ).

Gli elementi a_B con $B \in \mathcal{S}_A$ formano una base adattata per $\mathcal{S}_A$.

Sia $p_{\mathcal{S}}(a) = A$, poichè gli elementi a_B con $B \subset A,\ B \in \mathcal{S}$ formano una base adattata per $\mathcal{S}_A$ si deve avere $a = \sum_{B \in \mathcal{S}_A} c_B a_B,\ c_B \in \mathbb{C}$.

Sostituiamo ora le espressioni (**??**):

$$a_A := \sum_{B \in \mathcal{S}_A} c_B \prod_{C \in \mathcal{S},\ B \subset C} z_C =$$

$$\prod_{B \in \mathcal{S},\ A \subset B} z_B \Big(c_A + \sum_{B \in \mathcal{S}_A, B \neq A} c_B \prod_{C \in \mathcal{S},\ B \subset C \subsetneq A} z_C\Big). \tag{34}$$

Poiché A è il minimo insieme di $\mathcal{S}$ contenente a si deve avere $c_A \neq 0$.

Si noti che, nel nostro programma siamo riusciti a definire cambiamenti di coordinate non lineari che soddisfano la condizione di (**??**).

Ora dobbiamo studiare le altre condizioni. Prima di tutto dobbiamo legare questi concetti a quelli di base non spezzata.

Cominciamo con una osservazione.

Sia data una qualunque base $\underline{b} := \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \Delta$, costruiremo un MNS $\mathcal{S}_{\underline{b}}$ a cui essa è adattata nel modo seguente.

- Definiamo gli insiemi completi $A_i := \Delta \cap \langle \{a_i, \ldots, a_n\} \rangle = \overline{\{a_i, \ldots, a_n\}}$. Ovviamente $A_1 = \Delta \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n$.

- Per ogni i consideriamo tutti gli irriducibili della decomposizione di A_i, (per diversi i possiamo ottenere anche due volte lo stesso irriducibile), in ogni caso abbiamo:

Teorema 24.3. *La famiglia $\mathcal{S}_{\underline{b}}$ di tutti gli irriducibili (distinti) che appaiono nelle decomposizioni degli insiemi A_i formano un MNS a cui la base $\underline{b}$ è adattata.*

DIM

Per induzione. Decomponiamo $A_1 = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ in irriducibili, per costruzione:

$$n = \dim\langle A_1\rangle = \sum_{i=1}^{k} \dim\langle B_i\rangle.$$

Pertanto può essere $\dim\langle A_2 \cap B_i\rangle < \dim\langle B_i\rangle$ per al più un indice i.

Si ha che $A_2 = (A_2 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup \cdots \cup (A_2 \cap B_k)$ è una decomposizione di A_2, non necessariamente in irriducibili.

Poichè $\dim\langle A_2\rangle = n-1$ si ha:

$$n-1 = \dim\langle A_2\rangle = \sum_{i=1}^{k} \dim\langle A_2 \cap B_i\rangle.$$

In altre parole si deve avere che $A_2 \cap B_i = B_i$ per tutti gli i, tranne per un indice i_0 per tale indice necessariamente $a_1 \in B_{i_0}$.

Per induzione la famiglia di tutti gli irriducibili (distinti) che appaiono nelle decomposizioni degli insiemi $A_i,\ i \geq 2$ formano un MNS per $\langle A_2\rangle$ con base adattata $\{a_2, \ldots, a_n\}$, a questo insieme dobbiamo dunque solo aggiungere B_{i_0}.

Abbiamo dunque un nested set con n elementi ovvero massimale.

Chiaramente la base è adattata e le proprietà richieste valgono.

□

Fissato un ordinamento di Δ abbiamo definito i residui $res_{\underline{b}}$ al variare di $\underline{b}$ nelle basi non spezzate.

Il nostro obiettivo è di dimostrare che:

$$res_{\underline{b}}\psi = res_{\mathcal{S}_{\underline{b}}}\psi.$$

Assumiamo ora che la base $\underline{b} := \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \Delta$ sia non spezzata, otteniamo:

Lemma 24.6. *a_i è il minimo elemento di $p_{\mathcal{S}_{\underline{b}}}(a_i)$ per ogni i.*

DIM Per definizione di $S_{\underline{b}}$ se $a_i \in A \in S_{\underline{b}}$ si deve avere che A decompone uno degli insiemi $A_k = \langle a_k, \ldots, a_n\rangle \cap \Delta$. Necessariamente deve essere $k \leq i$.

D'altra parte a_i appartiene ad uno degli irriducibili di A_i che pertanto è contenuto in qualunque irriducibile B di $A_k,\ k < i$ che contenga a_i.

Per definizione di base non spezzata a_i è il minimo elemento di $A_i = \langle a_i, \dots, a_n \rangle \cap \Delta$. $\square$

Questa proprietà ci induce a definire:

Definizione 10. *Un MNS $\mathcal{S}$ si dirà proprio, se gli elementi $a_S := \min a,\ a \in S \,|\, S \in \mathcal{S}$ sono una base.*

ossservazione 24.7. *Se $\mathcal{S}$ è proprio, $p_{\mathcal{S}}(a_S) = S$ e quindi gli elementi $a_S := \min a,\ a \in S \,|\, S \in \mathcal{S}$ sono una base adattata ad $\mathcal{S}$.*

DIM Sia $U \in \mathcal{S}$ con $a_S \in U$.

Se $U \subset S$ abbiamo necessariamente che $a_S = \min a \in U$ e quindi $a_S = a_U$.

Poiché gli elementi a_S sono una base questo implica che $S = U$. $\square$

Se $\mathcal{S}$ è proprio, ordineremo i suoi sottoinsiemi $S_1, \dots, S_n$ secondo l'ordine crescente degli elementi a_S, indichiamo allora $a_i := a_{S_i}$ abbiamo:

Teorema 24.4. *Se $\mathcal{S}$ è proprio la base $\underline{b} := \{a_1, \dots, a_n\}$ è non spezzata.*

In questo modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra basi non spezzate e MNS propri.

DIM

Dalla osservazione a pagina **??**, posto $A_i := \cup_{j \geq i} S_j$, si ha che A_i è completo e decomposto dagli elementi massimali fra tali S_j.

Evidentemente, per definizione, a_i è il minimo di A_i, basta quindi provare che $A_i = \langle a_i, \dots, a_n \rangle \cap \Delta$.

Ovvero, essendo A_i completo, che $\langle A_i \rangle = \langle a_i, \dots, a_n \rangle$.

Facciamolo per induzione. Se $i = 1$ essendo $\mathcal{S}$ massimale si ha $A_1 = \Delta$ e a_1 è il minimo elemento in Δ.

Poichè $a_1 \notin A_2$ dobbiamo avere $A_2 \neq \Delta$ ed essendo A_2 completo $\dim(\langle A_2 \rangle) < n$.

Poichè evidentemente $\langle A_2 \rangle \supset \langle a_2, \dots, a_n \rangle$ dobbiamo avere $\langle A_2 \rangle = \langle a_2, \dots, a_n \rangle$.

A questo punto segue per induzione che $\langle a_2, \dots, a_n \rangle$ è una base non spezzata in A_2 e quindi, essendo a_1 il minimo di Δ, che $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ è una base non spezzata.

Dalla dimostrazione segue che le due costruzioni, di MNS associato ad una base non spezzata e di base non spezzata associata ad un MNS proprio, sono una l'inversa dell'altra e quindi la corrispondenza biunivoca è stabilita. $\square$

Esempio spazio delle configurazioni dei numeri.

In questo esempio Δ di identifica all'insieme delle coppie $(i, j),\ i < j$ di numeri $\leq n$.

Fissiamo un ordinamento totale su Δ imponendo: $(i, j) \leq (h, k)$ se $k - h < j - i$ e se $k - h = j - i$, se $i \leq h$.

Lemma 24.8. *In questo caso un MNS proprio $\mathcal{S}$ è un MNS di sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, n\}$ formati da almeno due elementi con la proprietà che, prendendo per ogni sottoinsieme A la coppia $c(A) := (i, j),\ i := \min(A),\ j :=$*

$\max(A)$ *formata dal minimo e dal massimo in* A *si ottengono coppie distinte.*

DIM Sia $z_A := z_i - z_j$ con $(i, j) = c(A)$. Dire che $\mathcal{S}$ è proprio vuol dire che gli $n-1$ elementi z_A sono linearmente indipendenti. Ovvero che, scelto comunque un k, i vettori z_k, z_A al variare di $A \in \mathcal{S}$ generano lo spazio dei z_i.

Ragioniamo per induzione partiamo da $A = \{1, 2, \dots, n\} \in \mathcal{S}$ a cui è associato $z_A = z_1 - z_n$.

Per i sottoinsiemi massimali di $\mathcal{S}$ propriamente contenuti in A abbiamo due possibilità.

O si riducono ad un unico elemento B con $n-1$ elementi o a due elementi B_1, B_2 disgiunti con unione A.

Nel primo caso deve essere (essendo $\mathcal{S}$ proprio) o $B = \{2, \dots, n\}$ ovvero $B = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Per induzione aggiungendo z_n nel primo caso e z_1 nel secondo si ottiene facilmente la proprietá.

Se invece $A = B_1 \cup B_2$ sempre per il fatto che $\mathcal{S}$ è proprio possiamo assumere che $1 \in B_1,\ n \in B_2$.

Per induzione lo spazio generato dai $z_C,\ C \subset B$ e z_1 coincide col lo spazio generato dagli $z_i,\ i \in B_1$, similmente per B_2 e z_n.

Se quindi aggiungiamo z_1 a tutti gli $z_A,\ A \in \mathcal{S}$ abbiamo anche $z_n = z_1 - (z_1 - z_n)$ e quindi tutti gli z_i.

$\square$

Vogliamo stabilire una corrispondenza biunivoca fra tali MNS propri e le permutazioni di n elementi che fissano n, (provando in particolare che sono $(n-1)!$.

È meglio formulare questo enunciato in modo più astratto.

Dato un MNS proprio in un insieme totalmente ordinato S *vogliamo associare ad esso una parola senza ripetizioni con tutti gli elementi di* S *che termina con il massimo elemento di* S.

Consideriamo dunque un MNS $\mathcal{S}$ dato da una sequenza $\{S_1, \dots, S_{n-1}\}$ di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ con le precedenti proprietà.

Possiamo assumere che $S_1 = (1, 2, \dots, n)$. Sappiamo che $\mathcal{S}' := \mathcal{S} - \{S_1\}$ ha 1 o 2 elementi massimali.

Trattiamo prima il caso di un unico elemento massimale che possiamo assumere sia S_2.

Essendo $\mathcal{S}$ proprio non può essere $1, n \in S_2$. Se $1 \notin S_2$, deve essere $S_2 = (2, \dots, n)$ altrimenti $n \notin S_2$, e $S_2 = (1, 2, \dots, n-1)$.

Nel primo caso per abbiamo una parola $p(\mathcal{S}')$ con gli elementi $2, \dots, n$ che termina con n associata. Definiamo allora $p(\mathcal{S}) := 1p(\mathcal{S}')$.

Otteniamo in questo modo tutte le parole in $1, 2, \dots, n-1, n$ che iniziano con 1 e terminano con n.

Nel secondo caso, consideriamo S_2 con l'ordinamento opposto $(n-1,\dots,2,1)$. Sempre per induzione abbiamo una parola $p(\mathcal{S}')$ in $1,\dots,n-1$ che termina con 1. Poniamo $p(\mathcal{S}) = p(\mathcal{S}')n$.

Otteniamo tutte le parole in $1,2,\dots,n-1,n$ che terminano con 1,n.

Restano da determinare quelle in cui 1 appare all'interno della parola precedente n.

Supponiamo ora di avere due elementi massimali (ciascuno con almeno 2 elementi) che possiamo assumere siano S_2 e S_3 la cui unione disgiunta è $\{1,\dots,n\}$. Indichiamo con $\mathcal{S}_i,\ i=1,2$ i corrispondenti MNS indotti.

Inoltre, essendo $\mathcal{S}$ proprio, possiamo assumere che $1 \in S_2$, $n \in S_3$.

Per induzione abbiamo due parole $p(\mathcal{S}_2)$ per S_2 relativo all'ordinamento opposto a quello naturale, che quindi termina con 1, $p(\mathcal{S}_3)$ per S_3 relativa all'usuale ordinamento e che termina con n. Poniamo $p(\mathcal{S}) = p(\mathcal{S}_2)p(\mathcal{S}_3)$. Esattamente una parola del tipo rimanente.

È sostanzialmente evidente che questa costruzione si può invertire e che in questo modo si è stabilita una corrispondenza biunivoca. In particolare abbiamo $(n-1)!$ MNS propri che si possono ricostruire ricorsivamente a partire dalle permutazioni. □

Esempio 24.9. *1. Prendiamo il MNS formato dai sottoinsiemi*

$$\{i, i+1, \dots, n\},\ i = 1, \dots, n-1.$$

La permutazione ad esso associata è l'identità.

2. Prendiamo il MNS formato dai sottoinsiemi

$$\{1, 2, \dots, i\},\ i = 2, \dots, n.$$

La permutazione ad esso associata è $n-1, n-2, \dots, 1, n$.

3. L'esempio **??** *è proprio e la sua permutazione associata è:* $3,2,1,4,5$.

25: Residui e cicli

Possiamo ora completare la nostra analisi calcolando i residui.

Per comodità se $\underline{b} := \{b_1,\dots,b_n\} \subset \Delta$ è una base, denotiamo con:

$$\omega_{\underline{b}} := d\log(b_1) \wedge \cdots \wedge d\log(b_n)$$

Teorema 25.1. *Date due basi* $\omega_{\underline{b}}, \omega_{\underline{c}}$ *non spezzate si ha:*

$$res_{\mathcal{S}_{\underline{b}}} \omega_{\underline{c}} = \begin{cases} 1 & se \quad \underline{b} = \underline{c} \\ 0 & se \quad \underline{b} \neq \underline{c} \end{cases}$$

Dim Prima di tutto proviamo che $res_{\mathcal{S}_{\underline{b}}}\omega_{\underline{b}} = 1$.

Per definizione $b_i = \prod_{A_i \subset B} z_B$ da cui $d\log(a_i) = \sum_{A_i \subset B} d\log(z_B)$.

Quando espandiamo il prodotto otteniamo quindi una somma di prodotti del tipo $d\log(z_{B_1}) \wedge d\log(z_{B_2}) \wedge \cdots \wedge d\log(z_{B_n})$ con $A_i \subset B_i$.

La unica applicazione non decrescente ed iniettiva di $\mathcal{S}_{\underline{b}}$ in se stesso è la identità.

Per cui tutti i monomi svaniscono eccetto per il monomio $d\log(z_1) \wedge d\log(z_2) \wedge \cdots \wedge d\log(z_n)$ che ha residuo 1.

Passiamo ora al secondo caso $\underline{b} \neq \underline{c}$. Questo segue immediatamente dal seguente Lemma.

Lemma 25.1. *1. Se $\underline{b} \neq \underline{c}$, la base $\underline{c}$ non è adattata ad $\mathcal{S}_{\underline{b}}$.*

2. Se una base $\underline{c}$ non è adattata ad un MNS $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ si ha $res_{\mathcal{S}}\omega_{\underline{c}} = 0$.

DIM 1. Sia $\underline{c} = \{c_1, \dots, c_n\}$ adattata a $\mathcal{S}_{\underline{b}}$, vogliamo provare che si ha $\underline{b} = \underline{c}$.

Sappiamo che $c_1 = a_1 = b_1$, è l'elemento minimo di Δ.

Sia A la componente irriducibile di Δ contenente a_1 che per definizione è un elemento di $\mathcal{S}_{\underline{b}}$. Abbiamo quindi $A = S_1$.

Affermo che $p_{\mathcal{S}_{\underline{b}}}(a_1) = A$.

Questo segue dal fatto che $a_1 = b_1$ e $\mathcal{S}_{\underline{b}}$ è proprio.

Sia $\Delta' := S_2 \cup \cdots \cup S_n$, Δ' è completo, $S_2, \dots, S_n$ coincide con il MNS proprio $\mathcal{S}_{\underline{b}'}$ associato alla base non spezzata $\underline{b}' := \{b_2, \dots, b_n\}$ di $\langle \Delta' \rangle$.

Inoltre chiaramente $\underline{c}' = \{c_2, \dots, c_n\}$ è adattata a $\mathcal{S}_{\underline{b}'}$, pertanto $\underline{b}' = \underline{c}'$ per induzione, da cui $\underline{b} = \underline{c}$.

2. Dato $a \in \Delta$, con $p_{\mathcal{S}}(a) = A$ abbiamo dalla fomula **??**:

$$a = \prod_{B \in \mathcal{S},\ A \subset B} z_B (c_A + \sum_{B \in \mathcal{S}_A, B \neq A} c_B \prod_{C \in \mathcal{S},\ B \subset C \subsetneq A} z_C),\ c_A \neq 0.$$

Quindi $d\log(a)$ è la somma delle due 1-forme chiuse

$$(35)\quad \gamma_A := \sum_{B \in \mathcal{S},\ A \subset B} d\log z_B, \quad \psi_A := d\log(c_A + \sum_{B \in \mathcal{S}_A, B \neq A} c_B \prod_{C \in \mathcal{S},\ B \subset C \subsetneq A} z_C).$$

Poiché $c_A \neq 0$ esiste, in un intorno di 0, una determinazione olomorfa $\log(c_A + \sum_{B \in \mathcal{S}_A, B \neq A} c_B \prod_{C \in \mathcal{S},\ B \subset C \subsetneq A} z_C)$, pertanto ψ_A è esatta ed olomorfa in un intorno di 0.

Applichiamo la formula **??** ad a_i ponendo $p_{\mathcal{S}}(a_i) = A_i, \psi_i := \psi_{A_i}$ e $\gamma_{A_i} = \gamma_i$.

Sviluppiamo il prodotto delle forme $\gamma_i + \psi_i$ per ottenere la forma $\omega_{\underline{c}}$. Otteniamo vari termini, quelli che contengono un fattore ψ_i sono esatte poichè il prodotto di forme chiuse è una forma chiusa ed una forma chiusa per una esatta è esatta.

Il residuo di una forma esatta è 0. Resta il termine $\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n = 0$ in quanto, essendo la base $\underline{c}$ non adattata a $\mathcal{S}$, abbiamo $A_i = A_j$ per due indici distinti e quindi due fattori ripetuti nel prodotto. $\square$

CONCLUSIONE Abbiamo provato per le basi non spezzate la formula desiderata:

$$res_{\underline{b}} = res_{\mathcal{S}_{\underline{b}}}.$$

Questo ultimo residuo $res_{\mathcal{S}_{\underline{b}}}\psi$ è il coefficiente di $\prod z_A^{-1} dz_1 \wedge \ldots dz_n$, nello sviluppo della forma ψ nelle coordinate z_i associate a $\mathcal{S}$.

Tale residuo si può quindi calcolare con un esplicito algoritmo.

ossservazione 25.2. *La formula del Teorema* **??** *dimostra immediatamente che le forme $\omega_{\underline{b}}$ sono linearmente indipendenti completando la dimostrazione del Teorema* **??**.

Resta da discutere un'ultimo punto algoritmico.

Per il calcolo, dato un punto $p \in C(A)$ bisogna determinare una grande cella c per cui $p \in \overline{c}$.

In generale la determinazione delle grandi celle è un problema molto complesso ma per i nostri calcoli basta molto meno.

Prendiamo infatti semplicemente un punto q interno a $C(A)$ e che non giaccia su nessuno degli iperpiani generati da $n-1$ vettori di Δ, a scelta (questo non è complicato da fare) e consideriamo il segmento qp.

Questo segmento interseca gli iperpiani suddetti in un numero finito di punti, quindi si può determinare un ϵ abbastanza piccolo per cui tutti i punti $tp + (1-t)q, 0 < t < \epsilon$ siano regolari.

Se prendiamo uno di questi punti q_0 esso giace dunque in una cella per cui p è nella chiusura.

A questo punto per ogni base non spezzata dobbiamo verificare in modo semplice se q_0 giace o meno nel cono generato dalla base.

Lezione.10 $D-$moduli Parte I

In questa lezione proviamo la indipendenza lineare dei monomi proposti nel Teorema **??** usando un metodo generale che viene dalla Teoria dei $D-$moduli.

26: Algebra di Weyl

Noi utilizzeremo solo i primi fatti elementari della Teoria dei $D-$moduli, per essi una buona referenza è [**?**].

Partiamo dall'algebra degli operatori differenziali a coefficienti polinomiali, detta algebra di Weyl:

$$W(n) := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial,} \dots, \frac{\partial x_n}{\partial]}. \tag{36}$$

È facile vedere che ogni elemento di $W(n)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi:

$$x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n}, \quad h_i, k_j \in \mathbb{N}.$$

L'algebra $W(n)$ è non commutativa, i suoi generatori soddisfano le relazioni canoniche di commutazione (della meccanica quantistica):

$$[x_i, \frac{\partial x_i}{\partial]} = x_i \frac{\partial x_i}{\partial -} \frac{\partial x_i}{\partial x\ i} = -1, \quad [x_i, \frac{\partial x_j}{\partial]} = 0,\ \forall i \neq j, \tag{37}$$

$$[x_i, x_j] = [\frac{\partial x_i}{\partial,} \frac{\partial x_j}{\partial]} = 0,\ \forall i, j.$$

Osservazione: Usiamo la nozione di *commutatore* fra due elementi $[a, b] := ab - ba$ in un'algebra qualunque.

Utilizzeremo spesso alcune semplici proprietà del commutatore:

Lemma 26.1.

$$[a, bc] = [a, b]c + b[a, c], \quad \textit{regola di Leibnitz}$$

Se $[a, b] = 1$ *allora* $[a, b^n] = nb^{n-1},\ \forall n \geq 1.$

DIM $[a, b]c + b[a, c] = (ab - ba)c + b(ac - ca) = abc - bca = [a, bc]$.
Per la seconda identità ragioniamo per induzione, per $n = 1$ è l'ipotesi, altrimenti applichiamo induzione e la regola di Leibnitz.

$$[a, b^n] = [a, b]b^{n-1} + b[a, b^{n-1}] = b^{n-1} + b(n-1)b^{n-2} = nb^{n-1}.$$

Applicheremo questo lemma a $a = \frac{\partial x_i}{\partial,}$ $b = x_i$ oppure a $a = -x_i,\ b = \frac{\partial x_i}{\partial,}$ ottenendo:

$$[\frac{\partial}{\partial x_i}, x_i^n] = nx_i^{n-1},\ [x_i, \frac{\partial}{\partial x_i}^{n}] = -n \frac{\partial}{\partial x_i}^{n-1}.$$

ossservazione 26.2. *Non è necessario mettere in testa tutte le variabili e poi tutte le derivate, in seguito sarà utile mettere in altri ordini variabili e derivate anche alternando variabili con derivate. Dalle regole di commutazione tutte queste sono basi ottenute con cambiamenti di base di tipo triangolare.*

Per esercizio il lettore potrà dedurre la precedente osservazione anche dal semplice fatto *(trasformata di Fourier algebrica)*:

ESERCIZIO Per ogni i esiste un automorfismo $f_i : W(n) \to W(n)$ definito da:

$$f_i(x_j) = x_j,\ f_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j},\ \forall j \neq i, \quad f_i(\frac{\partial}{\partial x_i}) = -x_i,\ f_i(x_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

L'algebra $W(n)$ opera (come operatori differenziali) sull'anello dei polinomi $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ed è immediato osservare che: se $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n],\ f \neq 0$, $W(n)$ opera anche sull'anello $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, f^{-1}]$ delle funzioni razionali con una potenza di f al denominatore.

