CAPITOLO 6 ANELLI DI COHEN MACAULAY

versione del (6-5-2002)

1 Normalità

Secondo Dedekind, gli ideali sono *numeri ideali* che si introducono nella teoria degli interi algebrici per ripristinare il teorema di fattorizzazione unica.

La teoria è particolarmente efficiente sotto le ipotesi di *normalità*:

1.1 DEFINIZIONE. *Un dominio si dice* **normale** *se è integralmente chiuso nel suo campo delle frazioni.*
Un anello si dice **normale** *se è somma diretta finita di domini normali.*

Per operare come con i numeri manca ancora una operazione che passiamo a definire:

1.2 DEFINIZIONE. *Dato un ideale I di un dominio A con campo delle frazioni F poniamo*

$$I^{-1} := \{a \in F \mid aI \subset A\}. \tag{1.3}$$

Le seguenti proprietà della definizione sono immediate:

$$\begin{gathered} AI^{-1} = I^{-1},\ A \subset I^{-1},\ I \subset J \iff J^{-1} \subset I^{-1}, \\ I \subset II^{-1} \subset A,\ (I+J)^{-1} = I^{-1} \cap I^{-1},\ (a)^{-1} = Aa^{-1}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

in particolare se A è Noetheriano I^{-1} è un modulo finitamente generato.
Infine se S è un insieme moltiplicativo

$$(I[S^{-1}])^{-1} = I^{-1}[S^{-1}] \tag{1.6}$$

1.7 LEMMA. *Sia A un dominio Noetheriano e I un ideale con $I = II^{-1}$ allora ogni elemento di I^{-1} è integrale su A. Se A è normale $I^{-1} = A$.*

DIM. Sia $b \in I^{-1}$ dalla ipotesi segue che la moltiplicazione per b induce un endomorfismo di I e quindi b soddisfa il suo polinomio caratteristico. □

1.8 LEMMA. *Se A è un dominio Noetheriano, $0 \neq a \in A$ e P è associato a A/aA allora $P^{-1} \neq A$.*

DIM. Per ipotesi esiste un $b \in A$ tale che $P := \{r \in A | rb \in (a)\}$.
Quindi $\frac{b}{a} \in P^{-1},\ \frac{b}{a} \notin A$. □

1.9 LEMMA. *Sia A un dominio locale Noetheriano, $P \neq 0$ il suo ideale massimale. Se $PP^{-1} = A$ allora P è principale.*

DIM. Se $a \in P - P^2$ si ha $aP^{-1} \subset A$. Se $aP^{-1} \subset P$ si ha $aPP^{-1} \subset P^2 \implies a \in P^2$. Pertanto si deve avere che l'ideale $aP^{-1} = A$ da cui $aA = aP^{-1}P = AP = P$. □

1.10 LEMMA. *Sia A un dominio Noetheriano, $P \neq 0$ un ideale primo. Se $PP^{-1} \supsetneq P$ allora $ht(P) = 1$.*

DIM. Localizziamo a P ed usiamo 1.6 ci riduciamo al caso locale. Applichiamo 1.9 e deduciamo che $\dim A_P = 1$ come richiesto. □

Ne deduciamo l'importante:

1.11 TEOREMA. *Se A è un dominio locale Noetheriano normale di dimensione 1 allora A è regolare.*

DIM. Sia P il suo ideale massimale, se $a \in P, a \neq 0$ si ha che P è primo associato a A/aA per la proprietà della dimensione 1 e quindi da 1.8 $P^{-1} \neq A$. Da 1.7 segue che non può essere $P\ P^{-1} = P$. Pertanto $P\ P^{-1} = A$ e 1.9 completa l'argomento. □

Dal Cap. 4, Def. 3.7 ricordiamo che un ideale I in un anello A non è misto se tutti gli ideali associati ad A/I (ovvero $P \in Ass(A/I)$) sono minimali e della stessa codimensione.

1.12 TEOREMA. *Se A è un dominio normale Noetheriano e $0 \neq a \in A$ si ha che (a) non è misto, ovvero $P \in Ass(A/(a)) \implies ht(P) = 1$.*

DIM. Dal Lemma 1.8 se $P \in Ass(A/(a))$ si ha $P^{-1} \neq A$, da 1.7 e la normalità segue che $P \subsetneq PP^{-1}$. Da 1.10 segue che $ht(P) = 1$ e quindi il teorema. □

1.13 TEOREMA. *Se A è un dominio normale Noetheriano si ha*

$$A = \cap_{ht(P)=1} A_P. \tag{1.14}$$

DIM. Sia $a/b \in \cap_{ht(P)=1} A_P$. Sia $I := \{r \in A | ra/b \in A$ ovvero $I = (b : a) = \{r \in A | ra \in Ab\}$. Se $a \in Ab$ allora $a/b \in A$ altrimenti l'ideale I è contenuto in un primo P associato ad $A/(b)$ e dal Teorema precedente $ht(P) = 1$. Quindi $a/b \in A_P$ ovvero $\exists s \notin P$ con $sa/b \in A$ ovvero $s \in I \subset P$ una contraddizione. □

I teoremi precedenti hanno un importante significato geometrico, se A è l'anello delle coordinate di una varietà normale V un ideale primo P con $ht(P) = 1$ definisce una ipersuperficie W. 1.12 dice che localmente W è definita da una equazione a che genera l'ideale primo di W. Inoltre, dato che A_P è regolare, questo implica che il luogo singolare di V ha codimensione ≥ 2 ovvero V è non singolare in codimensione 1.