Questi moduli sono importanti nella teoria generale (Teoria del polinomio di Bernstein) ed hanno proprietà molto speciali.

Nel nostro caso vogliamo studiare il caso in cui $d = \prod_{i=1}^m \alpha_i(x)$ è un prodotto di forme lineari.

Questi ed alcuni loro sottomoduli e quozienti sono i soli $D-$moduli che utilizzeremo.

Iniziamo con un esempio, prendiamo l'anello dei polinomi di Laurent $R := \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$.

Definiamo il sottospazio R_k come quello formato da tutti i polinomi di Laurent che hanno al più k fra le variabili con esponente strettamente negativo.

Dalle regole di derivazione segue che R_k è un sottomodulo.

Consideriamo per un qualche $k \leq n$ il modulo R_k/R_{k-1} che ha come base le classi dei monomi in cui esattamente k fra tali variabili hanno esponente strettamente negativo.

Inoltre, per ogni scelta di un sottoinsieme S di k fra tali variabili abbiamo il sottomodulo $(R_k/R_{k-1})_S \subset R_k/R_{k-1}$ che ha come base le classi dei monomi in cui esattamente le k variabili in S hanno esponente strettamente negativo.

Proposizione 26.3. *Si ha che R_k/R_{k-1} è la somma diretta dei moduli $(R_k/R_{k-1})_S$, al variare di S fra i $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di $\{x_1, \ldots, x_n\}$ con k elementi.*

Analizziamo uno di questi moduli, sia per esempio $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$.

R_S ha dunque come base i monomi $\prod_{i=1}^k x_i^{-h_i} \prod_{i=k+1}^n x_i^{h_i} (x_1 \ldots x_k)^{-1},\ h_i \geq 0$.

Consideriamo l'elemento $e_S := \frac{1}{x_1 \ldots x_k}$ modulo R_{k-1}. Abbiamo:

$$(38) \quad \prod_{i=1}^k x_i^{-h_i} \prod_{i=k+1}^n x_i^{h_i} (x_1 \ldots x_k)^{-1} = \prod_{i=k+1}^n (-1)^{h_i} h_i! \prod_{i=k+1}^n x_i^{h_i} \prod_{i=1}^k \frac{\partial^{h_i}}{\partial x_i}(e_S).$$

$x_i e_S = \frac{x_i}{x_1 \ldots x_k} \cong 0$ modulo $R_{k-1},\ \forall i = 1, \ldots, k.$ $\dfrac{\partial}{\partial x_i} e_S = 0,\ \forall i = k + 1, \ldots, n.$

Ne deduciamo:

Teorema 26.1. *1. Il modulo R_S è generato dall'elemento e_S (modulo ciclico).*

2. L'annullatore in $W(n)$ di e_S è l'ideale sinistro generato dagli elementi $x_i,\ \forall i = 1, \dots, k;\quad \frac{\partial}{\partial x_i},\ \forall i = k+1, \dots, n$.

3. R_S è un modulo irriducibile con base gli elementi

$$\prod_{i=k+1}^{n} x_i^{h_i} \prod_{i=1}^{k} \frac{\partial^{k_i}}{\partial x_i}(e_S),\ \ h_i, k_i \geq 0.$$

DIM 1. Segue immediatamente dalla formula **??**.

2. Sia I_S l'ideale sinistro generato dagli elementi $x_i,\ \forall i = 1, \dots, k;\quad \frac{\partial}{\partial x_i},\ \forall i = k+1, \dots, n$. Chiaramente I_S annulla e_S. Consideriamo il modulo $M_S := W(n)/I_S$ con il suo omomorfismo $\pi : M_S \to R_S$ che manda la classe di un operatore $p \in W(n)$ nell'elemento $p(e_S)$ (è ben definito poiché $I_S e_S = 0$). Dobbiamo provare che π è un isomorfismo. Per questo basta provare che M_S è generato linearmente dalle classi degli elementi:

$$\prod_{i=k+1}^{n} x_i^{h_i} \prod_{i=1}^{k} \frac{\partial^{k_i}}{\partial x_i},\ \ h_i, k_i \geq 0. \tag{39}$$

Dalla osservazione **??** l'algebra $W(n)$ ha come possibile base i monomi:

$$M = \prod_{i=k+1}^{n} x_i^{h_i} \prod_{i=1}^{k} \frac{\partial^{k_i}}{\partial x_i} \prod_{i=1}^{k} x_i^{h_i} \prod_{i=k+1}^{n} \frac{\partial^{k_i}}{\partial x_i}$$

Poichè gli elementi $x_1, \dots, x_k, \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ commutano è chiaro che, se uno degli esponenti $h_i,\ i = 1, \dots, k$ o uno degli esponenti $k_i,\ i = k+1, \dots, n$ è maggiore di 0 il monomio M è nell'ideale I_S. Restano dunque solo i monomi desiderati.

3. Proviamo che R_S è irriducibile. Abbiamo già visto che ha come base le classi degli elementi $\prod_{i=k+1}^{n} x_i^{h_i} \prod_{i=1}^{k} \frac{\partial^{h_i}}{\partial x_i}(e_S),\ \ h_i \geq 0$.

Per provare che un modulo M su un anello R è irriducibile basta provare che, dato comunque un elemento $m \in M,\ m \neq 0$ si ha che m genera M ovvero $Rm = M$.

Chiamiamo $N := Rm$ il sottomodulo che voglimo provare uguale ad M. Prendiamo quindi una combinazione lineare $m \in M$ a coefficienti non nulli degli elementi $\prod_{i=k+1}^{n} x_i^{h_i} \prod_{i=1}^{k} \frac{\partial^{h_i}}{\partial x_i}(e_S),\ \ h_i \geq 0$. Basta provare che, nel sottomodulo N, generato da m, vi è la classe di 1. Procediamo per induzione sul massimo degli esponenti h_i che appaiono in tali monomi. Se tale massimo è 0 si ha che $m = ce_S$, con c una costante non nulla, e l'enunciato è evidente. Altrimenti assumiamo, prima di tutto, che tale massimo h sia preso da una delle variabili, ad esempio x_{k+1}^h. Abbiamo per definizione di modulo, che $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} m \in N$.

Ora applicando le regole di commutazione $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} x_{k+1}^h = x_{k+1}^h \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} - h x_{k+1}^{h-1}$ il primo termine da luogo a termini che finiscono con l'operatore $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}$ e quindi sono 0 modulo I_S, nel secondo termine si è abbassato il grado direttivo in x_{k+1} mantenendo non nullo l'elemento se $h > 0$. Per induzione dunque N contiene un elemento in cui x_{k+1} non appare. Simile ragionamento per gli altri termini. Ora passiamo al grado massimo in $\frac{\partial}{\partial x_1}$ sia esso m. Se $h > 0$ usiamo la commutazione: $x_{k+1} \frac{\partial^h}{\partial x_{k+1}} = \frac{\partial^h}{\partial x_{k+1}} x_{k+1} - h \frac{\partial^{hs-1}}{\partial x_{k+1}}$ e procediamo come prima arrivando infine a provare che $e_S \in N$ e quindi $N = M$. □

Osserviamo cosa succede se, invece di considerare il modulo generato da $\frac{1}{x_1 \ldots x_k}$ modulo R_{k-1} studiamo quale è il modulo generato nell'algebra R.

Lasciamo per esercizio di verificare che tale modulo è l'insieme

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n][(x_1 \ldots x_k)^{-1}]$$

di tutte le frazioni razionali che hanno al denominatore solo variabili estratte fra le $x_1, \ldots, x_k$. Tale modulo non è irriducibile ma ha una *catena finita di composizione* i cui fattori irriducibili consistono in tutti i moduli M_U al variare di tutti i 2^k sottoinsiemi U di S.

ESERCIZIO Usando gli automorfismi di pagina **??** dare una diversa dimostrazione della irriducibilità di M_S riducendosi al caso dei polinomi.

È importante provare che due moduli M_A, M_B non sono isomorfi quando $A \neq B$ sono due insiemi diversi di variabili.

Per questo serve trovare un qualche invariante che li distingua. Nel nostro caso si tratta di un invariante geometrico la *varietàcaratteristica.*

La possiamo definire per un modulo finitamente generato come segue:

Nella algebra di Weyl $W(n)$ consideriamo per ogni $k \geq 0$ il sottospazio $W(n)_k$ formato da quegli operatori che sono di grado $\leq k$ nelle derivate.

Le regole di commutazione e le definizioni implicano che:

$$W(n)_0 \subset W(n)_1 \subset \ldots W(n)_k \subset \ldots, \quad W(n) = \cup_{i=0}^{\infty} W(n)_k, \tag{40}$$
$$W(n)_h W(n)_k \subset W(n)_{h+k}.$$

Queste proprietà in generale definiscono la nozione di *algebra filtrata.*

Definizione 11. *Una filtrazione di una algebra R è una successione di sottospazi $R_k,\ k = -1, \ldots, \infty$ tale che:*

$$R = \cup_{k=0}^{\infty} R_k, \quad R_h R_k \subset R_{h+k}, \quad R_{-1} = 0. \tag{41}$$

Il concetto di algebra filtrata va paragonato con quello molto più restrittivo di *algebra graduata*.

Definizione 12. *Una algebra graduata, è una algebra R con una successione di sottospazi $R_k \subset R$; $\quad k = 0, \dots, \infty$ tale che:*

$$R = \oplus_{k=0}^{\infty} R_k, \quad R_h R_k \subset R_{h+k}. \tag{42}$$

Un elemento di R_k si dice *omogeneo di grado k.*

Abbiamo che il prodotto di due elementi omogenei di gradi h, k è omogeneo di grado $h + k$

Nel caso dell'algebra $W(n)$ la precedente filtrazione viene anche detta *filtrazione di Bernstein.*

Ad una tale nozione è legata quella di *algebra graduata associata.*

Sia dunque $R = \cup R_k$ una algebra filtrata, vogliamo associare ad essa una algebra graduata.

Intuitivamente l'idea è che, dato un elemento di R_h vogliamo pensarlo di grado h e quindi trascuriamo elementi in $R_{(h-1)}$.

In pratica sostituiamo R con la somma diretta:

$$Gr(R) := \oplus_{h=0}^{\infty} R_h / R_{h-1}$$

dati due elementi $a \in R_h,\ b \in R_k$ quando ne facciamo il prodotto lo consideriamo solo modulo R_{h+k-1} infatti vediamo che è ben definito il prodotto:

$$R_h/R_{h-1} \times R_k/R_{k-1} \to R_{h+k}/R_{h+k-1}.$$

In questo modo definiamo l'algebra graduata associata.

La classe in R_h/R_{h-1} di un elemento $a \in R_h$ viene a volte detta il *simbolo di a*, coerentemente con l'uso nella teoria degli operatori differenziali.

L'algebra graduata associata ad una filtrazione di un'algebra R va considerata come una *semplificazione* o *degenerazione* di R.

Spesso è possibile ricostruire alcune proprietà di R a partire da proprietà della più semplice algebra graduata.

Un caso particolarmente importante si ha quando R è non commutativa ma $gr(R)$ è commutativa, il che avviene se e solo se dati comunque elementi a, b di grado di filtrazione h, k si ha che $[a, b] \in R_{h+k-1}$.

Questo avviene in particolare per la filtrazione di Bernstein!.

Lemma 26.4. *L' algebra graduata di $W(n)$ relativamente alla filtrazione di Bernstein è un anello di polinomi nelle variabi x_i e ξ_i classe di $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.*

Essenzialmente, poichè x_i ha grado 0 e $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ha grado 1, si ha che sia $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ che $\frac{\partial}{\partial x_i} x_i$ hanno grado 1.

La loro differenza $x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} x_i = -1$ ha grado 0 quindi nell'algebra graduata le classi commutano.

Il fatto che tali classi generano polinomialmente l'algebra graduata è un semplice esercizio e deriva dalla forma canonica degli operatori di $W(n)$. $\square$

Prendiamo ora un modulo M su un algebra filtrata R.

Definizione 13. *Una filtrazione su M, compatibile con la filtrazione di R ,è una successione crescente di sottospazi $0 = M_{-1} \subset M_0 \subset M_1 \subset M_k \subset \dots$ che soddisfi:*

$$\cup_k M_k = M, \quad R_h M_k \subset M_{h+k}, \ \forall h, k.$$

Lemma 26.5. *Lo spazio graduato $gr(M) := \oplus_{h=0}^{\infty} M_h / M_{h-1}$ è in modo naturale un modulo graduato sull'algebra graduata.*

DIM La lasciamo per esercizio.

Se M è un modulo finitamente generato su un algebra R possiamo definire una filtrazione compatibile scegliendo generatori $m_1, \dots, m_d$ per il modulo e ponendo per definizione $M_k := \sum_{i=1}^{d} R_k m_i$. Questa filtrazione dipende dai generatori m_i ma:

Lemma 26.6. *Siano M_k^1, M_k^2 le due filtrazioni indotte da due diversi insiemi di generatori $m_1, \dots, m_d$; $n_1, \dots, n_e$. Allora esistono due interi positivi a, b tali che, per ogni k si ha:*

$$M_k^1 \subset M_{k+a}^2, \quad M_k^2 \subset M_{k+b}^1$$

DIM Sia a un intero tale che $n_i \in M_a^1, i = 1, \dots, e$ e b un intero tale che $m_i \in M_b^2, i = 1, \dots, d$. Dalla definizione della filtrazione segue immediatamente l'asserto. $\square$

Nel caso in cui l'algebra graduata è commutativa è utile considerare l'ideale di $Gr(R)$ che annulla $gr(M)$.

Nel caso dell'algebra di Weyl questo è un ideale di un anello di polinomi, la varietà dei suoi zeri è la *varietà caratteristica.*

Prima di discuterla ricordiamo alcuni dei fatti più elementari sulle varietà affini.

Sia dato quindi un insieme di polinomi $f_i := f_i(x_1, \dots, x_m), \ i = 1, \dots, k$ in m variabili a coefficienti complessi (la teoria ovviamente si può fare in modo molto più generale).

Definizione 14. *La varietà affine definita dai polinomi f_i, è l'insieme:*

$$V(f_1, \dots, f_k) := \{(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^m \mid f_i(a_1, \dots, a_m) = 0, \ \forall i = 1, \dots, k.\}$$

I punti di $V(f_1, \dots, f_k)$ sono quindi le *soluzioni* del sistema di equazioni non lineari $f_i(x_1, \dots, x_m) = 0$.

Si tratta quindi di una generalizzazione (molto complicata) della teoria dei sistemi di equazioni lineari.

Osserviamo qualche prima proprietà, dati polinomi $f_i,\ i = 1, \dots, k$ e $g_j,\ j = 1, \dots, h$ si ha:

$$V(f_1, \dots, f_k) \cap V(g_1, \dots, g_h) = V(f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_h),$$

$$V(f_1, \dots, f_k) \cup V(g_1, \dots, g_h) = V(f_i g_j), i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, h.$$

Data la varietà $V := V(f_1, \dots, f_k)$ è importante studiare l'insieme di tutti i polinomi che svaniscono su V.

Ovvero l'insieme delle equazioni non lineari che si possono dedurre dai polinomi $f_1, \dots, f_k$.

indichiamo con I_V tale insieme, evidentemente gode delle seguenti proprietà:

Se $f, g \in I_V$ si ha $f + g \in I_V$, se $f \in I_V$ e g è un qualunque polinomio $fg \in I_V$.

Queste proprietà, in un anello commutativo, formano la definizione di *ideale*.

Chiaramente dati polinomi g_i abbiamo che $\sum_{i=1}^k g_i f_i$ svanisce su $V(f_1, \dots, f_k)$ ovvero $\sum_{i=1}^k g_i f_i \in I_V$.

È evidente che l'insieme degli elementi $\sum_{i=1}^k g_i f_i$ al variare degli g_i è un ideale e che ogni ideale contenente i polinomi f_i contiene questi elementi.

Pertanto si dice che l'insieme degli elementi $\sum_{i=1}^k g_i f_i$ è *l'ideale generato dagli elementi* f_i e si denota con $(f_1, \dots, f_k)$.

È essenziale notare che, in generale, non è vero che $(f_1, \dots, f_k) = I_{V(f_1, \dots, f_k)}$, infatti se g è un polinomio e k un intero positivo, tali che $g^k = \sum_{i=1}^k g_i f_i$ anche g svanisce su $V(f_1, \dots, f_k)$.

Il Teorema fondamentale è dovuto ad Hilbert ed è detto *Teorema degli zeri di Hilbert* o *Hilbert Nullstellensatz* e dice:

Teorema 26.2. *I_V coincide con l'insieme di tutti gli elementi g per cui esiste un intero positivo k e $g^k \in (f_1, \dots, f_k)$.*

Teorema 26.3. *Per l'algebra di Weyl la varietà caratteristica non dipende dai generatori presi. Diviene quindi un invariante del modulo.*

DIM Prendiamo due diversi insiemi di generatori $m_1, \dots, m_d;\ n_1, \dots, n_e$, indichiamo con $Gr^1(M),\ Gr^2(M)$ i due graduati associati.

Per definizione un elemento $x \in R_k,\ x \notin R_{k-1}$ induce, nel graduato, un elemento dell'annullatore di $Gr^1(M)$ (rispettivamente di $Gr^2(M)$) se per ogni h abbiano che $xM_h^1 \subset M_{h+k-1}^1$ (rispettivamente se per ogni h abbiano che $xM_h^2 \subset M_{h+k-1}^2$).

Ora nel primo caso abbiamo anche che per ogni intero positivo p abbiamo che x^p induce un elemento di grado kp, per induzione $x^p M_h^1 \subset M_{h+pk-p}^1$ da cui:

$$x^p M_h^2 \subset x^p M_{h+b}^1 \subset M_{h+b+pk-p}^1 \subset M_{h+b+a+pk-p}^2.$$

Prendendo $p = a + b + 1$ vediamo dunque che x^{a+b+1} induce un elemento nell'annullatore di $Gr^2(M)$.

In definitiva detti I_1, I_2 i due ideali annullatori abbiamo che ogni elemento di I_1 elevato ad una opportuna potenza è in I_2 e simmetricamente per I_2.

Questo implica chiaramente che I_1, I_2 hanno la stessa varietà caratteristica.

Per il modulo R_S prima considerato l'ideale associato alla filtrazione che viene dal generatore e_S è l'ideale generato dagli elementi $x_1, \dots, x_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ che quindi definisce un sottospazio.

Abbiamo invero una descrizione indipendente dalle coordinate lineari. Quando cambiamo coordinate nelle variabili $y_i = \sum_j a_{i,j} x_j$ vediamo che $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n a_{j,i}\frac{\partial f}{\partial y_j}$ quindi $\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n b_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}$ dove la matrice $b_{i,j}$ è l'inversa trasposta della matrice $a_{i,j}$.

In termini più intrinseci se le x_i sono coordinate di uno spazio V le ξ_i sono coordinate duali nello spazio duale V^*.

osservazione 26.7. *Le varietà caratteristiche sono contenute in $V \times V^*$ che in termini più globali e geometrici è il fibrato cotangente dello spazio V.*

Nel caso di R_S: la varietà di equazioni $x_1 = \cdots = x_k = \xi_{k+1} = \cdots = \xi_n = 0$ è il *fibrato conormale* allo spazio di equazioni $x_i = 0, i = 1, \dots, k$.

La definizione di fibrato conormale ad una sottovarietà V di una varietà differenziabile W è la seguente.

Il fibrato cotangente a W è l'insieme delle coppie q, p con $q \in W$ e p una forma lineare sullo spazio tangente $T_q(W)$ di W in q.

Il fibrato conormale ad una sottovarietà V di W è:

l'insieme delle coppie q, p con $q \in V$ e p una forma lineare, sullo spazio tangente $T_q(W)$ di W in q, la quale si annulla sullo spazio tangente di V in q.

ossservazione 26.8. *Per apprezzare questa definizione bisognerebbe studiare un po di formalismo Hamiltoniano e di geometria simplettica.*

In questo ambito i fibrati conormali sono gli esempi più semplici di varieta `Lagrangiane.

Possiamo ora finalmente provare la indipendenza lineare degli elementi di **??**.

Abbiamo bisogno di alcuni fatti elementari di teoria dei moduli che si trovano in tutti i libri di algebra astratta (cf. Appendice).

Definizione 15. *Ricordiamo che un modulo M si dice di lunghezza finita se esiste una catena di sottomoduli:*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_k = 0$$

tali che M_i/M_{i+1} sia irriducibile per ogni i.

Un modulo si dice semisemplice se è somma diretta di moduli irriducibili.

Fatto Un modulo semisemplice di lunghezza finita è somma diretta di un numero finito di moduli irriducibili.

I teoremi base dicono:

- *Teorema di Jordan H ölder.* Date due catene massimali $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_k = 0$, $M = M'_0 \supset M'_1 \supset \cdots \supset M'_h = 0$ allora $h = k$ e i moduli M_i/M_{i+1} che appaiono nella prima lista coincidono a meno dell'ordine con i moduli M'_i/M'_{i+1}.
- Se un modulo M è somma diretta di irriducibili, si ha una decomposizione canonica in *componenti isotipiche.*
- Una componete isotipica di M è la somma di tutti i suoi sottomoduli isomorfi ad un dato irriducibile. In pratica prima M viene decomposto in modo unico come somma diretta $M = \oplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ dove A è la lista degli irriducibili N_α che appaiono come sottomoduli di M.
- Ogni M_α si può decomporre, ma in modo non canonico ed in generale in un numero infinito di modi come somma diretta di moduli isomorfi ad N_α.
- Se si sa che un modulo è somma, non necessariamente diretta, di moduli irriducibili N_i allora ogni sottomodulo di M irriducibile è isomorfo ad uno degli N_i.

L'esempio che studiamo è l'algebra R delle funzioni razionali nelle variabili y_i con al denominatore prodotti di potenze delle forme $\alpha_i(y)$ in Δ.

Sappiamo dal Teorema **??**, che ogni tale funzione si può sviluppare in termini in cui le forme distinte che appaiono al denominatore sono linearmente indipendenti.

Poniamo R_k il sottospazio di R formato da quelle funzioni in cui le forme distinte che appaiono al denominatore sono al più k. È evidente che i sottospazi R_k sono dei sottomoduli. Vogliamo analizzare in dettaglio il modulo $M^k_\Delta := R_k/R_{k-1}$.

Dalla parte che abbiamo provato del Teorema **??** segue che M^k_Δ è somma (non sappiamo ancora se sia diretta) delle immagini dei sottospazi $R_{S,W}$ al variare di W nei sottospazi di dimensione k generati da forme di Δ e di S fra i circuiti non spezzati con k elementi e che generano W.

Inoltre dalle nostre analisi segue facilmente che la immagine in M^k_Δ dello spazio $R_{S,W}$ coincide con il modulo irriducibile R_S, Dobbiamo quindi provare che la somma dei moduli R_S al variare di $W := \langle S \rangle$ e di S fra i circuiti non spezzati relativamente a W è diretta.

In questo caso due moduli R_S, R_T sono isomorfi se e solo se S e T generano il medesimo spazio di forme lineari, ovvero corrispondono allo stesso spazio

W. Per ogni tale W abbiamo dunque una componente isotipica $M_\Delta^k(W)$ e $M_\Delta^k = \oplus_W M_\Delta^k(W)$.

Se vogliamo decomporre poi una componente isotipica la decomponiamo usando gli S che sono non spezzati su W. Il teorema finale, che prova anche la indipendenza lineare **??** è dunque:

Teorema 26.4.

$$R_k/R_{k-1} = \oplus_W \oplus_S R_S$$

W varia fra i sottospazi di dimensione k generati da elementi di Δ e S varia fra i sottoinsiemi con k elementi di Δ che generano W e che sono non spezzati su W.

Prima di affrontare la dimostrazione di questo Teorema avremo bisogno di vari Lemmi.

Definiamo come A_S il sottomodulo generato da e_S in R, sappiamo che, scegliendo un sistema di coordinate $z_1, \dots, z_n$ per cui $S = z_1, \dots, z_k$ abbiamo $A_S = \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_k^{\pm 1}, z_{k+1}, \dots, z_n]$.

Sia A_S^0 il sottospazio di A_S formato da quelle frazioni in cui non tutte le variabili $z_i, i = 1, \dots, k$ appaiono al denominatore. Chiaramente A_S^0 è un sottomodulo e A_S/A_S^0 è isomorfo ad R_S.

Lemma 26.9. *Ogni sottomodulo proprio di A_S è contenuto in A_S^0.*

DIM Basta provare che, dato un elemento $f \in A_S$ non contenuto in A_S^0 il sottomodulo N da esso generato è l'intero A_S.

Dire che $f \notin A_S^0$ vuol dire che contiene un termine in cui tutte le variabili $z_i, i = 1, \dots, k$ appaiono con esponente negativo. Prendiamo prima di tutto i termini in cui z_1 appare con esponente $-h$ con h massimo. Moltiplicando per z_1^{h-1} questi termini appaiono con z_1 in grado -1 e li scriviamo come $z_1^{-1}g$ im cui z_1 non appare in g, mentre gli altri f_0 hanno z_1 in grado non negativo. Applichiamo $\frac{\partial}{\partial z_1}^k$ per k abbastanza grande. In questo modo si può ottenere:

$$\frac{\partial f_0}{\partial z_1}^k = 0, \quad \frac{\partial z_1^{-1} g}{\partial z_1}^k = (-1)^k k! z_1^{-k-1} g \in N.$$

Moltiplicando per $[(-1)^k k!]^{-1} z_1^k$ abbiamo che $z_1^{-1}g \in N$, ripetiamo la procedura su g e con le altre variabili ed otteniamo in N un elemento del tipo $f(z_{k+1}, \dots, z_n)(z_1 \dots z_k)^{-1} \in N$.

Ora derivando opportunamente le variabili $z_{k+1}, \dots, z_n$ abbiamo anche $(z_1 \dots z_k)^{-1} \in N$. Poiché $(z_1 \dots z_k)^{-1}$ genera A_S abbiamo $N = A_S$. $\square$

Lemma 26.10. *Dato un modulo ciclico su un algebra R generato da un elemento c prendiamone la somma diretta di d copie che chiamiamo Rc_i, $i = 1, \dots, d$ e prendiamo una combinazione lineare $p := \sum_{i=1}^d \lambda_i c_i$ con i λ_i costanti e non tutti nulli. Allora il sottomodulo generato da p è isomorfo a Rc.*

DIM Se $a \in R$ annulla p si deve avere $a\lambda_i c_i = 0$ per ogni i. Poiché almeno un λ_i è non nullo si deve avere $ac = 0$. Viceversa $ac = 0$ implica $ap = 0$ e quindi $Rp = R/I_c = Rc$ dove I_c è l'annullatore di c. $\square$

Lemma 26.11. *Prendiamo una combinazione lineare non nulla $p = \sum_i \lambda_i e_{S_i}$ di elementi e_{S_i} dove gli S_i sono circuiti non spezzati che generano uno stesso spazio W di dimensione k. Allora $p \notin R_{k-1}$.*

DIM Facciamo due riduzioni. Prima di tutto supponiamo che W sia l'intero spazio ovvero $k = n$.

Sappiamo allora che R_{k-1} è contenuto nello spazio generato dalle derivate parziali ovvero, nel linguaggio delle forme differenziali che le forme $f dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ con $f \in R_{k-1}$ sono esatte.

Basta provare che la forma $pdy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ non è esatta. Per questo basta osservare che almeno uno dei suoi residui relativo ad una delle basi S_i è non nullo.

Dal Teorema (**??**) e suoi corollari si ha $res_{S_i} pdy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = \lambda_i d_i$ dove d_i è il determinante della matrice che esprime la base S_i nella base $y_1, \dots, y_n$.

Dalle nostre ipotesi l'asserto segue.

Prendiamo ora come insieme Δ_1 l'insieme unione degli elementi nei vari S_i. In questo caso fissiamo coordinate adattate $z_1, \dots, z_n$ tali che $W = \langle z_1, \dots, z_k \rangle$ in modo che tutte le forme lineari $\alpha(y) \in \Delta_1$ sono combinazioni lineari solo delle prime k variabili.

Possiamo ora ridurci al caso precedente.

Sia $d_1 := \prod_{\alpha(y) \in \Delta_1} \alpha(y)$, abbiamo un omomorfismo:

$$\pi : R = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n][d_1^{-1}] \to \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k][d_1^{-1}] = R', \ \pi(z_i) = z_i,$$

$$\forall i \leq k, \quad \pi(z_i) = 0, \forall i > k.$$

In tale omomorfismo se p si potesse esprimere come elemento di R_{k-1} lo stesso avverrebbe in R' contraddicendo il caso precedente.

Ora il caso generale. Prendiamo $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n][d_1^{-1}] \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n][d^{-1}]$. Se per assurdo l'elemento $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n][d^{-1}]_{k-1}$ avremmo che il sottomodulo che esso genera è contenuto in $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n][d^{-1}]_{k-1}$, in particolare una copia del modulo irriducibile R_S dovrebbe apparire in ogni serie di composizione di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n][d^{-1}]_{k-1}$. Questo è assurdo poiché, per induzione i moduli che formano una serie di composizione di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n][d^{-1}]_{k-1}$ hanno come varietà caratteristica il fibrato conormale ad un sottospazio di codimensione $\leq k - 1$. $\square$

Lemma 26.12. *Nel modulo R_S se un elemento u soddisfa alle equazioni*

$$x_i u = 0, \ i = 1, \dots, k; \ \frac{\partial}{\partial x_i} u = 0, \ i = k+1, \dots, n \tag{43}$$

allora u è un multiplo di e_S.

DIM 1. Prendiamo un elemento della forma

$$f := \sum c_{h_1,\dots,h_n} \prod_{i=k+1}^{n} x_i^{h_i} \prod_{i=1}^{k} \frac{\partial^{h_i}}{\partial x_i}(e_S),\ h_i \geq 0.$$

Se appare una variabile $x_i, i = k+1, \dots, n$ con esponente > 0 si vede immediatamente che $\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$, se invece appare una derivata $\frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1, \dots, k$ con esponente > 0 si vede immediatamente che $x_i f \neq 0$. □

Possiamo ora dimostrare il teorema.

Da quanto dimostrato fino ad ora il quoziente R_k/R_{k-1} è somma dei moduli R_S al variare di S, W.

Ora per W diversi abbiamo moduli non isomorfi in quanto con diversa varietà caratteristica quindi ci riduciamo ad una componente isotipica e dobbiamo far vedere che la somma degli R_S con S non spezzato su W è diretta.

Altrimenti dalla teoria dei moduli semisemplici possiamo da questa somma estrarne una diretta che non contiene tutti gli addendi R_S.

Ne segue che, in questa componente isotipica, lo spazio degli elementi che soddisfano le equazioni (**??**) ha dimensione strettamente inferiore al numero degli irrducibili R_S associati agli S non spezzati.

Però dal Lemma (**??**), nessun elemento non nullo dello spazio vettoriale generato dagli elementi e_S ,che sono linearmente indipendenti, appartiene alla filtrazione R_{k-1}. In questo modo abbiamo una contraddizione.

Lezione 11. Il caso aritmetico

27: Tori e caratteri

Trattiamo ora il caso di vettori a coordinate intere ed il problema di contare i punti interi nei corrispondenti politopi.

Abbiamo già visto che anche questo è un problema di inversione anche se di tipo discreto.

Conviene introdurre un linguaggio geometrico ben noto nella teoria dei gruppi algebrici.

Definizione 16. *(1) L'insieme $T_n := (\mathbb{C}^*)^n$ delle $n-$uple di numeri complessi non nulli è detto toro standard ad $n-$dimensioni è un gruppo (algebrico) per moltiplicazione coordinata per coordinata.*

(2) Un carattere di T_n è un omomorfismo algebrico $\chi : T_n \to \mathbb{C}^*$.

Non è difficile provare che un tale carattere è necessariamente del tipo $\chi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i^{h_i},\ h_i \in \mathbb{Z}$.

- Possiamo anche prendere questa come definizione di carattere.
- Il prodotto di due caratteri è ancora un carattere $\prod_{i=1}^n x_i^{h_i} \prod_{i=1}^n x_i^{k_i} = \prod_{i=1}^n x_i^{h_i+k_i}$.
- È conveniente scrivere $\prod_{i=1}^n x_i^{h_i} := x^{\underline{h}},\ \underline{h} := (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$.

- Dunque $x^{\underline{h}+\underline{k}} = x^{\underline{h}}x^{\underline{k}}$ ed i caratteri, rispetto a tale prodotto sono isomorfi al gruppo $\mathbb{Z}^n$.
- Abbiamo dunque: Le funzioni algebriche su T_n sono i polinomi di Laurent nelle variabili x_i, x_i^{-1}. I caratteri $x^{\underline{h}}$, $\underline{h} \in \mathbb{Z}^n$ sono una base di questo anello (questa è la parte algebrica della usuale analisi di Fourier).

Quando non vi è possibilità di confusione scriveremo $T = T_n$. Denoteremo l'anello delle funzioni algebriche su T:

$$A_T := \mathbb{C}[x_i^{\pm 1}], \tag{44}$$

In un toro l'analogo dei cambiamenti lineari sono i cambiamenti di base per i caratteri.

- Data una matrice $A := (a_{i,j})$ a coefficienti interi, la cui inversa $(b_{i,j})$ sia ancora a coefficienti interi (ovvero per cui $\det(A) = \pm 1$).
- Possiamo definire nuove coordinate con i caratteri

$$y_i = \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{i,j}}, \ x_i = \prod_{j=1}^{n} y_j^{b_{i,j}}$$

Questo cambiamento di coordinate corrisponde ad un cambiamento di basi (intere) nel gruppo dei caratteri $\mathbb{Z}^n$.

Dati m caratteri $\chi_i := x^{\underline{h}_i}$ l'insieme $X := \{p \in T \,|\, \chi_i(p) = 1\}$ è un sottogruppo algebrico di T_n che dipende solo dal sottogruppo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$.

Infatti se $\chi(p) = 1, \psi(p) = 1$ si ha $\chi\psi(p) = 1$ ovvero l'insieme dei caratteri che vale 1 su X è un sottogruppo.

Per studiarlo si può utilizzare il seguente fatto (che si dimostra in modo elementare, cf. Appendice 3):

Teorema 27.1. *Dato un sottogruppo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ esiste una base di $\mathbb{Z}^n$ il cui il sottogruppo è generato da k elementi del tipo*

$$(d_1, 0, \dots, 0),\ (0, d_2, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, d_k, 0, \dots, 0), d_i \in \mathbb{N}^+.$$

Poichè in queste coordinate, chiamiamole a_i i caratteri che generano Λ sono $a_i^{d_i},\ i = 1, \dots, k$ si ha:

In queste coordinate X è formato dalle $n-$uple di numeri $(a_1, \dots, a_n)$ per cui $a_i^{d_i} = 1, i = 1, \dots, k$.

La equazione $x^d = 1$ definisce le d radici dell'unità $e^{\frac{2\pi i k}{d}},\ 0 \leq k < d$. Pertanto:

X ha $d_1 d_2 \dots d_k$ componenti connesse date da:

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_k, a_{k+1}, \dots, a_n) |\ \zeta_i^{d_i} = 1.$$

e la sua componente connessa X_0 passante per l'elemento 1 è il *sottotoro* di dimensione $n-k$, con le prime k coordinate uguali ad 1.

- Non è difficile convincersi dunque che, i caratteri che valgono 1 su X_0 sono quelli in cui le ultime $n-k$ coordinate sono 0.
- Tali caratteri ormano un sottogruppo $\overline{\Lambda}$ con $\Lambda \subset \overline{\Lambda}$ e $\overline{\Lambda}/\Lambda = \oplus_{i=1}^k \mathbb{Z}/(d_i)$.
- $\overline{\Lambda}$ è anche caratterizzato come l'insieme degli elementi $a \in \mathbb{Z}^n$ per cui esiste un numero non nullo k con $ka \in \Lambda$ (gli elementi di torsione modulo Λ).
- Si ha inoltre $\mathbb{Z}^n/\overline{\Lambda} = \mathbb{Z}^{n-k}$.

In questa Teoria dobbiamo pensare ad un toro come ad un analogo periodico di uno spazio vettoriale ed ai sottotori come analoghi dei sottospazi.

Vediamo subito dunque una prima differenza, l'intersezione di sottotori non è necessariamente connessa!

Un caso da considerare come importante è quando abbiamo n vettori $\underline{h}_i$ a coefficienti interi e linearmente indipendenti che possiamo considerare come righe di una matrice intera A.

In questo caso $X := \{p \in T \,|\, \chi_i(p) = 1\}$ è un sottogruppo finito con $|\det(A)|$ elementi.

Questo fatto è importante quando studiamo il problema dei punti interi, associati ad una lista di vettori interi a_i.

In questo caso ogni volta che estraiamo da tale lista una base (come spazi vettoriali) questa determina una matrice intera, con determinante un intero con un valore assoluto m e gli m punti del sottogruppo prima individuato.

Tutti questi punti di questi sottogruppi daranno contributi alle formule che vogliamo sviluppare.

Le formule **??** ed **??** si riscrivono nel linguaggio dei tori come l'identità:

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-x^{\alpha_i}} = \sum_{b \in \mathbb{Z}^n} S_A(b) x^b. \tag{45}$$

Trattiamo subito un caso elementare, in cui prendiamo gli $a_i,\ i = 1, \dots, n$ (righe di una matrice A) linearmente indipendenti e che quindi, secondo le analisi fatte, generano un sottogruppo di indice $|\det(A)|$.

Invertiamo:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-x^{a_i})^{b_i}} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{h=0}^{\infty} \binom{b_i - 1 + h}{h} x^{ha_i} = \tag{46}$$
$$\sum_{h_1, h_2, \dots, h_n} \prod_{i=1}^{n} \binom{b_i - 1 + h_i}{h_i} x^{\sum_{i=0}^n h_i a_i}$$

In definitiva il valore di $S_A(b)$ in questo caso è il polinomio $\prod_{i=1}^n \binom{b_i - 1 + h_i}{h_i}$ sui vettori del cono positivo generato dalla base a_i e di coordinate intere rispetto agli a_i.

Se $m := |\det(A)| > 1$, questi vettori non generano l'intero $\mathbb{Z}^n$, ma un sottogruppo Λ di indice m.

$S_A(b)$ è 0 sulle altre classi laterali di Λ in $\mathbb{Z}^n$.

Siamo quindi in presenza, in più dimensioni, di un semplice esempio di polinomio quasi periodico.

Per sviluppare il caso generale possiamo procedere, come nel caso del volume, a cercare una opportuna espansione in frazioni parziali.

Vedremo che la teoria che abbiamo svolta per gli iperpiani si può generalizzare a questo caso ma con alcune complicazioni non banali.

Prima di tutto generalizziamo la nozione di arrangiamento.

28: Arrangiamenti torici

Definizione 17. *Dato un insieme finito $\Delta = \{a_1, \dots, a_m\}$, di vettori a coordinate intere, definiamo arrangiamento torico associato a Δ, la collezione delle componenti connesse di tutte le intersezioni delle sottovarietà $H_i \subset T$ di equazione $1 - x^{a_i} = 0$.*

Le varietà H_i sono i luoghi dove la funzione generatrice ha poli e quindi vorremo seguire una strategia analoga a quella degli iperpiani, sciogliere i poli e calcolare opportuni residui.

Prima di tutto ricordiamo che fra queste componenti connesse ci sono i punti di intersezione di n ipersuperfici H_i relative ad $n-$elementi linearmente indipendenti a_i.

Tali punti verranno chiamati *punti dell'arrangiamento* ed il loro insieme denotato con Π_Δ.

Per ogni $p \in \Pi_\Delta$ denotiamo inoltre:

$$\Delta_p := \{a \in \Delta \,|\, x^a(p) = 1.$$

ESEMPIO $\Delta = \{(1,0),(0,1),(1,2)\}$ i punti $\Pi_\Delta := \{(1,1),(1,-1)\}$ si ha $\Delta_{(1,-1)} = \{(1,0),(1,2)\}$.

Vi è una semplice idea geometrica da seguire. Intorno ad uno dei punti dell'arrangiamento, in coordinate logaritmiche, i divisori delle equazioni $1 - x^a$ con $a \in \Delta_p$ appaiono come un arrangiamento di iperpiani.

Per questa configurazione la teoria svolta in [**?**] fornisce il richiesto modello meraviglioso. Noi ci accontenteremo di seguire un approccio elementare come nel caso degli iperpiani.

Quello che proveremo è il seguente:

- Per ogni $p \in \Pi_\Delta$ possiamo considerare l'insieme Δ_p con l'ordinamento indotto da Δ e quindi le basi non spezzate di Δ_p che indicheremo NB_p.
- Per ogni coppia $(p, \underline{b})$, $p \in \Pi_\Delta$, $\underline{b} \in NB_p$ definiremo un residuo $res_{(p,\underline{b})}\psi$ per le n forme definito da un opportuno cambiamento di coordinate intorno a p.
- Proveremo infine che la funzione $S_A(b)$ si può calcolare come somma di alcuni di questi residui.

Procediamo in modo sistematico:

Fissata una base di Λ, che corrisponde ad un sistema di coordinate x_i, consideriamo la forma invariante

$$\omega_T = d\log x_1 \wedge d\log x_2 \wedge \ldots \wedge d\log x_n. \tag{47}$$

Questa forma dipende solo dalla orientazione di Λ in altre parole un cambiamento di base ha determinante ± 1 e la forma ω_T corrispondentemente resta invariante o cambia di segno.

Consideriamo ora le funzioni algebriche sul toro con poli nelle H_i.

Queste si possono scrivere nella forma $p(x_1, \ldots, x_n)[\prod_{i=1}^n x_i \prod_{j=1}^m (1 - x^{a_j})]^{-k}$, con $p(x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio.

Indichiamo tale algebra con:

$$R_\Delta := A_T[\prod_{j=1}^m (1 - x^{a_j})^{-1}]. \tag{48}$$

Come primo passo definiamo i residui $res_{(p,\underline{b})}\psi$ dove $p \in \Pi_\Delta$ è un punto dell'arrangiamento e $\underline{b} \in NB_p$ una base non spezzata di Δ_p.

La forma ψ sia del tipo $f\omega_T$ con $f \in R_\Delta$.

Prendiamo prima di tutto $p = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ nelle coordinate x_i, dove le ζ_i sono radici di 1 che dipendono da p.

Scriviamo coordinate locali logaritmiche, intorno a p, ponendo $x_i = \zeta_i e^{\theta_i}$. Se $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \Delta$ si ha

$$x^b = \prod_{i=1}^n \zeta_i^{b_i} e^{\sum_{i=1}^n b_i\theta_i}.$$

Dire che $b \in \Delta_p$ è equivalente a dire che $\prod_{i=1}^n \zeta_i^{b_i} = 1$.

Indichiamo con $\zeta^b := \prod_{i=1}^n \zeta_i^{b_i}$, $\quad (b, \theta) := \sum_{i=1}^n b_i\theta_i$.

Pertanto la funzione $1 - x^b = 1 - \zeta^b e^{(b,\theta)}$ si annulla nel punto di coordinate $\theta_i = 0$ se e solo se $b \in \Delta_p$.

In tal caso si ha $1 - x^b = -(b, \theta)(1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)!}(b, \theta)^k)$ ovvero $(1 - x^b)^{-1}$ è $(\sum_{i=1}^n b_i\theta_i)^{-1} = (b, \theta)^{-1}$ per una funzione olomorfa i termini della cui serie di potenze possono essere esplicitati.

Per quanto riguarda la forma ω_T abbiamo $d\log x_i = d\log(\zeta_i e^{\theta_i}) = d\theta_i$ e quindi $\omega_T = d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge \ldots \wedge d\theta_n$.

Ne deduciamo che una forma $\psi = f\omega_T$ con $f \in R_\Delta$ è, in un intorno di 0 nelle coordinate logaritmiche θ_i, una forma olomorfa moltiplicata per una possibile parte polare del tipo $\prod_{b\in\Delta_p}(b,\theta)^{-m_b}$.

Per una tale forma abbiamo definito (cf. pagina **??**) la nozione di residuo, $res_{\mathcal{S}_{\underline{b}}}\psi$ rispetto ad una base non spezzata $\underline{b}$.

Tale residuo è il coefficiente di $\prod z_i^{-1} dz_1 \wedge \ldots dz_n$, nello sviluppo della forma ψ nelle coordinate z_i associate al nested set $\mathcal{S}_{\underline{b}}$ che decompone $\underline{b}$.

Definiamo quindi $res_{(p,\underline{b})}\psi := res_{\mathcal{S}_{\underline{b}}}\psi$.