1.13 è la forma algebrica del Lemma di Hartogs, infatti Dire che $f = a/b \in A_P$ vuol dire che la funzione f è definita in un aperto che interseca W. In altre parole il complementare dell'aperto su cui f è definita ha codimensione ≥ 2. Sotto queste ipotesi $f \in A$ ovvero f è definita ovunque. In altre parole:

Se V è una varietà normale una funzione definita al di fuori di una sottovarietà di codimensione ≥ 2 si estende (in modo unico) ad una funzione regolare su V.

Vogliamo provare ora che un dominio locale regolare è normale. L'enunciato segue da una diversa interpretazione della normalità e da un risultato generale.

1.15 DEFINIZIONE. *Dato un dominio A con campo delle frazioni K diremo che un elemento $a \in K$ è* **quasi integrale** *su A se esiste $0 \neq c \in A$ e $ca^m \in A$, $\forall m \in \mathbb{N}$.*

È facile vedere che gli elementi quasi integrali su A formano un sottoanello B e, se u è integrale su A, u è quasi integrale su A, infatti se $u^n + a_1u^{n-1} + \ldots a_0 = 0$ si ha che se $cu^i \in A$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ è un denominatore comune, allora $cu^m \in A$, $\forall m$.

1.16 PROPOSIZIONE. *Se A è un dominio Noetheriano con campo delle frazioni K, un elemento $u \in K$ è quasi integrale su A se e solo se è integrale su A.*

DIM. In un verso lo abbiamo visto in generale. Se A è Noetheriano e u è quasi integrale su A si ha che $A[u] \subset c^{-1}A$, pertanto $A[u]$ è un $A-$modulo fintamente generato e quindi u è integrale. □

1.17 TEOREMA. *Sia A un anello Noetheriano I un ideale contenuto nel radicale di Jacobson e $Gr(A) := \oplus_k I^k/I^{k+1}$, il graduato associato alla filtrazione $I-$adica.*
Se $Gr(A)$ è un dominio normale anche A è un dominio normale.

DIM. Abbiamo già visto (Cap 4, 7.3) che A è un dominio. Per provare la normanlità, in base alla Proposizione precedente bisogna verificare che, se a/b è integrale su A allora $a/b \in A$.

Dobbiamo provare che $a \in bA$. Il teorema di intersezione di Krull, applicato ad A/bA implica che $bA = \cap_k bA + I^k$, quindi bisogna provare che $\forall k$, $a \in bA + I^k$. Facciamolo per induzione e supponiamo che $a \in bA + I^r$, $a = bc + e$, $e \in I^r - I^{r+1}$. e/b è integrale e dobbiamo mostrare che $e \in bA + I^{r+1}$.

Sia $a \to a^*$, $A \to Gr(A)$ l'applicazione che ad un elemento $a \in I_k - I_{k+1}$ associa la sua classe in $Gr(A)$. Poiché $Gr(A)$ è un dominio tale applicazione è moltiplicativa $(ab)^* = a^*b^*$. Per ipotesi esiste $c \in A$, $|\, ce^m \in b^mA$, $\forall m$, $ce^m = b^m a_m$, $a_m \in A$, segue che $c^*(e^*)^m = (b^*)^m a_m^*$, $\forall m$, quindi e^*/b^* è quasi integrale su $Gr(A)$ e per ipotesi quindi esiste $f \in A$ con $e^* = b^*f^*$, ovvero si ha $e = bf + v$, $v \in I_{r+1}$ come desiderato. □

1.18 TEOREMA. *Un anello locale regolare è normale.*

DIM. Segue dal Teorema precedente e da Cap. 4, 7.2 iii). □

2 Anelli di Dedekind

Un dominio locale regolare di dimensione 1 ha una struttura particolarmente semplice, è un *anello di valutazione discreta.*

2.1 Teorema. *Per un dominio locale regolare A di dimensione 1 con ideale massimale P si ha che $P = (a)$ è principale ed ogni ideale è della forma (a^k).*

Ogni elemento f del campo delle frazioni di A si scrive in modo unico come $f = ua^k$, $u \in A^* = A - P$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dim. Dal Teorema 1.11 si ha $P = (a)$. Sia I un ideale, per il teorema di Krull abbiamo $\cap_i (a^i) = 0$ ed esiste un k massimo intero per cui $I \subset (a^k)$. $I = a^k J$ dove J è un ideale e $a \notin J$. Dunque $J = A$ e $I = (a^k)$.

Ogni elemento di A si scrive in modo unico come ua^k, $k \in \mathbb{N}$ da cui l'enunciato segue immediatamente $\square$

Scritto $f = ua^k$, $u \in A^* = A - P$, $k \in \mathbb{Z}$ il numero k è detto *valutazione $P-$adica* di f, ed indicato con $v_P(a)$. Se $a = 0$ poniamo $v_P(0) := \infty$.

La funzione $a \to v_P(a)$, $F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{gathered} v_P(ab) = v_P(a)v_P(b), \quad v_P(a) < v_P(b) \implies v_P(a+b) = v_P(a), \\ v_P(a) = v_P(b) \implies v_P(a+b) \geq v_P(a), \quad A = \{a \in F \,|\, v_P(a) \geq 0\}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Una funzione che soddisfi le precedenti identità si chiama *valutazione discreta*, l'insieme dei valori presi è un sottogruppo additivo di $\mathbb{Z}$ e quindi è della forma $h\mathbb{Z}$, $h \geq 0$.