Possiamo notare subito almeno una proprietà algebrica di questo residuo:

Proposizione 28.1. *Data una funzione $f \in R_\Delta$, $\psi := f\omega_T$ il residuo $res_{(p,\underline{b})}x^c\psi$ come funzione di c è un polinomio periodico.*

DIM Nelle coordinate adattate z_i la forma ψ ha una espressione $\psi = (\prod_i z_i)^{-m} g(z_1, \ldots, z_n) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$ con $g(z_1, \ldots, z_n)$ olomorfa. Mentre per x^c, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ abbiamo $x^c = \zeta^c e^{(c,\theta)}$. Nelle coordinate z_i abbiamo per (c,θ) una espressione del tipo $\sum_i c_i p_i(z)$ dove $p_i(z)$ sono polinomi indipendenti da c. Calcoliamo il coefficiente di $\prod z_i^{-1}$ nello sviluppo in serie di

$$\zeta^c e^{\sum_i c_i p_i(z)} (\prod_i z_i)^{-m} g(z_1, \ldots, z_n).$$

Sviluppando in serie $e^{\sum_i c_i p_i(z)} = \sum_{h_1,\ldots,h_n} p_{h_1,\ldots,h_n}(c_1, \ldots, c_n) z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$ dove $p_{h_1,\ldots,h_n}(c_1, \ldots, c_n)$ è un polinomio nelle c_i.

Inoltre $g(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{h_1,\ldots,h_n} a_{h_1,\ldots,h_n} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$ con $a_{h_1,\ldots,h_n}$ costanti pertanto il coefficiente di $\prod z_i^{-1}$ è:

$$\zeta^c \sum_{(h_1,\ldots,h_n)} a_{m-1-h_1,\ldots,m-1-h_n} p_{h_1,\ldots,h_n}(c_1, \ldots, c_n)$$

chiaramente un polinomio periodico.

Una seconda osservazione utile è la seguente:

Sia $\underline{b} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base non spezzata di Δ_p consideriamo la forma $\Omega_{\underline{b}} := d\log(1 - x^{a_1}) \wedge \cdots \wedge d\log(1 - x^{a_n})$.

Nelle coordinate θ_i abbiamo $1 - x^{a_i} = -(a_i, \theta) f_i(\theta)$ con $f_i(0) \neq 0$. Pertanto $d\log(1 - x^{a_i}) = d\log(a_i, \theta) + \gamma_i$ con γ_i esatta.

Proposizione 28.2. *In coomologia dell'arrangiamento di iperpiani dato dai caratteri di Δ_p nell'intorno di p dunque la classe di $\Omega_{\underline{b}}$ coincide con la classe della forma $\omega_{\underline{b}} = d\log(a_1, \theta) \wedge \cdots \wedge d\log(a_n, \theta)$.*

Definizione 18. *Data una cella $\mathfrak{c}$ definiamo il residuo di Jeffrey–Kirwan, relativo a $\mathfrak{c}$, di una funzione $f \in R_\Delta$ come:*

$$JK(\mathfrak{c}, f) = (-1)^r \sum_p \sum_{\underline{b}} \epsilon_{\underline{b}} res_{(p,\underline{b})}(f\omega_T), \tag{49}$$

dove $p \in \Pi_\Delta$ *varia nei punti dell'arrangiamento e* $\underline{b} \in NB_p$ *nelle basi non spezzate di* Δ_p *per cui* $\mathfrak{c} \subset C(S)$.

$\epsilon_{\underline{b}}$ *è 1, se* $\underline{b}$ *è equiorientata rispetto alla orientazione scelta e, -1 altrimenti.*

osservazioni 28.3. *1. Si osservi che* $JK(\mathfrak{c}, f)$ *non dipende dalla orientazione.*

*2. Dalla Proposizione (**??**) segue che* $res_{(p,\underline{b})}(f\omega_T)$ *è il coefficiente in coomologia della classe di* $\Omega_{\underline{b}}$.

Il Teorema finale sarà dunque il seguente:

Teorema 28.1. *1. Dato un vettore* $b \in C(A) \cap \mathbb{Z}^n$ *il numero* $S_A(b)$ *coincide con* $JK(\mathfrak{c}, \frac{x^b}{\prod_{i=1}^m (1-x^{a_i})})$ *dove* $\mathfrak{c}$ *è una grande cella con* b *nella chiusura di* $\mathfrak{c}$.

2. I residui $res_{(p,\underline{b})}(\frac{x^b}{\prod_{i=1}^m (1-x^{a_i})}\omega_T)$ *si possono calcolare con formule analoghe a quelle sviluppate per il volume.*

Per arrivare a questo teorema dovremo sviluppare sia la teoria dello sviluppo in frazioni parziali che quella dei residui. Questa ultima è ricondotta alla teoria già nota, dalla definizione data a pagina **??**.

Lezione 12. La funzione $S_A(b)$

Per procedere allo studio della funzione generatrice $S_A(b)$ abbiamo bisogno di una opportuna espansione in frazioni parziali.

Si tratta di una espansione che avviene non nell'anello delle coordinate R_Δ ma piuttosto, in un linguaggio geometrico, nell'anello di un toro che lo riveste.

Tale toro T' è definito tramite i suoi caratteri che fissiamo come il reticolo frazionario $m^{-1}\mathbb{Z}^n$ per qualche opportuno intero m.

Ovvero le coordinate x_i del toro iniziale T si esprimono come y_i^m dove le y_i sono coordinate del toro T' che riveste T.

Iniziamo con una serie di identità che proviamo in alcuni lemmi.

29: Varie identità

Lemma 29.1.

$$\frac{n}{1-x^n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1-\zeta^i x}, \quad \zeta := e^{2\pi i/n}. \tag{50}$$

DIM Prendiamo una variabile ausiliaria t e deriviamo rispetto a t

$$\frac{nt^{n-1}}{t^n - x^n}dt = d\log(t^n - x^n) = d\log(\prod_{i=0}^{n-1}(t - \zeta^i x))$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} d\log(t - \zeta^i x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(t - \zeta^i x)}dt.$$

Ora poniamo $t = 1$ nei coefficienti di dt. □

Lemma 29.2.

$$1 - \prod_{i=1}^{r} z_i = \sum_{\emptyset \subsetneq I \subset \{1,\dots,r\}} (-1)^{|I|+1} \prod_{i \in I}(1 - z_i) \tag{51}$$

$$1 - \prod_{i=1}^{n} x_i = \sum_{I \subsetneq \{1,2,\dots,n\}} \prod_{i \in I} x_i \prod_{j \notin I}(1 - x_j). \tag{52}$$

DIM Si dimostrano per induzione su r. Il caso $r = 1$ è chiaro. In generale, usando l'ipotesi induttiva abbiamo:

Per la prima:

$$\sum_{\emptyset \subsetneq I \subset \{1,\dots,r\}} (-1)^{|I|+1} \prod_{i \in I}(1 - z_i) = \sum_{\emptyset \subsetneq I \subset \{1,\dots,r-1\}} (-1)^{|I|+1} \prod_{i \in I}(1 - z_i) -$$

$$\sum_{I \subset \{1,\dots,r-1\}} (-1)^{|I|+1} \prod_{i \in I}(1 - z_i)(1 - z_r) = 1 - \prod_{i=1}^{r-1} z_i$$

$$+(1 - (1 - \prod_{i=1}^{r-1} z_i))(1 - z_r) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{r} z_i$$

□

Per la seconda:

Spezziamo la somma in 3 termini: $I = \{1,\dots,n-1\}$, $I \subsetneq \{1,\dots,n-1\}$ ed $n \in I$. Otteniamo

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_i(1 - x_n) + (1 - \prod_{i=1}^{n-1} x_i)(1 - x_n) + x_n(1 - \prod_{i=1}^{n-1} x_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Una variazione di questa formula è la seguente:

Lemma 29.3. *Sia* $t = \prod_{i=1}^h z_i \prod_{i=h+1}^r z_i^{-1}$ *allora:*

$$(53)\quad 1 - t = \sum_{\emptyset \subsetneq I \subset \{1,\dots,h\}} (-1)^{|I|+1} \prod_{i \in I} (1 - z_i) - t \sum_{\emptyset \subsetneq I \subset \{h+1,\dots,r\}} (-1)^{|I|+1} \prod_{i \in I} (1 - z_i)$$

DIM Questa è immediata dal Lemma precedente osservando che:

$$1 - t = 1 - \prod_{i=1}^h z_i - t(1 - \prod_{i=h+1}^r z_i).$$

□

Finalmente otteniamo:

Lemma 29.4. *(1) Sia* $t = \prod_{i=1}^h z_i \prod_{i=h+1}^r z_i^{-1}$ *con* $0 \le h \le r$*. Allora*

$$(54)\quad \frac{1}{\prod_{i=1}^r (1 - z_i)} = \sum_{\emptyset \subsetneq I \subset \{1,\dots,h\}} \frac{(-1)^{|I|+1}}{(1-t) \prod_{i \notin I} (1 - z_i)} - \sum_{\emptyset \subsetneq I \subset \{h+1,\dots,r\}} \frac{(-1)^{|I|+1} t}{(1-t) \prod_{i \notin I} (1 - z_i)}.$$

Se $a \in \mathbb{C}^*$ *ed* $a \neq 1$

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^r (1 - z_i)(1 - at)} = -\frac{1}{(a-1) \prod_{i=1}^r (1 - z_i)}$$

$$(55)\quad \frac{a}{a-1}\Big(\sum_{\emptyset \subsetneq I \subset \{1,\dots,h\}} \frac{(-1)^{|I|+1}}{(1-at) \prod_{i \notin I} (1 - z_i)} - \sum_{\emptyset \subsetneq I \subset \{h+1,\dots,r\}} \frac{(-1)^{|I|+1} t}{(1-at) \prod_{i \notin I} (1 - z_i)} \Big).$$

DIM La prima relazione segue da (**??**) dividendo per

$$(1 - t)(1 - z_1)(1 - z_2) \cdots (1 - z_r).$$

Per la seconda scriviamo:

$$\frac{a(1-t)}{(a-1)(1-at)} = \frac{1}{(1-at)} + \frac{1}{a-1}$$

e poi moltiplichiamo la (**??**) per $\frac{a(1-t)}{(a-1)(1-at)}$ ottenendo:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^r (1 - z_i)} \left(\frac{1}{(1-at)} + \frac{1}{a-1} \right) =$$

$$(56)\quad \frac{a}{(a-1)} \Bigg(\sum_{\emptyset \subsetneq I \subset \{1,\dots,h\}} \frac{(-1)^{|I|+1}}{(1-at) \prod_{i \notin I} (1 - z_i)} -$$

$$\sum_{\emptyset \subsetneq I \subset \{h+1,\dots,r\}} \frac{(-1)^{|I|+1} t}{(1-at)\prod_{i \notin I}(1-z_i)}\Big).$$

$\square$

30: Esponenti razionali

Per analizzare la nostra funzione vogliamo presentare una espansione in frazioni parziali seguendo una strada simile a quella di **??**.

Invece di considerare solo vettori a coordinate intere consideriamo anche vettori a coordinate razionali.

Definizione 19. *Diremo che un tale vettore $b \in \mathbb{Q}$ è compatibile con Δ se esiste un $n \in \mathbb{N}$ con $nb \in \Delta$. Diremo anche che una coppia ζ, b ovvero il monomio ζx^b, è compatibile con Δ se esiste un $n \in \mathbb{N}$ con*

$$\zeta^n = 1, nb \in \Delta \iff (\zeta x^b)^n = x^a,\ a \in \Delta.$$

Per enunciare il risultato principale abbiamo bisogno di generalizzare, a questo contesto, la nozione di circuito non spezzato.

Un circuito non spezzato è una sequenza $(\zeta_1, b_1), \dots (\zeta_k, b_k)$ di elementi ammissibili e tali che:

(1) $b_j = \frac{a_{i_j}}{n_j},\ i_1 < i_2 < \dots, < i_k$.
(2) I b_j siano linearmente indipendenti.
(3) Non esiste $e \leq k$, un $a_s \in \Delta,\ s < i_e$ ed interi $m > 0,\ p_j,\ j = e, \dots, k$ con:

$$(x^a)^m = \prod_{j=e}^{k} (\zeta_j x^{b_j})^{p_j}.$$

Ovvero $ma = \sum_{j=e}^{k} p_j b_j,\ \prod_{j=e}^{k} (\zeta_j)^{p_j} = 1.$

Sia

$$\mathcal{S} := \{(\zeta_1, b_1), \dots, (\zeta_M, b_M)\}$$

una sequenza di elementi compatibili con Δ.

Sia, per ogni $j = 1, \dots, M$, $c_j \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$ tale che esista $0 \leq n_j \leq m_j$, $m_j > 0$, con $m_j c_j = n_j b_j$ e poniamo $c := c_1 + \cdots + c_M$. Allora:

Teorema 30.1. *In R possiamo scrivere l'elemento*

$$\frac{x^c}{\prod_{i=1}^{M}(1 - \zeta_i x^{b_i})}$$

come combinazione lineare con coefficienti costanti di elementi della forma

$$\frac{1}{(1 - \eta_1 x^{d_1})^{h_1} \cdots (1 - \eta_r x^{d_r})^{h_r}}$$

con $h_1, \dots, h_r \geq 0$ e $\{(\eta_1, d_1), \dots (\eta_r, d_r)\}$ un circuito non spezzato formato da coppie compatibili con Δ.

DIM Sia $D_{\mathcal{S}} := \prod_{i=1}^{M}(1 - \zeta_i x^{b_i})$.

Prima ci riduciamo al caso $c = 1$. Invero, per ogni j si prenda $d_j \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$ con $m_j d_j = b_j$.

Abbiamo che $c_j = n_j d_j$.

Prendiamo anche una radice m_j-sima di ζ_j, sia η_j e scriviamo:

$$1 - \zeta_j x^{b_j} = 1 - (\eta_j x^{c_j})^{m_j} = \prod_{s=0}^{m_j-1}(1 - \exp(2\pi i s/m_j)\eta_j x^{c_j}) \tag{57}$$

Notiamo che per ogni s, la coppia $(\exp(2\pi i s/m_j)\eta_j, c_j)$ è compatibile con Δ.

Ora sostituiamo nella nostra sequenza $\mathcal{S}$ la coppia (ζ_j, b_j) con la sequenza $\{(\exp(2\pi i s/m_j)\eta_j, c_j)\}$, $s = 0, \dots, m_j - 1$.

Otteniamo una nuova sequenza

$$\mathcal{S}' = \{(\mu_1, d_1,), \dots, (\mu_N, d_N)\}$$

con $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_M$ elementi e con $D_{\mathcal{S}'} = D_{\mathcal{S}}$.

In questa uguaglianza, abbiamo sostituito (ζ_j, b_j) con una sequenza di m_j coppie ciascuna con la seconda coordinata c_j.

Poiché $c_j = n_j b_j$ e $n_j \leq m_j$, abbiamo che $c = \varepsilon_1 d_1 + \cdots + \varepsilon_N d_N$ con $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ per ogni i.

Conclusione

- In definitiva $\frac{x^c}{D_{\mathcal{S}}}$ è un prodotto di fattori o del tipo $\frac{1}{1-\mu_k x^{d_k}}$ oppure $\frac{x^{d_k}}{1-\mu_k x^{d_k}}$
- Chiaramente:
$$\frac{x^{d_k}}{1 - \mu_k x^{d_k}} = \frac{1 - (1 - \mu_k x^{d_k})}{\mu_k(1 - \mu_k x^{d_k})} = \mu_k^{-1}(\frac{1}{1 - \mu_k x^{d_k}} - 1)$$

Sviluppando il prodotto abbiamo una combinazione lineare di termini del tipo desiderato.

Il caso $c = 0$

Essendoci ridotti al caso $c = 0$, proviamo l'asserto per $1/D_{\mathcal{S}}$.

Se la sequenza delle coppie che appaiono al denominatore è un circuito non spezzato non vi è nulla da provare.

La prima condizione non è verificata

Altrimenti, assumiamo che la prima condizione nella definizione di un circuito non spezzato non è verificata i.e.:

vi è un $a := a_s \in \Delta$, ed elementi distinti $(\zeta_{i_1}, b_{i_1}) < \cdots < (\zeta_{i_t}, b_{i_t})$ in $\mathcal{S}$ con $a_s < b_{i_1}$ e:

$$(x^a)^m(\zeta_{i_1} x^{b_{i_1}})^{n_1} \cdots (\zeta_{i_t} x^{b_{i_t}})^{n_t} = 1 \tag{58}$$

per opportuni interi non nulli $m, n_1, \dots n_t$.

In particolare abbiamo, poiché gli elementi a e b_j sono caratteri:

$$ma + n_1 b_{i_1} + \cdots + n_t b_{i_t} = 0 \tag{59}$$

¡1-7¿ Sia $p = |mn_1 \dots n_t|$, e definiamo

$$f_0 := \frac{|m|a}{p}, f_1 := \frac{|n_1|b_{i_1}}{p}, \dots, f_t := \frac{|n_t|b_{i_t}}{p}$$

¡1-8¿ La relazione (**??**) diviene:

$$\varepsilon_0 f_0 + \cdots + \varepsilon_t f_t = 0. \tag{60}$$

con $\varepsilon_j \in \{1, -1\}$.

Applichiamo, per ogni $1 \leq s \leq t$, la formula **??**, sostituendo al posto di x il monomio $\eta_s x^{f_s}$, e con $n = p/|n_s|$. Dove η_s è una radice n-esima di ζ_{i_s}.

¡1-9¿ Si ha in particolare $(\eta_s x^{f_s})^{p/|n_s|} = \zeta_{i_s} x^{b_{i_s}}$ che fornisce:

$$\frac{1}{1 - \zeta_{i_s} x^{b_{i_s}}} = n^{-1} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1 - \eta_s^{i+1} x^{f_s}}. \tag{61}$$

¡1-11¿ Sostituiamo in $1/D_{\mathcal{S}}$ ogni fattore $\frac{1}{1-\zeta_{i_s} x^{b_{i_s}}}$ con la precedente somma.

Otteniamo una espressione di $1/D_{\mathcal{S}}$ come combinazione lineare di p^t termini ciascuno della forma $1/D_{\mathcal{S}'}$ dove $\mathcal{S}'$ è ottenuto da $\mathcal{S}$ sostituendo ogni coppia (ζ_{i_s}, b_{i_s}) con una coppia (η_s, f_s), dove, come prima η_s è una radice $p/|n_s|$-sima di ζ_{i_s}.

In particolare $\mathcal{S}'$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{S}$ e la sequenza di elementi in Δ correspondente agli elementi in $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}$ coincide.

¡1-11¿Fissiamo uno di questi insiemi $\mathcal{S}'$. Allora è univocamente determinata una radice $p/|m|$-esima η_0 dell'unità per cui:

$$(\eta_0 x^{f_0})^{\varepsilon_0} (\eta_1 x^{f_1})^{\varepsilon_1} \cdots (\eta_t x^{f_t})^{\varepsilon_t} = 1. \tag{62}$$

Possiamo applicare la formula (**??**) del Lemma **??**.

Otteniamo $1/D_{\mathcal{S}'}$ espresso come: combinazione lineare di elementi della forma $1/D_{\mathcal{S}''}$ dove:

(1) o la cardinalità di $\mathcal{S}''$ è strettamente minore di quella di $\mathcal{S}'$,
(2) o è la stessa ma $\mathcal{S}''$ è ottenuto da $\mathcal{S}'$ rimovendo una coppia (η_s, f_s) ed inserendo una coppia precedente (η_0, f_0).

Iterando questo procedimento si ottiene il risultato.

La seconda condizione non è verificata

Assumiamo che la seconda condizione nella definizione di un circuito non spezzato non è verificata i.e.: vi sono elementi distinti $(\zeta_{i_0}, b_{i_0}) < \cdots < (\zeta_{i_t}, b_{i_t})$ in $\mathcal{S}$ con $b_{i_0}, b_{i_1}, \dots, b_{i_t}$ linearmente dipendenti. i.e.

$$n_0 b_{i_0} + \cdots n_t b_{i_t} = 0 \tag{63}$$

per opportuni interi $n_0, \dots, n_t$.

Possiamo anche assumere che

$$\zeta_{i_0}^{n_0}\cdots\zeta_{i_t}^{n_t}\neq 1 \tag{64}$$

altrimenti possiamo ripetere la discussione precedente con $a = b_{i_0}$.

Come prima, poniamo $p = |n_0 \dots n_t|$, e prendiamo gli elementi , $d_h := \frac{b_{i_h}}{p/|n_h|}$ per ogni $h = 0, \dots, t$. La relazione (**??**) implica

$$\varepsilon_0 d_0 + \cdots + \varepsilon_t d_t = 0, \quad \epsilon_i = \pm 1. \tag{65}$$

Applichiamo come prima il Lemma (**??**), sostituendo ad x l'elemento $\eta_s x^{d_s}$, $n = p/|n_s|$, con η_s una radice n-esima di ζ_{i_s}, per ogni $0 \le s \le t$. Sostituendo in $1/D_{\mathcal{S}}$, otteniamo uno sviluppo di $1/D_{\mathcal{S}}$ come combinazione lineare di p^{t+1} termini ciascuno della forma:

$1/D_{\mathcal{S}'}$, dove $\mathcal{S}'$ è ottenuto da $\mathcal{S}$ sostituendo ogni coppia (ζ_{i_s}, b_{i_s}) con una coppia (η_s, d_s), η_s è una radice $p/|n_s|$-esima di ζ_{i_s}.

Dalla relazione (**??**) deduciamo che:

$$(\eta_0 x^{d_0})^{\varepsilon_0}\cdots(\eta_t x^{d_t})^{\varepsilon_t} = \alpha x^0 = \alpha \neq 1. \tag{66}$$

Possiamo ora applicare la formula (**??**) del Lemma **??** (con $t = (\eta_0 d_0)^{-\varepsilon_0}$) e esprimere $1/D_{\mathcal{S}'}$ come combinazione lineare di elementi della forma $1/D_{\mathcal{S}''}$ dove la cardinalità di $\mathcal{S}''$ è strettamente minore di quella di $\mathcal{S}'$.

Una semplice induzione completa la prova della Proposizione. □

La formula di inversione

Completiamo la dimostrazione della formula di inversione, nel caso aritmetico, seguendo molto da vicino la dimostrazione data in [**?**].

La situazione è la seguente:

- abbiamo una forma lineare ϕ con $\langle \phi, \alpha_i \rangle > 0$, $\forall i$.
- Ponendo $v_i := \frac{\alpha_i}{\langle \phi, \alpha_i \rangle}$, i vettori $\Psi := \{v_i\}$ generano lo spazio vettoriale $r-$dimensionale V e giacciono nell'iperpiano affine Π di equazione $\langle \phi, x \rangle = 1$.
- L'intersezione del cono $C(\Psi) = C(\Delta)$ con Π è il politopo convesso Σ inviluppo dei vettori v_i.
- Ogni cono, generato da $k + 1$vettori indipendenti in Ψ (o di Δ), interseca Π in un simplesso k dimensionale.

In definitiva abbiamo una configurazione di coni ottenuta proiettando una configurazione di simplessi e vi è un semplice dizionario per esprimere proprietà di coni in termini di simplessi e viceversa.

È ben noto che Σ è unione di simplessi con vertici vettori indipendenti di Ψ.

È naturale definire *regolare* un punto in Σ che non è contenuto in nessun simplesso $r - 2$ dimensionale (o nel cono corrispondente).

Le componenti connesse dell'insieme dei punti regolari vengono dette in [**?**] le *grandi celle*.

Completiamo l'insieme delle celle con le celle nel bordo ottenendo una stratificazione di Σ in celle e una stratificazione $\mathfrak{S}$ di $C(\Delta)$ in coni poliedrali.

Ricordiamo che da [**?**], Teorema 5.5 abbiamo.

Proposizione 30.1. *Due elementi di $C(\Delta)$ sono nello stesso cono di $\mathfrak{S}$ se e solo se sono contenuti nello stesso insieme di coni simpliciali generati da basi non spezzate.*

ossservazione 30.2. *Vi sono due aspetti interessanti di questo enunciato:*

- *mentre $\mathfrak{S}$ è definito intrinsecamente, le basi non spezzate dipendono da un ordinamento totale di Δ.*
- *Il secondo è la prova che le grandi celle sono convesse.*

Fissiamo una volta per tutte una orientazione dello spazio vettoriale $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ e prendiamo la r-forma invariante ω_T definita in (**??**).

Vogliamo lavorare ora su un toro U che riveste T:

il caso più importante è il toro $T_{1/m}$ che ha come gruppo dei caratteri $m^{-1}\Lambda$.

In coordinate:

- data una base di coordinate x_i per T possiamo scegliere una base di coordinate y_i per U con $x_i = y_i^m$.
- Dato un carattere $a \in \Lambda$ si ha $1 - x^a = 1 - (y^a)^m = \prod_{i=0}^{m-1}(1 - \zeta^i y^a),\ \zeta = e^{2\pi i/m}$.

La definizione (**??**) del residuo di Jeffrey–Kirwan: relativo ad una cella $\mathfrak{c}$, si applica anche alle funzioni $f \in R_U$ come:

$$JK(\mathfrak{c}, f) = (-1)^r \sum_P \sum_{\underline{b}} \epsilon_{\underline{b}} res_{\underline{b},P}(f\omega_U),$$

dove:

- P varia sui punti dell'arrangiamento in U che sono le controimmagini dei punti dell'arrangiamento in T
- e $\underline{b}$ sulle basi non spezzate in Δ_P per cui $\mathfrak{c} \subset C(\underline{b})$.

ossservazioni 30.3.

- *Si osservi che $JK(\mathfrak{c}, f)$ non dipende dalla scelta della orientazione.*
- *Segue dalla Proposizione* **??** *che $JK(\mathfrak{c}, \chi^{-1} f)$, come funzione di χ, è un polinomio periodico sulla cella $\mathfrak{c}$.*

Confronto fra residui

Dobbiamo confrontare due nozioni di residuo.

Lemma 30.4. *Se $\pi : U \to T$ è un rivestimento di grado n:*

$$\pi^*(\omega_T) = n\omega_U$$

DIM Dalla teoria dei divisori elementari, vi è una base orientata $\mu_1, \dots, \mu_r$ del gruppo dei caratteri M di U ed interi positivi $n_1, \dots, n_r$ tali che $n = \prod_i n_i$ e $\mu_1^{n_1}, \dots, \mu_r^{n_r}$ è una base del gruppo dei caratteri Λ di T.

Usando queste due basi l'asserto è chiaro. $\square$

- Sia $\psi = f\omega_T,\ f \in R_\Delta$ una forma su T.
- Sia $P \in U$ un punto e $Q = \pi(P)$,
- sia data una base non spezzata di caratteri $\underline{b} := (a_1, \dots, a_n),\ a_i \in \Delta_P \subset \Delta \subset \Lambda$.

Poichè $\Lambda \subset M$ abbiamo anche che $\Delta_P = \Delta_Q$ ha quindi senso e vale l'enunciato:

Corollario 30.5.

$$res_{\underline{b},P}\pi^*(\psi) = res_{\underline{b},Q}\psi$$

DIM Componiamo con π l'applicazione che descrive un intorno di P in coordinate logaritmiche.

Dalla proposizione (**??**), i numeri $res_{\underline{b},Q}\psi$ sono i coefficienti della classe di ψ rispetto alle classi delle forme $\Omega_{\underline{b}}(T) = d\log(1 - x^{a_1}) \wedge \cdots \wedge d\log(1 - x^{a_n})$ (notare che abbiamo aggiunto T nella notazione).

Basta dunque osservare che $\pi^*(\Omega_{\underline{b}})(T) = \Omega_{\underline{b}}(U)$. $\square$

Lemma 30.6. *Sia $\pi : U \to T$ un rivestimento finito di T di grado m. Sia $f \in R_T$ allora $f \circ \pi \in R_U$, e*

$$JK(\mathfrak{c}, f) = JK(\mathfrak{c}, f \circ \pi) \tag{67}$$

DIM Un circuito non spezzato $\underline{b}$ associato ad un punto P in T è anche associato ad ogni punto in $\pi^{-1}(p)$ in U.

In questo modo otteniamo tutti i punti in U associati a $\underline{b}$.

Dalla definizione di residuo locale e dal Lemma **??**, deduciamo che, se $Q \in \pi^{-1}(P)$

$$res_{\underline{b},Q}(f\omega_U) = m^{-1} res_{\underline{b},P}(f\omega_T).$$

Poiché $m = |\pi^{-1}(P)|$ tutto segue. $\square$

Consideriamo una base non spezzata $\underline{b} := \{a_1, \dots, a_n\} \subset \Delta$, elementi compatibili $\{(\zeta_1, b_1), \dots, (\zeta_n, b_n)\}$, con $n_i b_i = a_i,\ \zeta_i^{n_i} = 1$.

Sia m il minimo comune multiplo degli n_i e poniamo $U := T_{1/m}$. U è un toro che riveste T e su cui gli elementi b_i sono caratteri.

Sia $\mu = \prod_i (x^{b_i})^{k_i}$ con $0 < k_i \in \mathbb{N}$ e la funzione su U:

$$\gamma := \frac{1}{\prod_{i=1}^k (1 - \zeta_i x^{b_i})},\ i = 1, \dots, n.$$

Lemma 30.7. *(1) Il coefficiente di μ nella espansione in serie di γ è:*

$$(-1)^r \epsilon_{\underline{b}} \sum_P res_{\underline{b},P}(\mu^{-1}\gamma\omega), \tag{68}$$

dove P giace nell'insieme E finito dei punti di U definiti dalle equazioni $1-\zeta_i x^{b_i}=0,\ i=1,\dots,n$.

In particolare se $k<r$ entrambi i termini sono zero.

Il coefficiente di μ nella espansione in serie di γ è:

(2) Se $b:=\sum_i k_i b_i$ è regolare e $\mathfrak{c}$ è l'unica cella contenente b,

$$(-1)^r\epsilon_{\underline{b}}\sum_P res_{\underline{b},P}(\mu^{-1}\gamma\omega)=JK(\mathfrak{c},\mu^{-1}\gamma).$$

Dove la somma è sull'insieme dei P in E. Se $b:=\sum_i k_i b_i$ è regolare e $\mathfrak{c}$ è l'unica cella contenente b.....

DIM 1) Poniamo $\psi_i=x^{a_i}$ una base di caratteri per un toro S rivestito da T.

Dal Lemma **??** la parte destra della formula (**??**) è indipendente dal toro su cui i caratteri ψ_i sono definiti.

Per definizione lo stesso è vero per il coefficiente di μ.

Possiamo quindi ridurci al toro S per cui $\underline{b}$ è una base del gruppo dei caratteri.

In questo caso, vi è un unico punto P associato a $\underline{b}$.
Inoltre $\omega=\epsilon_S d\log\psi_1\wedge\cdots\wedge d\log\psi_r$.

Ora possiamo separare le variabili e ridurci al caso 1 dimensionale. Questo è un caso elementare del knapsack problem
(si veda §1.1 o [**?**]).

2) Applichiamo prima di tutto la Teoria svolta nel caso in cui Δ si riduca alla sola base $\underline{b}$ e la cella sia $C(\underline{b})$ (un caso degenere).

In U e nelle coordinate y_i con $x_i=y_i^m$ i punti di questo arrangiamento sono quelli per cui $y^{ma_i}=1,\ \forall i$.

Vediamo allora che:

$$JK(C(\underline{b}),\mu^{-1}\gamma)=(-1)^r\epsilon_{\underline{b}}\sum_P res_{\underline{b},P}(\mu^{-1}\gamma\omega).$$

Per ridurci al caso degenere basta provare che, se $(\underline{b}',Q)$ non è una delle coppie $(\underline{b},P),\ \psi_i(P)=1$, allora $res_{\underline{b}',Q}(\gamma\omega)=0$.

Se $Q\neq P$ almeno uno dei fattori $1-a_i\psi_i$ è olomorfo in Q e la forma di cui dobbiamo calcolare il residuo è esatta.

Supponiamo ora che $P=Q$ vogliamo di nuovo usare il caso degenere.
Consideriamo, in coordinate logaritmiche intorno a P, la forma $\mu^{-1}\gamma\omega$.

È evidente che tale forma ha poli sono negli iperpiani $(a_i,\theta)=0$ corrispondenti ai caratteri ψ_i.

In questo arrangiamento di iperpiani abbiamo una sola classe di coomologia nel corrispondente aperto $A_{\underline{b}}$:

quella della forma $d\log(a_1,\theta)\wedge\cdots\wedge d\log(a_n,\theta)$, pertanto in tale arrangiamento e per definizione, la classe di coomologia della forma $\mu^{-1}\gamma\omega$ coincide con:

$$res_{\underline{b},P}(\mu^{-1}\gamma\omega)d\log(a_1,\theta)\wedge\cdots\wedge d\log(a_n,\theta).$$

L'aperto complementare dell'intero arrangiamento contiene l'aperto $A_{\underline{b}}$ e pertanto anche in questo aperto la classe di coomologia della forma $\mu^{-1}\gamma\omega$ coincide con $res_{\underline{b},P}(\mu^{-1}\gamma\omega)d\log(a_1,\theta)\wedge\cdots\wedge d\log(a_n,\theta)$.

Questo è equivalente a dire che gli altri residui sono tutti nulli. □

Il Teorema principale

Teorema 30.2. *Sia*

$$f := \frac{1}{\prod_{(a,\chi)\in\Delta}(1-a\chi)^{h_{a,\chi}}},\ \ h_{a,\chi}\in\mathbb{N}$$

Se β è nella chiusura di una cella $\mathfrak{c}$:

$$c_\beta = res(\beta^{-1}f\omega) = JK(\mathfrak{c},\beta^{-1}f) \tag{69}$$

DIM Usando il Lemma **??**, possiamo passare ad un rivestimento finito U di T.

¡3,2¿ Per un opportuno rivestimento possiamo trovare un carattere ξ tale che $\beta\xi$ giace nell'interno di $\mathfrak{c}$ e la funzione ξf ha una espansione come nella Proposizione **??**.

Fatto questo, ci riduciamo a dimostrare la identità per ogni singolo termine di questa espansione. Scriviamo $\beta^{-1}f = (\beta\xi)^{-1}\xi f$.

Conclusione Poiché ogni termine della espansione di ξf soddisfa le ipotesi del precedente lemma con $\mu = \beta\xi$ il risultato segue. □

Osservazioni: Dall'osservazione dopo la definizione **??** segue che, nelle condizioni precedenti, c_β come funzione di β è un polinomio periodico.

Questo polinomio ha anche una notevole proprietà di continuità.

Infatti, se β è nel bordo di due differenti celle, vi sono due possibili polinomi periodici su queste celle che coincidono sulla intersezione delle loro chiusure, in particolare su β.

Lezione.13 Frazioni parziali su un toro

31: Frazioni parziali

Abbiamo già notato una difficoltà.

Dati k caratteri $a_1,\dots,a_k$ linearmente indipendenti, essi generano un sottogruppo Λ che non coincide con la sua chiusura (rispetto alla torsione) $\overline{\Lambda}$.

Cambiando le coordinate il sottogruppo Λ può essere generato dai caratteri corrispondenti ai monomi $x_i^{d_i},\ i=1,\dots,k$.

Lemma 31.1. *Vogliamo provare che l'anello $A_T/(1-x_1^{d_1},\dots,1-x_k^{d_k})$ si decompone in una somma diretta di $d_1d_2\dots d_k$ anelli e determinare gli elementi unità di tali anelli (gli idempotenti primitivi).*

Idempotenti primitivi

Trattiamo prima di tutto il caso: $\mathbb{C}[x,x^{-1}]/(1-x^d)=\mathbb{C}[x]/(1-x^d)$.

Sia $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{d}}$, l'omomorfismo $\pi : p(x)\mapsto (p(1),p(\zeta),\dots,p(\zeta^h),\dots,p(\zeta^{d-1})$ stabilisce un isomorfismo fra $\mathbb{C}[x]/(1-x^d)$ e $\mathbb{C}^d$.

Consideriamo i d elementi $e_h(x) := \frac{1}{d}\sum_{j=0}^{d-1}\zeta^{-hj}x^j,\ 0\le h<d$ abbiamo:

$$e_h(\zeta^k)=\frac{1}{d}\sum_{j=0}^{d-1}\zeta^{(-h+k)j}=\begin{cases}0 & \text{se} \quad h\neq k\\ 1 & \text{se} \quad h\neq k\end{cases}$$

Segue che $e_h(x)$ è un rappresentante dell'$h+1-$esimo idempotente primitivo e_h di $\mathbb{C}[x]/(1-x^d)=\mathbb{C}^d$.

Da questo si vede facilmente che:

Lemma 31.2. *i prodotti:*

$$e_{h_1,\dots,h_k}(x_1,\dots,x_k) := \prod_{i=1}^k e_{h_i}(x_i),\ 0\le h_i<d_i$$

sono rappresentanti dei $d_1d_2\dots d_k$ idempotenti primitivi di

$$A_T/(1-x_1^{d_1},\dots,1-x_k^{d_k})=A_{T_{n-k}}^{d_1d_2\dots d_k}.$$

Esplicitamente questo isomorfismo si può ottenere con l'applicazione di coordinate $p(x_1,\dots,x_n)\mapsto p(\zeta_1^{h_1},\zeta_2^{h_2},\dots,\zeta_k^{h_k},x_{k+1},\dots,x_n)$.

NOTA I rappresentanti che abbiamo costruito dipendono dal sistema di coordinate scelto per normalizzare la presentazione di Λ.

Si noti che: Nel quoziente $\mathbb{C}[x]/(1-x^d)$ si ha $xe_h=\zeta^h e_h$ mentre per il rappresentante:

$$xe_h(x)=\frac{1}{d}\sum_{j=0}^{d-1}\zeta^{-hj}x^{j+1}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d-1}\zeta^{-h(k-1)}x^k+x^d=x^d-1+\zeta^h e_h(x).$$

$$x^{-1}e_h(x)=x^{-1}(x^d-1)+\zeta^{-h}e_h(x).$$

$$\sum_{h=0}^{d-1}e_h(x)=\frac{1}{d}\sum_{j=0}^{d-1}[\sum_{h=0}^{d-1}\zeta^{-hj}]x^j=1. \tag{70}$$

Da cui in generale per un elemento $e_{h_1,\dots,h_k}(x_1,\dots,x_k)$:

$$x_ie_{h_1,\dots,h_k}(x_1,\dots,x_k)=\zeta_i^{h_i}e_{h_1,\dots,h_k}(x_1,\dots,x_k)+(x_i^{d_i}-1)\prod_{j\neq i}e_{h_j}(x_j).$$

Ci sarà utile una semplice variazione di questa analisi, prendiamo k numeri non nulli α_i e consideriamo $A_T/(\alpha_1 - x_1^{d_1}, \dots, \alpha_d - x_k^{d_k})$.

Per ogni i abbiamo d_i possibili numeri $\beta_{i,j},\ j = 1, \dots, d_i$ con $\beta_{i,j}^{d_i} = \alpha_i$.

Abbiamo facilmente che:

$$A_T/(\alpha_1 - x_1^{d_1}, \dots, \alpha_d - x_k^{d_k}) = \oplus_{j_1, j_2, \dots, j_k} A_T/(\beta_{1,j_1} - x_1, \dots, \beta_{k,j_k} - x_k). \tag{71}$$

La dimostrazione si può fare scegliendo per ogni i un particolare β_i con $\beta_i^{d_i} = \alpha_i$ e facendo il cambiamento di coordinate $x_i := \beta_i y_i$ per cui ci si riduce al caso precedente.

È conveniente pensare in modo geometrico.

- Dati k caratteri $a_1, \dots, a_k$ linearmente indipendenti, che generano un sottogruppo Λ, la sottovarietà W dove essi valgono 1 dipende solo da Λ.
- W è formata da d componenti $W_1, \dots, W_d$, disgiunte dove d è l'indice di Λ in $\overline{\Lambda}$.
- Gli elementi $e_i(x)$ prima definiti hanno la proprietà di valere 1 sulla componente W_i e 0 sulle altre component.

Naturalmente questo non determina univocamente la funzione $e_i(x)$ ma solo a meno di funzioni che svaniscono su $W = \cup_{i=1}^d W_i$.

Possiamo ora provare il primo lemma di riduzione utile per arrivare a formulare il teorema di espansione in frazioni parziali.

Questo lemma è l'analogo periodico del lemma (**??**):

Lemma 31.3. *Data una lista di elementi* $a_i \in \mathbb{Z}^n$ *(con possibili ripetizioni)* $\Psi = \{a_1, \dots, a_m\}$, *il prodotto*

$$\prod_{i=1}^m \frac{1}{(1 - x^{a_i})}$$

può essere scritto come combinazione lineare di elementi

$$\frac{x^\gamma}{(1 - x^{a_{i_1}})^{h_1} \cdots (1 - x^{a_{i_r}})^{h_r}}$$

dove:

- $(a_{i_k}) \in \Psi$ *per ogni* $k = 1, \dots, r$
- $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ *sono linearmente indipendenti.*

Prova del Lemma

DIM Con una semplice induzione possiamo assumere che $\Psi = \{a_0, \dots, a_r\}$ con $a_0, \dots a_r$ linearmente dipendenti e $a_1, \dots a_r$ linearmente indipendenti e che $\{a_0, \dots, a_r\}$ generino (cambiando coordinate) $\mathbb{Z}^r$.

La difficoltà può essere data dal fatto che invece $\{a_1, \dots, a_r\}$ possono generare un sottoreticolo di un qualche indice finito m.

Questo dipende dal fatto che la relazione di dipendenza sarà del tipo $ma_0 = \sum_{i=1}^r c_i a_i,\ m, c_i \in \mathbb{Z}$.

Scegliamo (come nel paragrafo precedente) rappresentanti $e_i(x) \in A_T$ degli idempotenti primitivi e_i di $A_T/(1-x^{a_1}, \dots, 1-x^{a_r})$.

In questo anello avremo $x^{a_0} e_i = \beta_i e_i$ con $\beta_i \in \mathbb{C}^*$. Per definizione degli elementi $e_i(x)$ (cf. **??**), abbiamo $1 = \sum_i e_i(x)$ quindi:

$$\frac{1}{(1-x^{a_0})\cdots(1-x^{a_r})} = \sum_i \frac{e_i(x)}{(1-x^{a_0})\cdots(1-x^{a_r})}.$$

Analizziamo dunque un termine

$$\frac{e_i(x)}{(1-x^{a_0})\cdots(1-x^{a_r})}.$$

Abbiamo che $(1-x^{a_0})e_i(x) = \sum_{j=1}^r c_j(1-x^{a_j}) + (1-\beta_i)e_i(x),\ c_j \in A_T$, separiamo due casi.

Primo caso $\beta_i = 1$

Se $\beta_i = 1$, abbiamo $(1-x^{a_0})e_i(x) = \sum_{j=1}^r c_j(1-x^{a_j})$ e sostituendo:

$$\frac{e_i(x)}{(1-x^{a_0})\cdots(1-x^{a_r})} = \frac{\sum_{j=1}^r c_j(1-x^{a_j})}{(1-x^{a_0})^2(1-a_1a_1)\cdots(1-x^{a_r})}$$

otteniamo una somma di termini in cui nel denominatore qualche fattore $1-x^{a_j}$ è sparito.

Secondo caso $\beta_i \neq 1$

Se $\beta_i \neq 1$, abbiamo $e_i(x) = (1-\beta_i)^{-1}[(1-x^{a_0})e_i(x) - \sum_{j=1}^r c_j(1-x^{a_j})]$

$$\frac{e_i(x)}{(1-x^{a_0})\cdots(1-x^{a_r})} = (1-\beta_i)^{-1}\frac{(1-x^{a_0})e_i(x) - \sum_{j=1}^r c_j(1-x^{a_j})}{(1-x^{a_0})\cdots(1-x^{a_r})},$$

e tutto segue per induzione. $\square$

Questa non è ancora la forma finale in cui vogliamo sviluppare in frazioni parziali. Vogliamo ulteriormente operare una una riduzione sui termini x^γ nel numeratore.

Supponiamo di prendere n elementi indipendenti $a_1, \dots, a_n$ che generano in $\mathbb{Z}^n$ un sottoreticolo di indice m. Scegliamo m rappresentanti di tale sottoreticolo $\xi_1, \dots, \xi_m$.

Prendiamo ora una qualunque frazione del tipo

$$\frac{x^\gamma}{\prod_{i=1}^n (1-x^{a_i})^{h_i}}.$$

Scriviamo $\gamma = \xi_i + \sum_{j=1}^n c_j a_j,\ c_j \in \mathbb{Z}$. Vogliamo manipolare la frazione:

$$\frac{x^{\sum_{j=1}^n c_j a_j}}{\prod_{i=1}^n (1-x^{a_i})^{h_i}}.$$

Per questo notiamo che per una variabile t abbiamo:

$$\frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t} - 1, \ \frac{t^{-1}}{1-t} = \frac{1}{1-t} + t^{-1}.$$

Ne segue per induzione (applicata a $t = x^{a_i}$) che:

Lemma 31.4. $\frac{x^{\sum_{j=1}^n c_j a_j}}{\prod_{i=1}^n (1-x^{a_i})^{h_i}}$ *si può espandere come combinazione lineare a coefficienti costanti di termini del tipo* $\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1-x^{a_i})^{k_i}}$, $k_i \leq h_i$ *più termini del tipo* $\frac{x^\beta}{\prod_{i=1}^n (1-x^{a_i})^{k_i}}$ *in cui però almeno uno dei* $k_i = 0$.

Questo Lemma non fornisce ancora una forma normale delle frazioni parziali e lo riprendiamo in seguito.