L'insieme $A = \{a \in F \,|\, v_P(a) \geq 0\}$ è un anello locale regolare di ideale massimale $P = \{a \in F \,|\, v_P(a) > 0\}$. Se v_P non è costante uguale a 0, $A \neq F$,$P \neq 0$ è principale generato da un elemento a per cui $v_P(a) = h$.

Se A è un dominio normale, per ogni ideale primo P di altezza 1 abbiamo che A_P è un dominio di valutazione discreta ed abbiamo la valutazione $v_P(a)$. Il teorema 1.13 implica che $A = \{f \in F \;\; v_P(f) \geq 0, \; \forall P, \; ht(P) = 1\}$. D'altra parte, poiché abbiamo un numero finito di primi minimali su a (tutti di altezza 1), abbiamo che, per ogni $f = a/b \in F$, $v_P(f) = 0$, $\forall P$, $ht(P) = 1$ tranne un numero finito di primi.

2.4 Definizione. *Un dominio normale di dimensione 1 si dice dominio di Dedekind.*

I dominio di Dedekind hanno delle proprietà molto particolari, per definizione i primi non nulli sono di altezza 1 e massimali. Se I è un ideale di A e P un ideale massimale abbiamo A_P locale con ideale massimale generato da un elemento a_P e necessariamente $IA_P = (a_P^k)$, $k \in \mathbb{N}$ per ogni P, infine per ogni tale P si ha $PP^{-1} = A$. Inoltre se $I \neq 0$ abbiamo che A/I è un anello di dimensione 0 e quindi I è contenuto solo in un numero finito di ideali massimali $P_1, \ldots, P_m$. Supponiamo sunque che $IA_{P_t} = (a_{P_t}^{k_t})$, $t = 1, \ldots, m$ consideriamo l'ideale $J = \prod_{t=1}^m P_t^{k_t}$.

2.5 Teorema. *Se $I \neq 0$ è un ideale di A si ha $I = \prod_{t=1}^m P_t^{k_t}$, il prodotto varia sui $P \supset I$ e $IA_{P_t} = (a_{P_t}^{k_t})$, $t = 1, \ldots, m$.*

Dim. Osserviamo prima di tutto che, poiché i P_i sono massimali abbiamo $\prod_{t=1}^m P_t^{k_t} = \cap_{t=1}^m P_t^{k_t} \supset I$, quindi $I \prod_{t=1}^m P_t^{-k_t} \subset A$.

D'altra parte, per ogni P abbiamo $(I\prod_{t=1}^{m} P_t^{-k_t})A_P = A_P$ da cui $I\prod_{t=1}^{m} P_t^{-k_t} = A$, moltiplicando per $\prod_{t=1}^{m} P_t^{k_t}$, si ha $I = \prod_{t=1}^{m} P_t^{k_t}$,.

$\square$

Dati due ideali non nulli I, J di A l'insieme IJ^{-1} è detto *ideale frazionario* di A, da quanto visto fino ad ora per A un dominio di Dedeking l'insieme degli ideali frazionari è un gruppo abeliano libero con base i primi massimali. L'anello A è a fattorizzazione unica se e solo se tutti gli ideali P_i e quindi tutti gli ideali sono principali.[1] In generale gli ideali principali frazionari formanu un sottogruppo del gruppo degli ideali, il gruppo quoziente misura di quanto l'anello non sia a fattorizzazione unica, viene detto *gruppo delle classi di ideali.* In teoria dei numeri gli anelli di Dedekind appaiono come interi algebrici in una estensione finita di $\mathbb{Q}$ ed in questo caso è noto che il gruppo delle classi è finito.

3 Normalizzazione

Dato un dominio A con campo delle frazioni F sappiamo che l'insieme $\overline{A}$ degli elementi di F integrali su A è un sottoanello, la chiusura integrale di A. nel caso in cui $\overline{A}$ è Noetheriamo diremo che è la *normalizzazione* di A. In generale A Noetheriano non implica che $\overline{A}$ è Noetheriamo. Questo avviene in casi geometrici o aritmetici.

3.1 Proposizione. *Sia A un dominio normale con campo delle frazioni F. $E \supset F$ una estensione finita separabile di F e B la chiusura integrale di A in E. B è un modulo di tipo finito su A.*

Dim. Evidentemente ogni elemento $u \in E$ è algebrico su A e quindi esiste un $0 \neq a \in A$ con au integrale su A. In particolare esiste una base di E su F , $u-1, \ldots, u_n$ fatta da elementi integrali.

Se $u \in E$ è integrale su A si ha che $Tr(u) := Tr_{E/K}(u) \in A$ in quanto in F ed integrale su A. Pertanto se $u \in E$ è integrale su A si ha che $u = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i,\ b_i \in F$ e $Tr(uu_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i Tr(u_i u_j) \in A, \forall j$. Poichè la forma di traccia è non degenere si ha che il determinante $d := \det(Tr(u_i u_j))$ della matrice della forma nella base data, è non 0 e dalla regola di Cramer $db_i \in A,\ dB \subset \sum_i Au_i$. Pertanto B è isomorfo ad un sottomodulo di un modulo finitamente generato ed è quindi finitamente generato. $\square$

Corollario. *Sia $A = K[a_1, \ldots, a_m]$ un dominio finitamnte generato su un campo di caratteristica 0, allora la chiusura integrale B di A nel suo campo delle frazioni F è un $A-$modulo di tipo finito.*

Dim. Dal lemma di normalizzazione A è un modulo di tipo finito su un anello di polinomi $C = K[x_1, \ldots, x_n]$, se E è il campo delle frazioni di C si ha $[F : E] < \infty$ e B è la chiusura integrale di C nel campo F a cui si applica la proposizione precedente. $\square$

Ora vogliamo vedere che il precedente corollario si può rafforzare notevolmente.