Per completare la costruzione di una espressione in frazioni parziali per ogni funzione di $R_\Delta := A_T[(\prod_{i=1}^m (1 - x^{a_i})^{-1}]$ ci serve una nozione ulteriore.

Prendiamo dunque un insieme di elementi linearmente indipendenti $S := b_1 := a_{i_1}, \dots, b_d := a_{i_d}$, estratto dalla lista $\Delta := \{a_1, \dots, a_m)\}$.

Fissiamo inoltre una componente W della varietà di equazioni $1 - x^{b_i} = 1, \ i = 1, \dots, d$.

Definizione 20. *Diremo che S è un circuito non spezzato su W se S è un circuito non spezzato relativamente al sottoinsieme:*

$$\Delta_W := \{a_i \in \Delta \,|\, x^{a_i} = 1, \quad su \quad W\}.$$

Dato un tale S, possiamo scegliere coordinate per i caratteri e quindi coordinate $z_1, \dots, z_n$ per il toro in modo tale che:

- il reticolo generato da $S := b_1, \dots, b_d$ abbia indice finito m_S nel reticolo in cui le ultime $n - d$ coordinate sono nulle,
- ovvero i monomi x^{b_k} nelle nuove coordinate sono della forma z^{c_i} nelle prime k coordinate z_i.

Chiameremo le coordinate $z_{d+1}, \dots, z_n$ un insieme di coordinate complementari.

I mattoni della decomposizione

Abbiamo visto che l'anello $\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_d^{\pm 1}]/(1-z^{c_1}, \dots, 1-z^{c_d}) = \oplus_{i=1}^{m_S} \mathbb{C} e_i$ con e_i idempotenti primitivi ed abbiamo dato un metodo per costruirne dei rappresentanti $e_i(z)$.

- Sia $A_S = \mathbb{C}[z_{d+1}^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ l' anello dei polinomi di Laurent nelle ultime coordinate.
- Dato S ed uno degli idempotenti e_i sia W la componente irriducibile di $x^{b_i} = 1$ che corrisponde ad e_i.
- Useremo anche la notazione $e_W = e_i(x)$.

Definizione 21. *Definiamo*

$$R_{S,W} := \{f \in R_\Delta \mid f = \frac{g e_W}{\prod_{j=1}^d (1 - x^{b_j})^{m_j}} \mid g \in A_S,\ m_j > 0,\ \forall j.\}$$

Questi spazi sono i mattoni per costruire la espansione cercata.

Teorema 31.1. *(1) Lo spazio $R_{S,i}$ ha come base i monomi*

$$\frac{z_{d+1}^{h_{d+1}} \dots z_n^{h_n} e_i(z)}{\prod_{j=1}^d (1 - x^{b_j})^{m_j}} \mid h_i \in \mathbb{Z},\ m_j > 0,\ \forall i, j.$$

(2) $R_\Delta = \oplus_S R_{S,W}$ al variare di W e di S fra i circuiti non spezzati relativamente a W.

1) DIM Dimostriamo almeno una parte del teorema lasciando di completarlo nella Lezione **??**, sezione **??**.

Poniamo $u_i := x^{b_i}$. Gli elementi $u_1, \dots, u_d, z_{d+1}, \dots, z_n$ sono chiaramente algebricamente indipendenti ossia generano un anello di polinomi.

Quindi anche gli elementi $1 - u_1, \dots, 1 - u_d, z_{d+1}, \dots, z_n$ generano un anello di polinomi e R_S è contenuto nell'anello dei polinomi di Laurent in tali variabili.

Tali polinomi hanno come base tutti i monomi nelle variabili con esponenti interi.

I monomi proposti sono dunque parte di questa base e quindi linearmente indipendenti.

2) Applichiamo prima di tutto il lemma (**??**) da cui segue che ogni funzione in R_Δ si può scrivere come combinazione lineare di espressioni

$$f = \frac{g}{\prod_{j=1}^d (1 - x^{b_j})^{m_j}} \mid g \in A_T,\ m_j > 0,\ \forall j$$

e $S := b_1 := a_{i_1}, \dots, b_d := a_{i_d}$ linearmente indipendenti.

Per un dato termine $\frac{g}{\prod_{j=1}^d (1 - x^{b_j})^{m_j}}$ facciamo il precedente cambiamento di variabili $z_1, \dots, z_n$ e, sviluppando, riduciamoci al caso in cui $g = \prod_{i=1}^n z_i^{h_i}$ è un monomio.

Ora applichiamo il Lemma (**??**) ed arriviamo ad una somma di termini del tipo $f = \frac{g\xi}{\prod_{j=1}^d (1 - x^{b_j})^{m_j}} \mid g \in A_T,\ m_j > 0,\ \forall j$ con $S := b_1, \dots, b_d$ linearmente indipendenti che generano un qualche reticolo Λ, ξ un rappresentante di $\overline{\Lambda}/\Lambda$ e g un monomio nelle variabili complementari.

Utilizziamo ora il fatto che lo spazio vettoriale che ha come base i rappresentanti ha anche come base gli elementi e_W al variare di W fra le componenti di $x^{b_i} = 1,\ i = 1, \dots, d$ e riscriviamo la somma come termini del tipo $f = \frac{g e_W}{\prod_{j=1}^d (1 - x^{b_j})^{m_j}} \mid g \in A_T,\ m_j > 0,\ \forall j.$

Ora sia $S := b_1, \ldots, b_d$ un circuito spezzato relativamente a W componente della varietà V di equazioni $x^{b_i} = 1$. Esiste e con $1 \le e \le d$ ed un b che precede $b_e, \ldots, b_d$ è linearmente dipendente da essi e vale 1 su W.

Osserviamo che e^b è costante sulle componenti connesse della varietà V_e di equazioni $x^{b_i} = 1,\ i = e, \ldots, d$ in particolare deve valere 1 su quella unica componente Z che contiene W.

Consideriamo dunque un rappresentante e_Z (relativo a $b_e, \ldots, b_d$)e che vale 1 su Z e 0 sulle altre componenti della varietà V_e.

Segue che l'elemento $e_W e_Z$ coincide con e_W come funzione sulla varietà V. Ovvero $e_W = e_W e_Z + \sum_i c_i(1 - x^{b_i}),\ c_i \in A_T$.

Pertanto l'elemento $\frac{e_W}{\prod_{j=1}^d (1-x^{b_j})} = \frac{e_W e_Z}{\prod_{j=1}^d (1-x^{b_j})}$ modulo termini in cui almeno uno dei fattori $(1-x^{b_j})$ è cancellato dal denominatore possiamo quindi sostituire per induzione ed assumere che $e_W = e_W e_Z$.

Abbiamo che $(1 - x^b)e_Z$ svanisce su tutta la varietà V_e e quindi si può scrivere come:

$$(1 - x^b)e_Z = \sum_{i=e}^{d} g_i(1 - x^{b_i}),\ g_i \in A_T$$

Ne segue che:

$$\frac{e_W}{\prod_{j=1}^d (1 - x^{b_j})} = \frac{e_W(1 - x^b)e_Z}{(1 - x^b)\prod_{j=1}^d (1 - x^{b_j})} = \frac{e_W(\sum_{i=e}^d g_i(1 - x^{b_i}))}{(1 - x^b)\prod_{j=1}^d (1 - x^{b_j})}$$

è una somma di termini in cui al denominatore un fattore $(1 - x^{b_i})$ viene sostituito da un fattore $(1 - x^b)$.

Ora ordinando lessicograficamente le sequenze linearmente indipendenti $b_1, \ldots, b_d$ estratte da Δ, abbiamo provato che una frazione in cui appare al denominatore una sequenza spezzata può essere sostituita con una somma in cui appaiono al denominatore sequenze strettamente inferiori lessicograficamente.

Iterando questa procedura arriviamo dunque ad avere al denominatore solo sequenze non spezzate.

Pertanto i monomi che proponiamo generano linearmente lo spazio.

Il fatto che siano una base, ovvero che la somma sia diretta verrà provato in **??**.

ossservazione 31.5. *In una sezione successiva dovremo effettuare un cambiamento di base su R_Δ a partire da questa base trovata.*

Il cambiamento sarà triangolare relativamente ad un ordinamento parziale che ora precisiamo.

Presi due elementi $M_1 := \frac{z_{d+1}^{h_{d_1+1}} \ldots z_n^{h_n} e_i(z)}{\prod_{j=1}^{d_1} (1-x^{b_j})^{m_j}},\ M_2 := \frac{w_{d+1}^{h_{d_2+1}} \ldots w_n^{h_n} e_i(w)}{\prod_{j=1}^{d_2} (1-x^{c_j})^{n_j}}$ diremo che:

$M_1 < M_2$ se $d_1 < d_2$ ovvero se $d_1 = d_2$ e $\sum_j m_j < \sum_i n_i$.

I cambiamenti di base triangolari sono quelli che rimpiazzano un monomio M con un multiplo non nullo di M più una somma di monomi strettamente inferiori in questo ordinamento.

La precedente espansione in frazioni parziali fornisce un algoritmo per calcolare i coefficienti dello sviluppo di una funzione in R_Δ:

$$F := \frac{f}{\prod_{i=1}^m (1 - x^{a_i})^{m_i}} = \sum_{b \in C(A)} S_F(b) e^b.$$

Infatti espandendo in frazioni parziali ci si riduce ai termini del tipo $\frac{x^b}{\prod_{i=1}^d (1 - ^{b_i})^{m_i}}$ con i b_i linearmente indipendenti per cui si ha:

$$\prod_{i=1}^n \frac{x^b}{(1 - x^{b_i})^{m_i}} = \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_n} \prod_{i=1}^n \binom{m_i - 1 + h_i}{h_i} x^{\sum_{i=0}^n h_i b_i + b} \tag{72}$$

Il tipo di funzioni che otteniamo è dunque la somma di funzioni che sono polinomiali sui punti di un traslato di un reticolo che giacciono sul traslato di un cono.

Nel caso della funzione generatrice ($f = 1$) però il teorema è molto più preciso in quanto abbiamo visto che $S_A(b)$ è un quasi polinomio sulla chiusura di ogni cella. Questo è anche una specie di continuità in versione discreta.

32: Frazioni parziali finali

Per le analisi che vogliamo fare conviene riformulare il Teorema di espansione in frazioni parziali **??** in modo diverso. Vogliamo definire una nuova serie di spazi che decompongono R_Δ ciascuno con una base precisa e infine (la nuova condizione) ciascuno stabile rispetto alla azione di tutte le derivate.

Riprendiamo le notazioni del Teorema **??** Prendiamo dunque una lista $S := \{b_1, \ldots, b_d\}$ estratta da Δ. Una componente irriducibile W della varietà di equazioni $x^{b_i} = 1$ e sia e_i l'idempotente che corrisponde a W. Useremo anche la notazione $e_W = e_i(x)$. Sia $z_1, \ldots, z_d, z_{d+1}, \ldots, z_n$ un sistema di coordinate adattate ad S.

Anche se la discussione vale in generale possiamo restringerci al caso in cui S sia un circuito non spezzato su W.

Definiamo il seguente anello di operatori differenziali:

$$D_S := \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_d}, z_{d+1}^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}].$$

Osserviamo che, dato che le variabili sono distinte questa algebra di operatori è *commutativa.*

Inoltre D_S è un modulo sull'algebra di tutti gli operatori differenziali a coefficienti costanti.

Definiamo

$$Z_{S,W} := D_S \frac{e_W}{\prod_{j=1}^d (1-x^{b_j})}.$$

Teorema 32.1. *(1) $Z_{S,W}$ è un D_S modulo libero con base l'elemento* $\frac{e_W}{\prod_{j=1}^d (1-x^{b_j})}$.

(2) ¡2,6-¿Abbiamo una decomposizione in somma diretta:

$$R_\Delta = \oplus_{W,S} Z_{S,W}$$

al variare di W nelle componenti dell'arrangiamento e di S nei corrispondenti circuiti non spezzati.

DIM 1) La chiave consiste nel capire come opera un monomio negli operatori $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_d}$ sull'elemento $\frac{e_W}{\prod_{j=1}^d (1-x^{b_j})}$.

Una prima derivata fornisce:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{e_W}{\prod_{j=1}^d (1-x^{b_j})} =$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z_i} e_W}{\prod_{j=1}^d (1-x^{b_j})} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial x^{b_j}}{\partial z_i} \frac{e_W}{\prod_{h=1}^{i-1} (1-x^{b_h})(1-x^{b_j})^2 \prod_{h=j+1}^d (1-x^{b_h})}.$$

Calcoliamo in parte

$$\sum_{j=1}^d \frac{\partial x^{b_j}}{\partial z_i} \frac{e_W}{\prod_{h=1}^{i-1} (1-x^{b_h})(1-x^{b_j})^2 \prod_{h=j+1}^d (1-x^{b_h})}$$

Espandendo questa derivata, otteniamo un termine dominante un multiplo non nullo di $\frac{e_W}{\prod_{h=1}^{i-1} (1-x^{b_h})(1-x^{b_j})^2 \prod_{h=j+1}^d (1-x^{b_h})}$ più altri termini che possiamo considerare inferiori in un opportuno ordinamento degli elementi che sono una base di R_Δ.

Questo prova la prima parte.

2) Per provare la seconda parte ci baseremo sulla teoria dei $D-$ moduli in una prossima Lezione.

Il residuo totale e la coomologia di grado massimo

Per capire il residuo totale e la coomologia di grado massimo osserviamo che:

Proposizione 32.1. *D_S è somma diretta del sottospazio generato applicando le derivate e dello spazio 1-dimensionale generato da $\prod_{i=d+1}^n z_i^{-1}$.*

Come corollario ne deduciamo per induzione che:

Corollario 32.2. *un complemento allo spazio generato applicando derivate agli elementi di R_Δ ha come base gli elementi:*

$$\omega_{S,W} := \prod_{i=d+1}^{n} z_i^{-1} \frac{e_W}{\prod_{j=1}^d (1 - x^{b_j})}.$$

Pertanto le classi delle forme $\omega_{S,W}\omega_T$ sono una base della coomologia.

Lezione 14. $D-$moduli II

33: Moduli

Per capire la indipendenza lineare della espansione in frazioni parziali nel caso torico svilupperemo un'analogo torico della teoria dei $D-$moduli di **??**.

L'algebra degli operatori differenziali che vogliamo utilizzare è l'algebra degli operatori con coefficienti le funzioni regolari sul toro, ovvero in coordinate i polinomi di Laurent $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Chiamiamo tale algebra *l'algebra di Weyl periodica* pensando al cambiamento di coordinate $x_i = e^{\theta_i}$,) e denotarla $\tilde{W}(n)$.

$\tilde{W}(n)$ ha come base gli elementi:

$$x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n},\ h_i \in \mathbb{Z},\ k_i \in \mathbb{N}.$$

ossservazione 33.1. *Non è necessario mettere in testa tutte le variabili e poi tutte le derivate, in seguito sarà utile mettere in altri ordini variabili e derivate anche alternando variabili con derivate. Dalle regole di commutazione tutte queste sono basi ottenute con cambiamenti di base di tipo triangolare.*

Prendiamo ora d monomi x^{a_i} dove $S := \{a_1, \dots, a_d\} \subset \mathbb{Z}^n$ è un insieme di $d-$ vettori a coordinate intere e linearmente indipendenti.

Consideriamo ora gli operatori lineari differenziali a coefficienti costanti che annullano tali monomi:

$$D_S := \{\sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mid \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial x^{a_i}}{\partial x_j} = 0,\ i = 1, \dots, d\} \tag{73}$$

Lemma 33.2. *(1) D_S è uno spazio vettoriale di dimensione $n-d$.*

In un sistema di coordinate adattate z_i per cui i vettori a_i hanno le ultime $n-d$ coordinate uguali a 0 abbiamo che D_S ha come base gli operatori $\frac{\partial}{\partial z_i}$, $i = d+1, \dots, n$.

DIM Evidentemente $2 \implies 1$ e quindi proviamo 2.
In un tale sistema abbiamo che i monomi associati ad S sono della forma

$$\prod_{i=1}^{d} z_i^{a_{ij}},\ j = 1, \dots, d$$

con la matrice a_{ij} a determinante non nullo.
Si ha

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \prod_{i=1}^{d} z_i^{a_{ij}}}{\partial z_j} = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j a_{i,j} \prod_{i=1}^{d} z_i^{a_{ij}} z_j^{-1}.$$

Pertanto se $D := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in D_S$ si deve avere

$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j a_{i,j} z_j^{-1} = 0,\ \forall i.$$

Essendo la matrice degli $a_{i,j}$ invertibile questo vuol dire che $D = \sum_{j=d+1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial z_j}$.

- (2) Preso $S = \{a_1, \dots, a_d\}$ come prima sia Λ o Λ_S per precisione, il reticolo che essi generano.
- Prendiamo d numeri $\alpha_i \in \mathbb{C}$ che pensiamo anche come un carattere moltiplicativo $\phi : \Lambda \to \mathbb{C}^*$, $\phi(a_i) = \alpha_i$.
- Vogliamo ora definire un $D-$modulo $N_{S,\phi}$ associato ad S e a ϕ. Per definizione questo è il

$\tilde{W}(n)$ modulo ciclico generato da un elemento u_S soggetto alle relazioni:

$$x^a u_S = \phi(a_i) u_S,\ \forall a \in S,\ D u_S = 0,\ \forall D \in D_S. \tag{74}$$

Lemma 33.3. *(1) $N_{S,\phi}$ dipende solo dal reticolo Λ e da ϕ.*
Lo denoteremo $N_{\Lambda,\phi}$

(2) $N_{\Lambda,\phi}$ è irriducibile se $\Lambda = \overline{\Lambda}$.

(3) In generale $N_{\Lambda,\phi} = \oplus_\psi N_{\overline{\Lambda},\psi}$, dove ψ varia fra gli $m = [\overline{\Lambda} : \Lambda]$ caratteri moltiplicativi $\psi : \overline{\Lambda} \to \mathbb{C}^*$ che estendono ϕ.

(4) $N_{\overline{\Lambda},\psi}$ è irriducibile con varietà caratteristica la varietà di equazioni $x^a = \psi(a)$, $a \in \overline{\Lambda}$.

DIM 1. Evidentemente se $x^a u_S = \phi(a)u_S,\ x^b u_S = \phi(b)u_S$ si ha $x^{a+b}u_S = \phi(a+b)u_S$. Poiché inoltre anche D_S dipende solo da Λ questo primo enunciato è chiaramente vero.

2. Supponiamo prima di tutto che $\Lambda = \overline{\Lambda}$, possiamo dunque scegliere coordinate z_i tali che $N_{\Lambda,\phi} = \tilde{W}(n)/I$ dove I è l'ideale sinistro generato dagli elementi $z_i - \alpha_i,\ i = 1, \dots, d;\ \dfrac{\partial}{\partial z_j},\ j = d+1, \dots, n.$

Prima di tutto dimostriamo che modulo questo ideale sinistro gli elementi della forma

$$x_{d+1}^{h_1} \dots x_n^{h_n} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^{k_d}}{\partial x_d},\ h_i \in \mathbb{Z},\ k_i \in \mathbb{N} \tag{75}$$

generano linearmente il modulo.

Indichiamo con u_S la classe di 1.

Possiamo scegliere come base di $\tilde{W}(n)$ i monomi:

$$x_{d+1}^{h_1} \dots x_n^{h_n} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^{k_d}}{\partial x_d} x_1^{h_1} \dots x_d^{h_n} \frac{\partial^{k_{d+1}}}{\partial x_{d+1}} \dots \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n},\ h_i \in \mathbb{Z},\ k_i \in \mathbb{N}.$$

In questa base vediamo che:

$$x_{d+1}^{h_1} \dots x_n^{h_n} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^{k_d}}{\partial x_d} x_1^{h_1} \dots x_d^{h_n} \frac{\partial^{k_{d+1}}}{\partial x_{d+1}} \dots \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n} u_s = 0$$

se per qualche $i > d$ si ha $k_i > 0$. Se invece tutti questi numeri sono nulli abbiamo:

$$x_{d+1}^{h_1} \dots x_n^{h_n} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^{k_d}}{\partial x_d} x_1^{h_1} \dots x_d^{h_n} u_s =$$
$$x_{d+1}^{h_1} \dots x_n^{h_n} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^{k_d}}{\partial x_d} \alpha_1^{h_1} \dots \alpha_d^{h_n} u_s$$

Per vedere allo stesso tempo che i precedenti elementi sono una base e che il modulo è irriducibile prendiamo un elemento p combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli degli elementi (**??**). Basta mostrare che il sottomodulo P generato da p è tutto N_S.

La dimostrazione ora è del tutto simile a quella di **??** .

Moltiplicando p per un monomio $\prod_{i=d+1}^n x_i^N$ possiamo supporre che gli esponenti h_i siano non negativi.

Ordiniamo gli elementi con l'ordine lessicografico sugli esponenti e ragioniamo per induzione. Se appare in p la variabile x_k $k > d$ con esponente massimo $h > 0$ moltiplichiamo p per $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ ottenendo un elemento $q \in P$ nel modulo generato da p.

Sappiamo che $\dfrac{\partial}{\partial x_k} x_k^h = h x_k^{h-1} + x_k^h \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ ma spostando $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ a destra di x_k otteniamo un elemento nell'ideale I e quindi 0 nel modulo.

Pertanto q si esprime come una nuova combinazione lineare in cui l'esponente di x_k è diminuito.

Per induzione facciamo sparire tutte le variabili x_k e poi moltiplicando per $x_i,\ i \leq d$ anche le derivate ottenendo $u_S \in P$ e quindi $P = N_{\Lambda,\phi}$.

3. In coordinate adattate Λ è generato dai vettori $k_i e_i,\ i = 1, \dots, d$ dove gli e_i sono i vettori della base canonica ed i numeri k_i sono interi positivi.

Se $\phi(k_i e_i) = \alpha_i$ possiamo estendere ϕ ad un carattere moltiplicativo di $\overline{\Lambda}$ se poniamo $\psi(e_i)^{k_i} = \alpha_i$. Questo si può fare in esattamente $\prod_{i=1}^d k_i$ modi diversi. Per ognuno di tali modi abbiamo un modulo $N_{\overline{\Lambda},\psi}$ e vogliamo definire un morfismo :

$$\pi : \oplus_\psi N_{\overline{\Lambda},\psi} \to N_{\Lambda,\phi}$$

e provare che π è un isomorfismo.

Prima di tutto consideriamo il generatore $u_{\overline{\Lambda},\psi}$ di $N_{\overline{\Lambda},\psi}$, questo verifica evidentemente le equazioni soddisfatte da $u_{\Lambda,\phi}$ e quindi abbiamo un morfismo $\pi_\psi : N_{\Lambda,\phi} \to N_{\overline{\Lambda},\psi}$ per ogni ψ.