[1] In inglese un tale anello è detto P.I.D. principal ideal domain.

3.2 Teorema. *Sia $A = K[a_1, \ldots, a_m]$ un dominio finitamente generato su un campo K ed F il suo campo delle frazioni. Data $E \supset F$ una estensione finita di F e B la chiusura integrale di A in E, B è un modulo di tipo finito su A.*

Dim. La dimostrazione inizia come nel corollario precedente. Dal lemma di normalizzazione A è un modulo di tipo finito su un anello di polinomi $C = K[x_1, \ldots, x_n]$ e sia L il campo delle frazioni di C. Come prima cosa estendiamo E ad una estensione quasi Galoisiana M di L. Poiché $M \supset E$, $[M : L] < \infty$ è sufficiente provare che la chiusura integrale di C in M è un C modulo finitamente generato.

Ora possiamo costruire il campo intermedio $M \supset P \supset L$ con $M \supset P$ separabile e $P \supset L$ puramente inseparabile. Dalla Proposizione 3.1 basta quindi provarlo nel caso di $P \supset L$ puramente inseparabile. Siano $a_1, \ldots, a_k$ generatori di P su L con $f_i(x) := a_i^{p^m} \in L$. Estraiamo i coefficienti p^m esimi di tuttti i coefficienti delle funzioni razionali f_i ottenendo un campo K' di dimensione finita su K. Poi estraiamo tutte le potenze p^m esime delle variabili x_i e costuiamo $K'[y_1, \ldots, y_n]$, $y_i^{p^m} = x_i$. In $K'(y_1, \ldots, y_n)$ abbiamo $f_i(x) = g_i(y)^{p^m}$ e quindi (poichè in una chiusura algebrica una radice p^k-esima di un elemento è unica), $P \subset K'(y_1, \ldots, y_n)$ e la chiusura integrale di $C = K[x_1, \ldots, x_n]$ in P è contenuta in $K'[y_1, \ldots, y_n]$ che è evidentemente un C modulo di tipo finito. $\square$

4 Anelli di Cohen Macaulay

La teoria che segue è una estensione e formalizzazione delle idee legate al Teorema di unmixedness di Macaulay.

Si tratta del seguente fatto, supponiamo di dare k equazioni algebriche

$$f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_m) \in K[x_1, \ldots, x_m],$$

a coefficienti in un campo K algebricamente chiuso. Sappiamo che la varietà V data dalle equazioni $f_i = 0$ ha la proprietà che ogni sua componente irriducibile ha codimensione $\leq k$. Diremo che V è una *intersezione completa schematica* se la codimensione è esattamente k.

Il termine schematico si riferisce al fatto che non assumiamo necessariamente che l'ideale I generato dalle f_i sia radicale. In questo ultimo caso si parla semplicemente di intersezione completa.

Il Teorema di unmixedness di Macaulay asserisce che se per ogni i la varietà V_i data dall'annullarsi delle prime i fra le equzioni f_j è una *intersezione completa schematica* tutti i primi associati all'anello $K[x_1, \ldots, x_m]/I$ sono minimali, ovvero la intersezione non ha componenti immerse.

Sappiamo da analisi fatte nel caso geometrico che, se V è una sottovarietà irriducibile di codimensione k si può almeno trovare una successione di equazioni:
$f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_m) \in K[x_1, \ldots, x_m]$, in modo tale che ogni V_i sia intersezione completa schematica e che V sia una componente della intersezione V_k.

Per la formalizzazione generale si parte da una analisi locale, dalla analisi fatta nel §5 si ha che, dato un sistema di parametri $f_1, \dots, f_n$ in un anello Noetheriano locale di dimensione n, l'anello $A/(f_1, \dots, f_n)$ è Artiniano ed il graduato associato alla filtrazione $I-$adica con $I = (f_1, \dots, f_n)$ è quoziente dell'anello dei polinomi $A/I[x_1, \dots, x_n]$.

4.1 Definizione. *Un anello locale Noetheriano è detto di Cohen Macaulay se per un sistema di parametri $f_1, \dots, f_n$ il graduato associato alla filtrazione $I-$adica con $I = (f_1, \dots, f_n)$ è l'anello dei polinomi $A/I[x_1, \dots, x_n]$.*

Un caso speciale si ha se A è regolare, ma esistono moltissimi anelli di Cohen Macaulay non regolari. La proprietà di di Cohen Macaulay è una delle migliori per controllare una singolarità. Per il momento sospendiamo la precedente definizione e procediamo in modo diverso, in modo tale che questa precedente definizione diventi un Teorema.

Il modo migliore per analizzarla è come al solito estenderla ad i moduli.

4.2 Definizione. *Dato un anello A un ideale I di A ed un modulo M con $IM \neq M$ una successione di elementi $a_1, a_2, \dots, a_m \in I$ si dice $I-$regolare su M se per ogni $i = 0, \dots, m-1$ posto $M_i := M/(a_1, a_2, \dots, a_i)M$ si ha che a_{i+1} non è divisore di 0 in M_i.*

Una successione $I-$regolare su M, $a_1, a_2, \dots, a_m \in I$ si dice massimale se non esiste $a_{m+1} \in I$ con $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$ regolare su M.

Dalla definizione è evidente che la catena di ideali $(a_1, a_2, \dots, a_i)$ è strettamente crescente, pertanto se A è Noetheriano esistono sempre successioni regolari finite e massimali.
In generale l'ordine in cui si prendono gli elementi di una successione regolare è importante.
Esempio nell'anello dei polinomi in 3 variabili $A = M = k[x, y, z],\ I = (x, y, z)$:

$$(x-1)z,\ x,\ (x-1)y$$

è una successione regolare, mentre $(x-1)y$ è un divisore di 0 modulo $(x-1)z$.

Vale però il seguente:

4.3 Lemma. *Sia a, b una successione $I-$regolare su M.*
i) a non è divisore di 0 in M/bM.

ii) b, a è una successione $I-$regolare su M se e solo se b non è divisore di 0 in M.

Dim. La seconda parte segue ovviamente dalla prima. Per i) siano $m, n \in M$ con $am = bn$ dobbiamo provare che $m \in bM$.

Poichè b non è divisore di 0 modulo a si deve avere $n = ap,\ p \in M$ da cui $am = bap,\ a(m - bp) = 0$. Poichè a non è divisore di 0 in M si ha $m - bp = 0, m = bp$. □

Osserviamo prima di tutto che l'esistenza di un elemento in I che non sia divisore di 0 su M equivale alla proprieà che I non sia contenuto nell'insieme dei divisori di 0 di M. Introduciamo la notazione:

$$\mathcal{Z}(M), \quad \text{insieme dei divisori di 0 su } M. \tag{4.4}$$

Se A è Noetheriano ed M un $A-$modulo di tipo finito, $\mathcal{Z}(M) = \cup_i P_i$ è unione finita di ideali primi associati, che sono gli annullatori massimali. Quindi ogni elemento in I è divisore di 0 su M se e solo se $I \subset P_i$ per qualche i, se e solo se esiste $0 \neq m \in M$ con $Im = 0$.

Il primo Teorema notevole è il seguente:

4.5 Teorema. *Sia A un anello Noetheriano, I un ideale, ed M un $A-$modulo di tipo finito con $IM \neq M$.*

Due successioni $I-$regolari e massimali su M hanno la stessa lunghezza.

Dim. Basta dimostrare il seguente enunciato: se $a_1, a_2, \ldots, a_m$ è $I-$regolare massimale su M e $b_1, b_2, \ldots, b_m \in I$ è $I-$regolare su M, allora è massimale.

Proviamo l'enunciato per induzione su m.

Prima di tutto il caso $m = 1$. Se a è $I-$regolare massimale su M e b un non divisore di 0 su M, si ha che ogni elemento in I è divisore di 0 su M/aM pertanto esiste un $m \notin aM$ con $Im \subset aM$. In particolare $bm = an$, osserviamo che $n \notin bM$ altrimenti se $n = bp$ si ha $m = ap$ (poiché b non è divisore di 0), una contraddizione.

Ora se $i \in I$ abbiamo $ain = bim \in baM$ ovvero $ain = abq$ da cui $in = bq$ e $In \subset bM$ implica che I è formato da divisri di 0 in M/bM e b è massimale.

Per il caso generale procediamo per induzione. Consideriamo l'insieme finito dei primi associati ai moduli $M/(a_1, a_2, \ldots, a_i)M$, $M/(b_1, b_2, \ldots, b_i)M$, $i \leq m$. Per ipotesi I ha un non divisore di 0 in ciascuno di tali moduli e quindi non è contenuto nell'unione di tali primi. Sia dunque $z \in I$ un elemento non divisore di 0 in tutti questi moduli. Dal caso $m = 1$ segue che $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, z$ è $I-$regolare massimale su M e $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}, z \in I$ è $I-$regolare su M. Dal lemma 4.3 iterato $m-1$ volte deduciamo che $z, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ è $I-$regolare massimale su M e $z, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ è $I-$regolare su M. Applicando l'induzione a M/zM deduciamo che $z, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ e quindi anche $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}, z$ è massimale. Di nuovo il caso $m = 1$ applicato a $M/(b_1, b_2, \ldots, b_{m-1})M$ mostra che $b_1, b_2, \ldots, b_m$ è massimale. □

4.6 Definizione. *Dati A un anello Noetheriano, I un ideale, ed M un $A-$modulo di tipo finito con $IM \neq M$ la lunghezza di una qualunque $I-$successione regolare massimale si chiama* **profondità** *di I su M, denotata con $Pf(I, M)$.*[2]

4.7 Teorema. *Dati A un anello locale Noetheriano, I un ideale proprio, ed M un $A-$modulo di tipo finito si ha :*

$$Pf(I, M) \leq \dim_K M. \tag{4.8}$$

Dim. Dal Cap 4, 6.2 si ha che, se a è un non divisore di 0 su M, $\dim_K M/aM < \dim_K M$ per cui la diseguaglianza segue per induzione.

□

[2] Vi sono molte terminologie in letteratura per questo concetto *codimensione, grado, profondità.*

4.9 Definizione. *Dati A un anello locale Noetheriano, I il suo ideale massimale, ed M un $A-$modulo di tipo finito si dice che M è un $A-$modulo di* **Cohen Macaulay** *se* $Pf(I, M) = \dim_K M$.