Dalla formula (**??**) segue che possiamo scegliere i rappresentanti degli idempotenti che appaiono nella corrispondente decomposizione ottenendo elementi $e_\psi(z)$ per cui $e_\psi(z) u_{\Lambda,\phi}$ soddisfa le equazioni di $u_{\overline{\Lambda},\psi}$. Otteniamo pertanto morfismi $i_\psi : N_{\overline{\Lambda},\psi} \to N_{\Lambda,\phi}$ da cui

$$i : \oplus_\psi N_{\overline{\Lambda},\psi} \to N_{\Lambda,\phi}$$

lasciamo al lettore di verificare che i, π sono isomorfismi inversi.

L'asserto sulla varietà caratteristica segue le stesse linee della dimostrazione del caso degli iperpiani, le equazioni $(z_i - \beta_i)u = \dfrac{\partial}{\partial z_j} u = 0,\ i = 1, \dots, d;\ j = d+1, \dots, n$ si trasformano in $z_i - \beta_i = \xi_j = 0,\ i = 1, \dots, d;\ j = d+1, \dots, n$ che definiscono il fibrato conormale alla varietà di equazioni $z_i - \beta_i = 0,\ i = 1, \dots, d$. Lo lasciamo anche al lettore.

Lezione 15. Indipendenza lineare

Usando la struttura di $D-$modulo di R_Δ la teoria della base canonica si riduce a provare che i vettori $v_{S,W}$ con S un circuito non spezzato sono linearmente indipendenti. Prendiamo una base $b_1, \dots, b_k$ di Σ e costruiamo coordinate adattate $z_1, \dots, z_n$ in modo tale che $y^{b_1}, \dots, y^{b_k}$ siano monomi nelle prime k coordinate z_i.

Prendiamo un punto di coordinate $z_i = a_i$ nella componente W e coordinate locali $z_i = a_i e^{\theta_i}$ in modo tale che per ogni vettore b si ha $z^b = a^b e^{(b,\theta)}$ e localmente $b \in \Delta_W$ se e solo se $a^b = 1$ e $(b, \theta) = 0$. W è data quindi localmente nelle coordinate θ dalle equazioni lineari $(b, \theta) = 0,\ b \in \Delta_W$.

Prendiamo lo spazio trasversale a W di parametri $z_i = a_i e^{\theta_i},\ i \leq k,\ z_i = a_i,\ i > k$. E calcoliamo sulle k forme riducendoci al caso degli iperpiani.

Lezione 16. Coomologia

Abbiamo visto, nella lezione sulle forme diffrenziali, la coomologia di De Rham e la nozione di *algebra differenziale graduata*.

La coomologia ha in generale un aspetto formale algebrico.

Formalmente un *complesso di cocatene* è una successione di gruppi abeliani , ma nel nostro caso più semplicemente spazi vettoriali, C^i con operatori, detti differenziali, $d^i : C^i \to C^{i+1}$ e con la proprietà $d^{i+1} \circ d^i = 0, \forall i$.

Usualmente si tralascia l'indice i nei differenziali che si indicano semplicemente con d.

Si danno le definizioni:

- $Z^i(C) := \{a \in C^i \,|\, d(a) = 0$ i *cocicli*
- $B^i(C) := \{d(a) \,|\, a \in C^{i-1})$ i *cobordi.*

Per ipotesi $B^i(C) \subset Z^i(C)$ e si pone:

- $H^i(C) = Z^i(C)/B^i(C)$ la *coomologia.*

Particolarmente importante è il caso in cui vi sia una *moltiplicazione* ovvero $\oplus_i C^i$ sia un algebra graduata.

Definizione 22. *Si parla di algebra differenziale graduata quando, vi sia la seguente compatibilità fra moltiplicazione e differenziale:*

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^i a\, d(b),\ \ a \in C^i$$

In questo caso si vede immediatamente che i cocicli sono un sottoanello ed i cobordi un ideale dei cocicli.

Ne segue che la coomologia è essa stessa un *algebra graduata.*

Lezione 16. Coomologia

Vogliamo ora provare come, dalla decomposizione che abbiamo ottenuti per gli anelli delle funzioni di un complemento di iperpiani in uno spazio vettoriale V oppure di un arrangiamento torico in un toro T, si possa calcolarne la coomologia (almeno a coefficienti complessi).

In entrambi i casi partiamo da un insieme Δ di vettori.

Nel primo caso $\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ sono vettori complessi, pensati come forme lineari $\alpha_i(y)$ a cui corrispondono gli iperpiani $\alpha_i(y) = 0$.

Nel secondo caso $\Delta := \{a_1, \dots, a_N\}$ sono vettori interi, a cui corrispondono sottogruppi di codimensione 1 (non necessariamente connessi) $x^a = 1$.

Il complementare dell'arrangiamento

Useremo le seguenti notazioni:

Per gli iperpiani:

$$\mathcal{A}_\Delta := \{p \in V \,|\, \alpha_i(p) \neq 0,\ \forall i \in \Delta\}$$

Per il toro:

$$\mathcal{T}_\Delta := \{p \in T \,|\, x^{a_i}(p) \neq 1,\ \forall i \in \Delta\}$$

Funzioni sul complementare dell'arrangiamento

Indichiamo con: A_V ($= \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ in coordinate), l'anello delle funzioni (polinomi) su V.

A_T ($= \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ in coordinate), l'anello delle funzioni (polinomi di Laurent) su T.

Per gli iperpiani le *funzioni su* $\mathcal{A}_\Delta$:

$$R_\Delta := A_V[d^{-1}],\ d = \prod_{\alpha_i \in \Delta} \alpha_i(y)$$

Per il toro le *funzioni su* $\mathcal{T}_\Delta$:

$$R(T)_\Delta := A_T[d^{-1}],\ d = \prod_{a_i \in \Delta} (1 - x^{a_i}).$$

In entrambi i casi siamo partiti da una coppia $(W, \mathcal{S})$ dove:

- W è una componente dell'arrangiamento.
  - Nel caso degli iperpiani W è un sottospazio intersezione degli iperpiani dati.
  - Nel caso del toro W è una componente connessa di una intersezione di varietà del tipo $x^a = 1$ con a fra i caratteri dati.
- S è una base non spezzata su W.
  - Nel caso degli iperpiani questo vuol dire che $\mathcal{S}$ è una base non spezzata per l'insieme degli $\alpha_i \in \Delta$ che svaniscono su W.
  - Nel caso del toro questo vuol dire che $\mathcal{S}$ è una base non spezzata per l'insieme degli $a_i \in \Delta$ per cui $x^{a_i} = 1$ su W.

La decomposizione

Fissata una coppia (W, S) con $|S| = k$ e W di codimensione k, abbiamo fatto

una scelta di coordinate $z_1, \dots, z_n$ tali che:

- $z_i = \alpha_i(y),\ i = 1, \dots, k$ per gli iperpiani.
- $x^{a_i},\ i = 1, \dots, k$ è un monomio nelle $z_i,\ i = 1, \dots, k$ per il toro.

In corrispondenza abbiamo un
anello commutativo di operatori differenziali:

- $S_\Delta := \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_k}, z_{k+1}, \dots, z_n]$ per gli iperpiani.
- $S(T)_\Delta := \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_k}, z_{k+1}^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ per il toro.

Infine abbiamo scelto un
elemento particolare.

- $a_{W,\mathcal{S}} := \frac{1}{\prod_{i=1}^k z_i}$ per gli iperpiani.
- $b_{W,\mathcal{S}} := \frac{e_{W,\mathcal{S}}}{\prod_{i=1}^k (1 - x^{a_i})}$ per il toro.

Dove $e_{W,\mathcal{S}} \in \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_k^{\pm 1}]$ è una funzione che vale 1 su W e 0 sulle altre componenti connesse della varietà di equazioni $x^{a_i} = 1$.

Il Teorema fondamentale che abbiamo provato è:

Teorema 33.1. *(1)* $R_\Delta = \oplus_{W,\mathcal{S}} S_\Delta a_{W,\mathcal{S}}$
(2) $S_\Delta a_{W,\mathcal{S}}$ *è stabile per gli operatori differenziali a coefficienti costanti.*

Per il toro:
(3) $R(T)_\Delta = \oplus_{W,\mathcal{S}} S(T)_\Delta b_{W,\mathcal{S}}$
(4) $S(T)_\Delta b_{W,\mathcal{S}}$ *è stabile per gli operatori differenziali a coefficienti costanti.*

Da questo ne traiamo una conseguenza per la coomologia.

Consideriamo le due algebre esterne di forme differenziali:

$$E_V := \mathbb{C}[dx_1, \dots, dx_n], \quad E_T := \mathbb{C}[d\log(x_1), \dots, d\log(x_n)]$$

Descriviamo le: forme differenziali

- $\Omega_{\mathcal{A}_V}$ l'algebra delle forme differenziali algebriche su $\mathcal{A}_V$.
- $\Omega_{\mathcal{A}_T}$ l'algebra delle forme differenziali algebriche su $\mathcal{A}_T$

Naturalmente queste sono *algebre differenziali* rispetto alla usuale differenziazione d.

Abbiamo:

Lemma 33.4.

$$\Omega_{\mathcal{A}_V} = R_\Delta \otimes E_V$$

$$\Omega_{\mathcal{A}_T} = R(T)_\Delta \otimes E_V = R(T)_\Delta \otimes E_T.$$

Da tutti questi fatti deduciamo che:

Teorema 33.2. *Il complesso delle forme differenziali si decompone nella somma diretta di complessi:*

$$\Omega_{\mathcal{A}_V} = \oplus_{W,\mathcal{S}} S_\Delta a_{W,\mathcal{S}} \otimes E_V$$

$$\Omega_{\mathcal{A}_T} = \oplus_{W,\mathcal{S}} S(T)_\Delta b_{W,\mathcal{S}} \otimes E_V.$$

Per calcolare la coomologia (almeno come spazio vettoriale) basta quindi calcolarla per i blocchi

$$S_\Delta a_{W,\mathcal{S}} \otimes E_V, \qquad S(T)_\Delta b_{W,\mathcal{S}} \otimes E_V.$$

La coomologia dei blocchi

Vedremo ora usando un fatto standard, *La formula di Künneth* che la coomologia dei blocchi è piuttosto semplice in effetti:

Teorema 33.3. *La coomologia di $S_\Delta a_{W,\mathcal{S}} \otimes E_V$ è di dimensione 1 generata dalla classe di*

$$a_{W,\mathcal{S}} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_k = d\log(z_1) \wedge \cdots \wedge d\log(z_k)$$

Quella di $S(T)_\Delta b_{W,\mathcal{S}} \otimes E_V$ è il modulo libero sull'algebra generata dalle forme $d\log(z_i),\ i = k+1, \dots n$ dalla classe della forma $b_{W,\mathcal{S}} d\log(z_1) \wedge \cdots \wedge d\log(z_k)$.

Per dimostrare questo teorema iniziamo dal caso più semplice, al quale ci ricondurremo.

Prendiamo il complesso delle forme algebriche si $\mathbb{C}^*$ ovvero la retta meno lo 0.

La coomologia dei blocchi

È il più semplice arrangiamento di iperpiani.

L'anello delle sue coordinate è l'anello $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ dei polynomi di Laurent che decomponiamo come somma di due pezzi, i polinomi e le *parti polari*:

$$\mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathbb{C}[x] \oplus x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$$

Entrambi i pezzi sono moduli sull'anello $\mathbb{C}[\frac{d}{dx}]$ degli operatori differenziali a coefficienti costanti.

Però sono due moduli molto diversi (in qualche modo *duali*).

- L'operatore $\frac{d}{dx} : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ è suriettivo con nucleo lo spazio 1-dimensionale dei polinomi costanti.
- L'operatore $\frac{d}{dx} : x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}] \to x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ è iniettivo con immagine $x^{-2}\mathbb{C}[x^{-1}]$.
- Infatti $x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ è un modulo libero di rango 1 generato da x^{-1} sull'anello $\mathbb{C}[\frac{d}{dx}]$.

La coomologia dei blocchi

- Quindi il complesso delle forme algebriche si decompone nella somma dei due complessi:
-

$$C(x) : \mathbb{C}[x] \xrightarrow{d} \mathbb{C}[x]dx,$$
$$\hat{C}(x) : x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}] \xrightarrow{d} x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]dx$$

- Dalla discussione fatta abbiamo:

$$H^0(C(x)) = \mathbb{C}1, \quad H^1(C(x)) = 0,$$
$$H^0(\hat{C}(x)) = 0, \quad H^1(\hat{C}(x)) = \mathbb{C}d\log(x).$$

La formula di Künneth

La formula di Künneth descrive la coomologia di un complesso che si ottenga, a partire da due complessi C, D con una operazione di composizione detta *prodotto tensoriale* .

Noi lo discutiamo nel caso più semplice, in cui i complessi siano formati da spazi vettoriali.

Si danno le definizioni:

- Il complesso $C \otimes D$ è in grado i per definizione $\oplus_{h+k=i} C^h \otimes D^k$, per il differenziale prendiamo la definizione:
- $d(a \otimes b) := d(a) \otimes b + (-1)^h a \otimes d(b), \quad a \in C^h$
- Si ha evidentemente che

$$Z^i(C) \otimes Z^j(D) \subset Z^{i+j}(C \otimes D),$$

$$B^i(C) \otimes Z^j(D) + Z^i(C) \otimes B^j(D) \subset B^{i+j}(C \otimes D)$$

- Da questo abbiamo una applicazione indotta:

$$H^i(C) \otimes H^j(D) \to H^{i+j}(C \otimes D).$$

La formula di Künneth

La formula di Künneth afferma che in questo modo (per gli spazi vettoriali solamente) abbiamo un isomorfismo:

$$\oplus_{i+j=n} H^i(C) \otimes H^j(D) \to H^n(C \otimes D).$$

Evidentemente questa formula si può iterare.

Prendiamo ora n variabili $x_1, \dots, x_n$ e lo spazio A_k dei polinomi in cui le variabili $x_1, \dots, x_k$ appaiono con esponenti strettamente negativi mentre le rimanenti variabili con esponenti non negativi.

È allora chiaro che le forme algebriche $\Omega(A_k)$ a coefficienti in A_k sono un sottocomplesso isomorfo al prodotto tensoriale di complessi:

$$\Omega(A_k) := C(x_1) \otimes \cdots \otimes C(x_k) \otimes \hat{C}(x_{k+1}) \otimes \cdots \otimes \hat{C}(x_n)$$

La formula di Künneth

Dalla formula di Künneth segue che:

$$H^i(\Omega(A_k)) = 0, \ \forall i \neq k, \quad H^k(\Omega(A_k)) = \mathbb{C} d\log(x_1) \wedge \cdots \wedge d\log(x_k).$$

Nel caso del toro invece abbiamo che il complesso $S(T)_\Delta b_{W,\mathcal{S}} b_{W,\mathcal{S}} \otimes E_T = \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_k}, z_{k+1}^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}] b_{W,\mathcal{S}} \otimes E_T$ è prodotto tensoriale:

$$\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_k}] b_{W,\mathcal{S}} \otimes E_{T_1} \otimes \mathbb{C}[z_{k+1}^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}] \otimes E_{T_2}$$

Dove E_{V_1} risp. E_{V_2} sono le algebre esterne generate dagli elementi $dz_1, \dots, dz_k$ risp. $dz_{k+1}, \dots, dz_n$. Ora,

- il complesso $\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_k}] b_{W,\mathcal{S}} \otimes E_{N_1}$ è isomorfo al prodotto dei complessi $\hat{C}(z_i), \ i = 1, \dots, k$
- quindi la sua coomologia è 1-dimensionale, in grado k e generata dalla classe di $b_{W,\mathcal{S}} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_k$

- mentre il complesso $\mathbb{C}[z_{k+1}^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}] \otimes E_{T_2}$ è il complesso delle forme algebriche sul toro di coordinate $z_{k+1}, \dots, z_n$
- e quindi la sua coomologia è l'algebra E_{T_2} algebra esterna negli elementi $d\log(z_{k+1}), \dots, d\log(z_n)$.

$\square$

La struttura moltiplicativa-iperpiani

Abbiamo visto che la coomologia è un'algebra ed è quindi interessante discutere la sua struttura moltiplicativa.

Iniziamo con il caso degli iperpiani $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ e quindi della coomologia del complemento $\mathcal{A}_\Delta$.

È utile cambiare la normalizzazione e definire le forme $\omega_i := \frac{1}{2\pi i} d\log(\alpha_i)$.

Dal teorema della sezione precedente abbiamo che le classi di tali forme generano la coomologia.

In effetti è vero qualcosa di molto più preciso.

Dalla formula **??**egue che, dati elementi $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ linearmente indipendenti si ha: Relazioni fondamentali

$$\sum_{h=1}^{k} (-1)^h \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_{h-1}} \wedge \omega_{i_{h+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} = 0$$

Consideriamo dunque formalmente un'algebra esterna $\Lambda(\psi_1, \dots, \psi_N)$, generata da elementi simbolici $\psi_i,\ i = 1, \dots, N$ e in essa l'ideale I_Δ generato dagli elementi

$$R(i_1, \dots, i_k) := \sum_{h=1}^{k} (-1)^h \psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{i_{h-1}} \wedge \psi_{i_{h+1}} \wedge \cdots \wedge \psi_{i_k}.$$

Indichiamo con Λ_Δ l'algebra $\Lambda(\psi_1, \dots, \psi_N)/I_\Delta$.

Questa algebra è detta algebra di *Orlik-Solomon* dagli autori che l'anno scoperta e studiata.

Sia ora $\mathcal{E}_\Delta$ la sottoalgebra dell'algebra delle forme differenziali, generata dagli elementi ω_i.

È una sottoalgebra dell'algebra dei cocicli, e finalmente H_Δ l'algebra di coomologia di $\mathcal{A}_\Delta$.

Da tutte le analisi fatte abbiamo omomorfismi

$$\rho : \Lambda_\Delta = \Lambda(\psi_1, \dots, \psi_N)/I_\Delta \to \mathcal{E}_\Delta, \quad \rho(\psi_i) := \omega_i$$

$$\pi : \mathcal{E}_\Delta \to H_\Delta.$$

π associa ad una forma in $\mathcal{E}_\Delta$ la sua classe di coomologia.

Abbiamo il Teorema fondamentale di Orlik-Solomon:

- Sia ρ che π sono isomorfismi.
- L'algebra Λ_Δ ha una base formata dalle classi dei prodotti $\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{i_k}$ corrispondenti ai circuiti non spezzati $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$.

A questo punto la dimostrazione di questo Teorema è facile. Già sappiamo che H_Δ è generata dalle classi degli elementi ω_i e che le classi dei prodotti $\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}$ corrispondenti ai circuiti non spezzati $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ sono una sua base.

Pertanto è sufficiente provare che, le classi modulo I_Δ dei prodotti $\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{i_k}$ corrispondenti ai circuiti non spezzati $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ generano linearmente Λ_Δ.

Per questo abbiamo un algoritmo, se $\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{i_k}$ corrisponde ad un circuito spezzato $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ esiste un $e \leq k$ ed un indice $i < i_e$ con $\alpha_i, \alpha_{i_e}, \dots, \alpha_{i_k}$ linearmente dipendenti.

A tale dipendenza è associata la relazione $R(i, i_e, \dots, i_k) = -[\psi_i \wedge R(i_e, \dots, i_k) + \psi_{i_e} \wedge \cdots \wedge \psi_{i_k}]$

Quindi in Λ_Δ al prodotto $\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{i_k}$ possiamo sostituire:

$$-\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{i_{e-1}} \wedge \psi_i \wedge R(i_e, \dots, i_k)$$

che è una somma di monomi lessicograficamente inferiori.

Iterando l'algoritmo si arriva ad esprimere ogni monomio in termini di monomi associati a circuiti non spezzati. $\square$

La struttura moltiplicativa-tori

Nel caso degli arrangiament torici la situazione è molto più complicata ed in generale la struttura moltiplicativa non è stata esplicitata.

Vi è un caso importante in cui la Teoria è simile al caso degli iperpiani, il *caso unimodulare*.

Questo è il caso in cui vi è un unico punto dell'arrangiamento, ovvero ogni base dello spazio vettoriale dei caratteri estratta da Δ è anche una base del reticolo dei caratteri.

Abbiamo già visto che una interessante classe di esempi unimodulari viene dai grafi ed i networks.

In questo caso la teoria svolta implica che le classi degli elementi $\psi_i := d\log(x_i),\ \omega_{a_i} := d\log(1 - x^{a_i})$ con $a_i \in \Delta$ generano la coomologia.

Dati comunque elementi indipendenti $\beta_1, \dots, \beta_k \in \Delta$ ed un elemento $\beta \in \Delta$ da essi dipendenti:

Lemma 33.5. *si deve avere una relazione del tipo* $\beta = \sum_{i=1}^k \epsilon_i \beta_i, \quad \epsilon_i = \pm 1.$

DIM Completiamo $\beta_1, \dots, \beta_k$ ad una base con elementi $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n \in \Delta$. Se per assurdo un coefficiente ad esempio il primo avesse modulo $m > 1$ si avrebbe la base $\beta, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n \in \Delta$ estratta da Δ che genera un sottoreticolo di indice m. $\square$

Inoltre abbiamo una base della coomologia descritta a partire da circuiti non spezzati.

Pertanto possiamo cercare di determinare le relazioni e dimostrare un Teorema analogo a quello di Orlik-Solomon.

È necessario quindi trovare le relazioni.

Iniziamo con alcune identità simboliche:

Poniamo, per $i = 1, \dots, n$, $\omega_i := d\log(1 - x_i)$, $\psi_i := d\log x_i$. Poniamo

$$\theta = d\log(1 - \prod_{i=1}^{n} x_i) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{(1 - \prod_{i=1}^{n} x_i)} \sum_{j=1}^{n} \psi_j.$$

Usiamo la relazione **??**:

$$1 - \prod_{i=1}^{n} x_i = \sum_{I \subsetneq \{1,2,\dots,n\}} \prod_{i \in I} x_i \prod_{j \notin I} (1 - x_j). \tag{76}$$

Ricordiamo la prova:

Spezziamo la somma in 3 termini: $I = \{1, \dots, n-1\}$, $I \subsetneq \{1, \dots, n-1\}$ ed $n \in I$. Otteniamo

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_i (1 - x_n) + (1 - \prod_{i=1}^{n-1} x_i)(1 - x_n) + x_n(1 - \prod_{i=1}^{n-1} x_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Da cui

$$\sum_{I \subsetneq \{1,2,\dots,n\}} \frac{1}{(1 - \prod_{i=1}^{n} x_i)} \prod_{i \in I} \frac{x_i}{(1 - x_i)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)}.$$

Che riscriviamo nel linguaggio delle forme differenziali moltiplicando per $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$:

Preso un sottoinsieme proprio $I = \{i_1 < \dots < i_t\}$ in $\{1, \dots, n\}$ sia $J = \{j_1 < \dots < i_{n-t}\}$ il suo complemento, si ha

$$\frac{1}{(1 - \prod_{i=1}^{n} x_i)} \prod_{i \in I} \frac{x_i}{(1 - x_i)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n =$$

$$(-1)^{s_I} \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{(1 - \prod_{i=1}^{n} x_i)} \omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \wedge \psi_{j_1} \wedge \dots \wedge \psi_{j_{n-k}} =$$

$$(-1)^{s_I} \omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \wedge \psi_{j_1} \wedge \dots \wedge \psi_{j_{n-k-1}} \wedge \theta$$

con s_I la parità della permutazione $(i_1, \dots, i_t, j_1, \dots, i_{n-t})$.