In generale dati A un anello Noetheriano, ed M un $A-$modulo di tipo finito si dice che M è un $A-$modulo di Cohen Macaulay se $M_{\underline{m}}$ è un $A-$modulo di Cohen Macaulay per ogni ideale massimale $\underline{m}$ di A.

Un anello Noetheriano A si dice di Cohen Macaulay se lo è come modulo su se stesso.

D'ora in avanti abbrevieremo Cohen Macaulay con C-M.

ESEMPI Un anello regolare è di C-M, in particolare un anello di Dedekind e $\mathbb{Z}$ sono di C-M.

Vogliamo ora discutere la *unmixedness*.

Dato un modulo M di tipo finito su un anello Noetheriano A, sia $Ass(M)$ l'insieme dei primi associati, sappiamo che $\dim_K M = \max \dim A/P,\ P \in Ass(M)$. Poniamo

$$d(M) := \min \dim A/P,\ P \in Ass(M), \qquad \textit{piccola dimensione}$$

e ci chiediamo sotto quali condizioni si ha $d(M) = \dim_K M$, ovvero per tutti i primi associati P si abbia $\dim_K M = \dim_K A/P$. In questo caso si dice che il modulo M è *unmixed*. In particolare questa condizione implica che tutti i primi associati sono minimali sull'annullatore di M. In un anello usualmente si dice che un ideale I è unmixed se il modulo A/I lo è. In questo caso tutti i primi della decomposizione primaria sono minimali ed hanno la stessa dimensione.

4.10 Lemma. *Dato un modulo M di tipo finito su un anello locale Noetheriano A di ideale massimale $\underline{m}$, $a \in \underline{m}$ un non divisore di 0 in M, allora $d(M/aM) < d(M)$.*

Dim. Sia $P \in Ass(M)$, tale che $\dim_K A/P = d(M)$ e sia $m \in M$ un elemento il cui annullatore è P. Poiché $\cap_i a^i M = 0$ esiste un r con $m = a^r n,\ n \notin aM$. Poiché a è un non divisore di 0 in M si ha $P = Ann(n),\ a \notin P$ e quindi in M/aM si ha che $P + (a)$ annulla l'elemento non zero classe di n. Quindi esiste un primo $Q \in Ass(M/aM),\ Q \supset P + (a)$ da cui $d(M/aM) \leq \dim_K A/Q < \dim_K A/P = d(M)$. $\square$

Corollario. *Dati A un anello locale Noetheriano, I il suo ideale massimale, ed M un $A-$modulo di tipo finito si ha* $\dim_K(M) \geq d(M) \geq Pf(I, M)$.

Dim. Per induzione. Sia $r = Pf(I, M)$ ed $a_1, \ldots, a_r$ una successione regolare.

Si ha che $d(M) > d(M/a_1M)$ per il Lemma precedente e per induzione $d(M/a_1M) \geq r - 1$ da cui $d(M) \geq r$. $\square$

4.11 Teorema. *Dati A un anello locale Noetheriano, I il suo ideale massimale, ed M un $A-$modulo di tipo finito di C-M si ha* $\dim_K M = d(M) = Pf(I, M)$.

Dim. Segue dal precedente corollario.

$\square$

In particolare sia A un anello locale di C-M di dimensione d. Tutti i primi P associati a 0 sono tali che $\dim A/P = d$ ed in particolare sono minimali.

4.12 Teorema. *Dati A un anello locale Noetheriano di C-M di dimensione d, I il suo ideale massimale. Ogni sistema di parametri $a_1, \ldots, a_d$ è una successione regolare e per ogni i l'anello $A/(a_1, \ldots, a_i)$ è di C-M di dimensione $d - i$.*

Viceversa se A un anello locale Noetheriano di dimensione d, I il suo ideale massimale e $a_1, \ldots, a_i \in I$ è una successione regolare per cui l'anello $A/(a_1, \ldots, a_i)$ è di C-M anche A è di C-M.

Dim. Segue dal precedente corollario per induzione. Infatti per un tale sistema di parametri $\dim_K A/(a_1, \ldots, a_i) = d - i$. Supponiamo per induzione $A/(a_1, \ldots, a_i)$ di C-M, poché $\dim_K A/(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}) = d - i - 1$ l'elemento a_{i+1} non è contenuto nei primi minimali. Poiché questi sono tutti i primi associati si ha che a_{i+1} non è divisore di 0 in $A/(a_1, \ldots, a_i)$.

Per il viceversa completiamo $a_1, \ldots, a_i$ ad una successione regolare massimale $a_1, \ldots, a_d$ sollevando un sistema di parametri di $A/(a_1, \ldots, a_i)$. Abbiamo dunque un sistema di parametri di A che è una successione regolare e quindi A è di C-M. □

Possiamo ora ritornare alla idea iniziale (4.1) di C-M, proviamo prima un semplice lemma.

4.13 Lemma. *Dati A un anello e $a \in A$ un elemento non divisore di 0 con $aA \neq A$ (ovvero non invertibile) preso l'anello graduato $Gr_{aA}(A) := \oplus_{i=0}^{\infty} a^i A/a^{i+1}A$ si ha un isomorfismo fra $Gr_{aA}(A)$ e l'anello dei polinomi $A/aA[x]$*

Dim. L'omomorfismo $\pi : A/aA[x] \to Gr_{aA}(A)$ è quello evidente, l'identità siu A/aA a manda x nella classe di $a \in aA/a^2A$. È un morfismo suriettivo e bisogna dimostrare che è iniettivo. Poiché π è un morfismo di anelli graduati basta prendere un elemento omogeneo $\overline{b}x^i$, $b \in A$, $\overline{b} \in A/aA$ del nucleo di π e provare che è 0. per ipotesi $\pi(\overline{b}x^i) = 0$ significa $ba^i \in a^{i+1}A$ ovvero $ba^i = a^{i+1}c$ da cui essendo a un non divisore di 0 si ha $b = ac$ e quindi $\overline{b} = 0$. □

Dobbiamo introdurre una nozione ausiliaria.

4.14 Definizione. *Data una successione $a_1, \ldots, a_k \in A$ e sia $I := (a_1, \ldots, a_k)$ diremo che $a_1, \ldots, a_k$ è* **quasi regolare** *se, per ogni $r \geq 1$ vale la condizione:*
(Q-r): dato comunque un polinomio omogeneo
$F(x_1, \ldots, x_k) \in A[x_1, \ldots, x_k]$ di grado ≥ 1, se $F(a_1, \ldots, a_k) \in I^{k+1}$ si ha
$F(x_1, \ldots, x_k) \in I[x_1, \ldots, x_k]$.

Poiché ogni elemento di I^{k+1} si può scrivere come $F(a_1, \ldots, a_k)$ con $F(x_1, \ldots, x_k) \in I[x_1, \ldots, x_k]$ un polinomio di grado k la condizione precedente è equivalente a:

(Q'-r): Dato comunque un polinomio omogeneo $F(x_1, \ldots, x_k) \in A[x_1, \ldots, x_k]$ di grado r, se $F(a_1, \ldots, a_k) = 0$ si ha $F(x_1, \ldots, x_k) \in I[x_1, \ldots, x_k]$.
Infine

4.15 Lemma. *Una successione* $a_1, \ldots, a_k \in A$ *è quasi regolare se e solo se detto* $I := (a_1, \ldots, a_k)$ *il greduato* $Gr_I(A)$ *è l'anello dei polinomi su* A/I *nelle classi degli elementi* a_i*.*

Dim. Questa è in pratica una riformulazione della definizione, dato che per costruzione $Gr_I(A)$ è generato su A/I dalle classi $\overline{a}_i$ degli elementi a_i, la questione è la loro indipendenza algebrica. Le classi classi $\overline{a}_i$ sono dipendenti se esiste un polinomio omogeneo $\overline{F}(x_1, \ldots, x_k) \in A/I[x_1, \ldots, x_k]$ non nullo con $\overline{F}(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k) = 0$, ovvero se esiste un polinomio omogeneo $F(x_1, \ldots, x_k) \in A[x_1, \ldots, x_k]$ di grado r con $F(a_1, \ldots, a_k) \in I^{r+1}$ e $F(x_1, \ldots, x_k) \notin I[x_1, \ldots, x_k]$. □

4.16 Lemma. *Sia* $a_1, \ldots, a_k \in A$ *una successione quasi regolare. Se* $b \in A$ *non è divisore di 0 modulo* I *allora per ogni* r *si ha che* b *non è divisore di 0 modulo* I^r*.*

Dim. Per induzione su r se $ab = 0$, modulo I^r ovvero $ab \in I^r$ si ha per induzione che $a \in I^{r-1}$, in particolare esiste un polinomio $F(x_1, \ldots, x_k) \in A[x_1, \ldots, x_k]$ di grado $r - 1$ con $F(a_1, \ldots, a_k) = a$ e poiché $ab \in I^r$ il polinomio $bF(x_1, \ldots, x_k)$ ha per ipotesi sulla successione i coefficienti in I, poiché b non è divisore di 0 modulo I ne segue che $F(x_1, \ldots, x_k)$ ha i coefficienti in I e quindi $a \in I^r$. □

4.17 Lemma. *Se* $a_1, \ldots, a_k \in A$ *è una successione regolare allora è anche quasi regolare.*

Se $a_1, \ldots, a_k$ *sono nel radicale di* A *è vero anche il viceversa.*

Dim. Per induzione, possiamo supporre che $a_1, \ldots, a_{k-1}$ è quasi regolare. Proveremo la quasi regolarità secondo la sua seconda formulazione.

Per induzione sul suo grado, supponiamo valida (Q-s) o equivalentemente (Q'-s) per $s < r$, dato un polinomio omogeneo $F(x_1, \ldots, x_k) \in A[x_1, \ldots, x_k]$ di grado r, con

$F(a_1, \ldots, a_k) = 0$ proviamo che $F(x_1, \ldots, x_k) \in I[x_1, \ldots, x_k]$.

Scriviamo $F(x_1, \ldots, x_k) = G(x_1, \ldots, x_{k-1}) + x_k H(x_1, \ldots, x_k)$ abbiamo, $G(a_1, \ldots, a_{k-1}) = -a_k H(a_1, \ldots, a_k)$ da cui $0 = -a_k H(a_1, \ldots, a_k)$ modulo $(a_1, \ldots, a_{k-1})^k$.

Per ipotesi a_k non è divisore di 0 modulo $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ e per induzione $a_1, \ldots, a_{k-1}$ quasi regolare implica che a_k non è divisore di 0 modulo $(a_1, \ldots, a_{k-1})^r$.