Definiamo allora le n-forme:

$$\Phi_I = (-1)^{s_I} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_t} \wedge \psi_{j_1} \wedge \dots \wedge \psi_{j_{n-t-1}} \wedge \theta$$

Abbiamo quindi la identità

$$\sum_{I \subsetneq \{1,2,\dots,n\}} \Phi_I = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n. \tag{77}$$

Poniamo ora per $s = 0, \dots n$,

$$\theta^{(s)} = d\log(1 - \prod_{i=1}^{s} x_i^{-1} \prod_{j=s+1}^{n} x_j) =$$

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{(1-\prod_{i=1}^s x_i^{-1}\prod_{j=s+1}^n x_j)}[-\sum_{j=1}^s \psi_j + \sum_{j=s+1}^n \psi_j]$$

Per trovare una relazione coinvolgente $\theta^{(s)}$ basta fare la sostituzione di variabili $x_i \mapsto x_i^{-1}, 1 \le i \le s$.

In generale osserviamo che

$$d\log(1-x^{-1}) = d\log\frac{x-1}{x} = -d\log(x) - d\log(1-x).$$

Quindi, la sostituzione di x_i con x_i^{-1} per $i = 1, \dots, s$, corrisponde, nella formula (**??**) alla sostituzione di ω_i con $-\omega_i - \psi_i$. Questo ci da una nuova identità che denoteremo con (**??**'). $\square$

Preso un elemento γ qualunque nel reticolo dei caratteri, poniamo per coerenza $\omega_\gamma := d\log(1-x^\gamma),\ \psi_\gamma := d\log(x^\gamma)$.

Consideriamo dunque formalmente un'algebra esterna $\Lambda(\omega_{a_1}, \dots, \omega_{a_N}, \psi_a)$, generata da elementi simbolici $\omega_{a_i},\ i = 1, \dots, N,\ \psi_a,\ a \in \Lambda$.

Per gli elementi ψ_a supponiamo che $a \to \psi_a$ è un isomorfismo lineare da Λ al gruppo additivo da essi generato.

Ovvero che valgano le identità $\psi_{ma+nb} = m\psi_a + n\psi_b,\ a, b \in \Lambda,\ m, n \in \mathbb{Z}$

Prendiamo in tale algebra l'ideale I_Δ generato dai seguenti elementi:

Presi fra gli elementi di Δ, k elementi indipendenti β_1, β_k sia $\beta = \sum_{i=1}^k \beta_i \in \Delta$.

Completiamo ad una base del reticolo con elementi $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$.

Sostituendo nella espressione $R := \sum_{I \subsetneq \{1,2,\dots,n\}} \Phi_I - \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ ad x_i l'elemento x^{β_i} abbiamo che ω_i viene sostituito a ω_{β_i} e θ a ω_β.

La relazione R diviene un elemento $R(\beta, \beta_1, \beta_k) \in \Lambda(\omega_1, \dots, \omega_N, \psi_1, \dots, \psi_n)$.

Più in generale se $\beta = \sum_{i=1}^k \epsilon_i \beta_i,\ \epsilon_i = \pm 1, \beta \in \Delta$ possiamo ugualmente fare una sostituzione, utilizzando la regola $\omega_{-a} = -\psi_a - \omega_a$ ed ottenere un elemento che chiameremo ancora $R(\beta, \beta_1, \beta_k)$.

Come nel caso degli iperpiani possiamo considerare: l'ideale I_Δ generato da:

- Gli elementi $\psi_{ma+nb} - m\psi_a - n\psi_b$.
- Gli elementi $\omega_{a_{i_1}} \wedge \dots \wedge \omega_{a_{i_k}} \wedge \psi_a$ quando a è nel reticolo generato dagli a_i.
- gli elementi $R(\beta, \beta_1, \beta_k)$ per tutte le relazioni di dipendenza $\beta = \sum_{i=1}^k \beta_i$ fra elementi di Δ, con i β_i linearmente indipendenti.

Indichiamo con Λ_Δ l'algebra $\Lambda(\psi_1, \dots, \psi_N)/I_\Delta$.

Sia ora $\mathcal{E}_\Delta$ la sottoalgebra dell'algebra delle forme differenziali, generata dagli elementi ω_i, ψ_a.

È una sottoalgebra dell'algebra dei cocicli, e finalmente H_Δ l'algebra di coomologia di $\mathcal{T}_\Delta$.

Da tutte le analisi fatte abbiamo omomorfismi

$$\rho : \Lambda_\Delta = \Lambda(\omega_{a_1}, \dots, \omega_{a_N}, \psi_a)/I_\Delta \to \mathcal{E}_\Delta, \quad \rho(\psi_a) := d\log(x^a),$$
$$\rho(\omega_a) := d\log(1 - x^a).$$
$$\pi : \mathcal{E}_\Delta \to H_\Delta.$$

π associa ad una forma in $\mathcal{E}_\Delta$ la sua classe di coomologia.
Abbiamo il Teorema fondamentale di presentazione

- Sia ρ che π sono isomorfismi.
- L'algebra Λ_Δ ha una base formata dalle classi dei prodotti $\omega_{a_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{a_{i_k}} \wedge \psi_{a_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \psi_{a_{j_t}}$ dove $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ è un circuito non spezzato e $a_{j_1}, \dots, a_{j_t}$ sono elementi di Δ parte di $n - k$ elementi scelti per completare $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ ad una base.

A questo punto la dimostrazione di questo Teorema è facile.

Già sappiamo che H_Δ è generata dalle classi degli elementi ω_{a_i}, ψ_a e che le classi degli elementi $\omega_{a_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{a_{i_k}} \wedge \psi_{a_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \psi_{a_{j_t}}$, proposti nel teorema, sono una sua base.

Pertanto è sufficiente provare che, le classi modulo I_Δ di tali elementi generano linearmente Λ_Δ.

Preso un elemento qualunque $\omega_{a_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{a_{i_k}} \wedge \psi_{b_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \psi_{b_{j_t}}$ abbiamo due algoritmi di riduzione.

Prima di tutto tale prodotto modulo I_Δ è 0 se gli elementi b_{j_h} non sono linearmente indipendenti modulo il reticolo generato dagli elementi a_{i_s}.

Inoltre, se $\omega_{a_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{a_{i_k}}$ corrisponde ad un circuito spezzato $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ esiste un $e \leq k$ ed un indice $i < i_e$ con $a_i, a_{i_e}, \dots, a_{i_k}$ linearmente dipendenti.
A tale dipendenza è associata la relazione $R(a_i, a_{i_e}, \dots, a_{i_k})$.

Tale relazione permette di esprimere il prodotto $\omega_{a_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{a_{i_k}}$ come somma di altri termini i quali o contengono meno fattori ω_a ovvero sono lessicograficamente inferiori.

Iterando l'algoritmo si arriva ad esprimere ogni monomio in termini di monomi associati a circuiti non spezzati. $\square$

Appendice 1, Polinomi ciclotomici

Nelle formule che abbiamo studiato otteniamo serie a coefficienti interi espresse tramite calcoli su radici della unità.

Calcolare con tali radici è un caso speciale del calcolo con numeri algebrici.

Numeri algebrici

- Un numero α si dice algebrico se soddisfa una equazione $f(\alpha) = 0$ con $f(x)$ un polinomio a coefficienti razionali,
- Se dobbiamo calcolare espressioni razionali in un numero algebrico α dobbiamo conoscere il polinomio monico minimo soddisfatto da α (che è irriducibile ed anche unico).
- Se $f(x) = x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ abbiamo che ogni espressione razionale in α si normalizza in modo unico come un polinomio in α di grado $< n$ a coefficienti razionali.

In termini più astratti si ha che i numeri $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ sono una base del campo $\mathbb{Q}(\alpha)$ generato da α.

Regole di calcolo

Vi sono due regole di calcolo, la prima evidente consiste nella sostituzione $\alpha^n = -(a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n)$.

La seconda permette di calcolare, dato un elemento $g(\alpha) \neq 0$ con $g(x)$ un polinomio a coefficienti razionali, la espressione polinomiale per $g(\alpha)^{-1}$.

Per questo vi è un algoritmo standard basato sulla divisione Euclidea che fornisce due polinomi $a(x), b(x)$ con $a(x)g(x) + b(x)f(x) = 1$. Sostituendo ad x il numero α ed utilizzando il fatto che $f(\alpha) = 0$ si ha $g(\alpha)^{-1} = a(\alpha)$.

Con questi principi di calcolo è necessario calcolare il polinomio minimo soddisfatto da una radice $m-$esima della unità $\zeta = e^{2\pi i/m}$ (o come vedremo di una del tipo $e^{2k\pi i/m}$ con $k < m$ e primo con m.

Un tale numero è detto *radice primitiva della unità*.

Le radici primitive $m-$esime della unità sono dunque tante quanti i numeri naturali minori di m e primi con m.

Il numero $\phi(m)$ di tali numeri viene detta *funzione ϕ di Eulero* e si calcola facilmente usando i seguenti fatti:

$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ se a, b sono primi fra loro.

$\phi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$ se p è primo.

Il polinomio minimo soddisfatto dalle radici primitive $m-$esime della unità viene detto *polinomio ciclotomico $m-$esimo* e denotato con $\phi_m(x)$.

Il polinomio $\phi_m(x)$ si può calcolare ricorsivamente dalla formula:

$$x^m - 1 = \prod_{d\,|\,m} \phi_d(x).$$

(La espressione $d\,|\,m$ significa d divide m.)

Esempio:

Se $m = p$ è primo $\phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$.
$\phi_4(x) = x^2 + 1, \quad \phi_6(x) = x^3 + 1$.

Appendice 2, Moduli

Abbiamo usato la teoria dei moduli nel caso della algebra di Weyl.

In termini molto semplici una algebra R può essere descritta o intrinsecamente ovvero come algebra di oeratori su uno spazio vettoriale, essenzialmente un modulo è una *incarnazione* di R come algebra di operatori.

In termini più formali un modulo è un omomorfismo $p : R \to End(V)$ da R alla algebra di tuttti gli endomorfismi di uno spazio vettoriale V.

In un linguaggio equivalente un modulo è una *moltiplicazione*:

$$p : R \times V \to V, \quad \text{indicata} \quad (r, v) \mapsto rv,$$

che soddisfi i seguenti assiomi:

p è bilineare. $1v = v$ per ogni $v \in V$, e $(rs)v = r(sv)$ per ogni $r, s \in R$ e $v \in V$.

Il più naturale fra tutti i moduli è l'anello stesso R in cui la moltiplicazione p coincide con la usuale moltiplicazione nell'anello. Tale modulo è anche detto *rappresentazione regolare.*

Con i moduli si possono fare varie operazioni, la somma diretta di due moduli M, N è lo spazio delle coppie $(m, n),\ m \in M,\ n \in N$ con $r(m, n) := (rm, rn)$.

Un sottomodulo $N \subset M$ di un modulo M è un sottospazio vettoriale che soddisfi $rn \in N,\ \forall r \in R,\ \forall n \in N$, in altre parole N *è stabile rispetto agli operatori indotti da R.*

Una costruzione importante è *il modulo quoziente* M/N.

Si tratta di un nuovo spazio vettoriale che si ottiene da M identificando tutti i vettori di N a 0 ovvero ponendo $m_1 = m_2$ se $m_1 - m_2 \in N$. Se N è un sottomodulo la azione di R su M induce in modo naturale una azione su M/N.

Possiamo costruire moduli, a partire dal modulo R con somme dirette e quozienti.

Si dice *modulo libero* una somma diretta $R^{\oplus I}$ (finita od infinita) di copie di R. Formalmente dato un insieme I il modulo $R^{\oplus I}$ è l'insieme delle funzioni $f : I \to R$ con la proprietà che $f(i) = 0$ tranne un numero finito di elementi (condizione vuota se I è finito).

Dato un modulo M ed un insieme $m_i,\ i \in I$ di elementi $m_i \in M$ indicizzati da I abbiamo una applicazione:

$$\pi : R^{\oplus I} \to M, \quad \pi(f) = \sum_{i \in I} f(i) m_i.$$

Si dice che gli elementi m_i *generano* M se π è suriettiva.

In questo caso M è isomorfo a $R^{\oplus I}/K$ dove $K = \{f \in R^{\oplus I} \mid \pi(f) = 0\}$ è il *nucleo* di π, detto anche *modulo delle relazioni fra gli elementi m_i.*

Un caso particolarmente importante è quando M è generato da un unico elemento m. In questo caso il modulo si dice *ciclico.* Il modulo delle relazioni di un modulo ciclico è un ideale sinistro I di R, $I = \{r \in R \,|\, rm = 0\}$ detto anche *annullatore* di m. Si ha $M = R/I$.

Vi sono classi importanti di moduli che abbiamo visto. Prima di tutto i moduli *irriducibili* ovvero moduli M che non contengano alcun sottomodulo N che non sia 0 ovvero M. Si vede immediatamente che un modulo irriducibile è necessariamente ciclico e l'annullatore di ogni suo elemento non nullo è un ideale sinistro massimale.

I moduli *semisemplici* o *completamente riducibili* sono le somme dirette di moduli irriducibili.

Abbiamo già menzionato alcuni teoremi fondamentali sui moduli come il teorema di struttura dei moduli semisemplici ed il teorema di Jordan–Hölder.

Appendice 3, Reticoli

Studiamo un semplice aspetto della teoria dei gruppi abeliani finitamente generati.

Prendiamo come reticoli i sottogruppi di $\mathbb{Z}^n$ per un dato n,

È facile provare che un tale reticolo è finitamente generato. Si può quindi dare un tale reticolo con un insieme finito di generatori che possono essere quindi esibiti tramite una matrice A ad elementi interi ed $n \times m$.

Cambiare una base di $\mathbb{Z}^n$ corrisponde a moltiplicare A a sinistra per una matrice B invertibile $n \times n$ a coefficienti interi ottenendo una nuova matrice BA mentre un modo per cambiare generatori corrisponde a moltiplicare A a destra per una matrice C invertibile $m \times m$ a coefficienti interi ottenendo una nuova matrice AC.

Le moltiplicazioni a sinistra per matrici intere invertibili sono descritte in modo più algoritmico tramite una sequenza di: operazioni elementari sulle righe

- Scambiare due righe.
- Cambiare segno ad una riga.
- Sommare ad una riga una altra riga moltiplicata per un intero.

In modo simile, le moltiplicazioni a destra per matrici intere invertibili sono descritte tramite una sequenza di *operazioni elementari sulle colonne.*

Ora l'algoritmo fondamentale consiste nel:

(1) permutare righe e colonne in modo tale che $a_{1,1} \neq 0$ sia il minimo elemento (in valore assoluto) non nullo nella matrice .
(2) Cambiare se necessario segno in modo che $a_{1,1} > 0$.
(3) Per ogni $i = 2, \ldots, n$, se $a_{i,1} \neq 0$ fare la divisione Euclidea $a_{i,1} = a_{1.1}q + r,\ |r| < a_{1,1}$.
(4) Sommare alla $i-$esima riga la prima moltiplicata per $-q$.
(5) Fare lo stsso tipo dei passi 3. e 4. ma sulle colonne.
(6) Tornare al passo 1 e iterare.

Si arriva ad una nuova matrice A' in cui si ha $a_{i,1} = 0 = a_{1,i},\ \forall i > 0$.

A questo punto si comincia ad operare con lo stesso algoritmo sulla matrice ottenuta eliminando la prima riga e prima colonna di A.

Alla fine abbiamo una matrice che ha tutti elementi 0 fuori della *diagonale* $a_{i,i}$. Posto $d_i := a_{i,i}$ si ha inoltre che per un qualche k i primi k fra i d_i sono positivi ed i rimanenti nulli.

Con ulteriori operazioni elementari è possibile inoltre normalizzare ulteriormente i d_i in modo che $d_1 \,|\, d_2 \,|\, d_3 \,|\, \ldots \,|\, d_k$.

Non è difficile provare che tali d_i sono invarianti di A, precisamente $\prod_{i=1}^{h} d_i$ è il massimo comun divisore dei determinati (non nulli) di tutti i minori $h \times h$ estratti da A.

Appendice 4, Trasformata di Laplace

Nello spazio $\mathbb{R}^n$ abbiamo definito la trasformata di Laplace tramite la formula:

$$L(f)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y,x)} f(x)dx.$$

A parte eventuali normalizzazioni questa trasformata va confrontata con la Trasformata di Fourier

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y,x)} f(x)dx.$$

La principale differenza, specialmente per i nostri calcoli, sta nel fatto che, mentre nella trasformata di Fourier il nucleo $e^{i(y,x)}$ ha modulo 1 nella trasformata di Laplace il nucleo può andare a 0 o ad ∞, esponenzialmente.

La principale proprietà che useremo della trasformata di Fourier è che preserva la norma L^2 ovvero il:

Teorema di Plancherel:

$$\int |\hat{f}(y)|^2 dy = \int |f(x)|^2 dx.$$

Nei casi di nostro interesse possiamo legare la trasformata di Laplace a quella di Fourier come segue. Se la funzione $f(x)$ ha supporto in un cono puntuto ed ivi ha un andamento polinomiale possiamo definire la trasformata di Laplace non solo per y reale nell'interno del cono duale ma anche per $z = y + iu$ complesso. Ora tale funzione risulta olomorfa in z nella regione della spazio complesso con parte reale in tale cono duale. Ad y fissato si ha inoltre:

$$L(f)(y - iu) := \int e^{-(y-iu,x)} f(x)dx = \hat{g}(u), \quad g(x) := e^{-(y,x)} f(x).$$

In particolare dal Teorema di Plancherel segue che, se la trasformata di Laplace di f è 0, anche f è zero. Il che ci permette di parlare di inversa della trasformata di Laplace.

References

[1] M. Ahmed, J. De Loera, R. Hemmecke, *Polyhedral cones of magic cubes and squares.* Discrete and computational geometry, 25–41, Algorithms Combin., 25, Springer, Berlin, 2003.

[2] T.V. Alekseevskaya, I.M. Gelfand, I. M., A.V. Zelevinsky, A. V. *Distribution of real hyperplanes and the partition function connected with it.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 297 (1987), no. 6, 1289–1293.

[3] W. Baldoni-Silva, J.A. De Loera, M. Vergne, *Counting Integer flows in Networks* , preprint math.CO/0303228

[4] W. Baldoni-Silva, M. Vergne, *Residues formulae for volumes and Ehrhart polynomials of convex polytopes* , preprint math.CO/0103097

[5] E.T. Bell, *Interpolated denumerants and Lambert series* , Amer. J. Math. 65 (1943), 382–386.

[6] M. Brion, M. Vergne, *Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes.* J.A.M.S. (v. 10) 4 (1997), 797–833.

[7] M. Brion, M. Vergne, *Arrangements of hyperplanes. I. Rational functions and Jeffrey-Kirwan residue.* Ann. Sci. cole Norm. Sup. (4) 32 (1999), no. 5, 715–741.

[8] S. C. Coutinho, *A primer of algebraic D-modules.* London Mathematical Society Student Texts, 33. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[9] W. Dahmen, C.Micchelli, *The number of solutions to linear Diophantine equations and multivariate splines.* Trans. Amer. Math. Soc. 308 (1988), no. 2, 509–532.

[10] C. DeConcini, C. Procesi, *Wonderful Models of subspace arrangements.* Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), no. 3, 459–494.

[11] C. DeConcini, C. Procesi, *Nested sets and Jeffrey Kirwan residues.* in: Geometric methods in Algebra and Number Theory, Bogomolov, F., Tschinkel. Y., Eds., vol. 235, 139–150.

[12] C. DeConcini, C. Procesi, *On the geometry of graph arrangements.* math.CO/0412130

[13] C. DeConcini, C. Procesi, *Toric arrangements.* math.AG/0505351

[14] A. Dimca, G.I. Lehrer, *Purity and equivariant weight polynomials.* Algebraic groups and Lie groups, 161–181, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., 9, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997

[15] J.M. Douglass, *Toral arrangements and hyperplane arrangements.* Rocky Mountain J. Math. 28 (1998), no. 3, 939–956.

[16] E. M. Feichtner, B. Sturmfels *Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans,* CO/0411260 .

[17] A. Grothendieck, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 29 (1966), 95–103.

[18] R. Hartshorne, *Local cohomology.* A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall, 1961. Lecture Notes in Mathematics, No. 41 Springer-Verlag, Berlin-New York 1967 vi+106 pp.

[19] A. Henderson, *The symmetric group representation on cohomology di the regular elementi of a maximal torus of the special linear group* , preprint http://www.maths.usyd.edu.au/u/anthonyh/

[20] Lehrer, G. I. *The cohomology of the regular semisimple variety.* J. Algebra 199 (1998), no. 2, 666–689.

[21] Lehrer, G. I. *A toral configuration space and regular semisimple conjugacy classes.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 118 (1995), no. 1, 105–113.

[22] E. Looijenga, *Cohomology of $\mathcal{M}_3$ and $\mathcal{M}_3^1$.* Mapping class groups and moduli spaces of Riemann surfaces (Göttingen, 1991/Seattle, WA, 1991), Contemp. Math., 150, Amer. Math. Soc., 1993, 205–228.

[23] C. Macmeikan, *Modules of derivations for toral arrangements.* Indag. Math. (N.S.) 15 (2004), no. 2, 257–267.

[24] C. Macmeikan, *The Poincaré polynomial of an mp arrangement.* Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), no. 6, 1575–1580.

[25] R. Mac Pherson, C. Procesi, *Making conical compactifications into wonderful ones.* Selecta Math. 4, (1998),n.1,125-139. Dekker 1998.

[26] P. Orlik, H. Terao, *Arrangements of hyperplanes* . Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 300. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[27] A. Postnikov, *Permitaedra, associaedra and beyond* , preprint 2004.

[28] A. Szenes, *Iterated residues and multiple Bernoulli polynomials.* Int. Math. Res. Not. (1998), No.18, 937-956.

[29] A. Szenes, *Residue theorema for rational trigonometric sums and Verlinde's formula.* Duke Math. J. 118 (2003), no. 2, 189–227.

[30] A. Szenes, M. Vergne, *Residue formulae for vector partitions and Euler-Maclaurin sums* preprint, CO/0202253.

[31] A. Szenes, M. Vergne, *Toric reduction and a conjecture of Batyrev and Materov* preprint, AT/0306311.

Dip. Mat. Castelnuovo, Univ. di Roma La Sapienza, Rome, Italy
E-mail address: procesi@mat.uniroma1.it