Da questo segue che $H(a_1, \ldots, a_k) \in (a_1, \ldots, a_{k-1})^r$.

Ne deduciamo due conseguenze: esiste un polinomio $h(x_1, \ldots, x_{k-1})$ omogeneo di grado r con $H(a_1, \ldots, a_k) = h(a_1, \ldots, a_{k-1})$.

Per induzione sul grado $H(x_1, \ldots, x_k) \in I[x_1, \ldots, x_k]$.

Riscriviamo quindi $G(a_1, \ldots, a_{k-1}) + a_k h(a_1, \ldots, a_{k-1}) = 0$.

Essendo $a_1, \ldots, a_{k-1}$ quasi regolare segue che $G(x_1, \ldots, x_{k-1}) + a_k h(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in J[x_1, \ldots, x_{k-1}]$ con $J := (a_1, \ldots, a_{k-1})$. D'altra parte ovviamente $a_k h(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in I[x_1, \ldots, x_{k-1}]$ da cui segue essendo $J \subset I$ che $G(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in I[x_1, \ldots, x_{k-1}]$.

Poiché abbiamo già dimostrato che $H(x_1, \ldots, x_k) \in I[x_1, \ldots, x_k]$ ne deduciamo che $F(x_1, \ldots, x_k) \in I[x_1, \ldots, x_k]$.

Per il viceversa cominciamo con notare che la condizione implica che $a_1 b = 0$ implica $b \in I$, da questo segue che se $b \in I^r$ anche $b \in I^{r+1}$ e quindi per il teorema di Krull, $b = 0$.

Quindi per induzione basta provare che modulo a_1 gli elementi $a_2, \ldots, a_k$ sono una successione quasi regolare. Sia dunque $F(x_2, \ldots, x_k) \in A[x_2, \ldots, x_k]$ un polionomio di grado s, tale che $F(a_2, \ldots, a_k) = a_1 b \in a_1 A$. Vogliamo provare per induzione che $b \in I^{s-1}$. Se per qualche $r < s-1$ si ha $b \in I^r$ si ha $b = H(a_1, \ldots, a_k)$ per qualche polinomio H di grado r, e $F(a_2, \ldots, a_k) - a_1 H(a_1, \ldots, a_k) = 0$. Poichè $r < s-1$ il grado del polinomio $x_1 H(x_1, \ldots, x_k)$ è minore di s e valutato nelle a_i ha valore in I^s. Si deduce per la ipotesi di quasi regolarità, che $H(x_1, \ldots, x_k) \in I[x_1, \ldots, x_k]$ e quindi $b \in I^{r+1}$, pertanto per induzione $b \in I^{s-1}$ e $b = H(a_1, \ldots, a_k)$ per qualche polinomio H di grado $s-1$. Ora però $F(x_2, \ldots, x_k) - x_1 H(x_1, \ldots, x_k)$ è omogeneo di grado s e $F(a_2, \ldots, a_k) - a_1 H(a_1, \ldots, a_k) = 0$. Segue (per la quasi regolarità) che $F(x_2, \ldots, x_k) - x_1 H(x_1, \ldots, x_k) \in I[x_1, \ldots, x_k]$. Poiché x_1 non compare in $F(x_2, \ldots, x_k)$ se ne deduce $F(x_2, \ldots, x_k) \in I[x_1, \ldots, x_k]$ che conclude la prova.

Sia ora □

4.18 Teorema. *In anello locale Noetheriano di C-M, per ogni sistema di parametri $f_1, \ldots, f_n$ il graduato associato alla filtrazione $I-$adica con $I = (f_1, \ldots, f_n)$ è l'anello dei polinomi $A/I[x_1, \ldots, x_n]$ (e viceversa).*

Dim. È una conseguenza immediata di 4.17 e 4.15. □

Abbiamo visto che in generale non si può scambiare l'ordine in una successione regolare, questo si può fare per un anello locale e segue dalla discussione precedente, vi è anche una dimostrazione diretta elementare.

4.19 Lemma. *Se a, b è una succssione regolare su M ed A è locale, si ha che b non è divisore di 0 su M.*

Dim. Sia $bm = 0$, con $m \neq 0$, poiché $\cap_i a^i M = 0$ esiste un r con $m = a^r n,\ n \notin aM$. Dato che a non è un divisore di 0, da $bm = 0$ si ha $bn = 0$ una contraddizione poiché n induce un elemento non nullo in M/aM mentre b non è un divisore di 0 in M/aM. □

Corollario. *Per un anello locale una permutazione di una successione regolare è regolare.*

Dim. Ogni permutazione si ottiene iterando scambi di elementi adiacenti, quindi basta usare il Lemma precedente e 4.3 i). □

Vogliamo discutere una applicazione interessante di queste idee. Sia A un algebra graduata finitamente generata su un campo $K = A_0$. Consideriamo l'ideale massimale $A_+ := \oplus_{I>0} A_i$ e supponiamo che $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sia una successione regolare in A_+ con $k := \dim_K A/(f_1, f_2, \ldots, f_m) < \infty$, in particolare gli f_i sono un sistema di parametri di A_+. Siano $u_1, \ldots, u_k \in A$ elementi omogenei che formino una base modulo $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ di $A/(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ come spazio vettoriale su K allora:

4.20 TEOREMA. *L'anello $K[f_1, f_2, \ldots, f_m]$ è un anello di polinomi in m variabili e A è un modulo libero su $K[f_1, f_2, \ldots, f_m]$ con base gli elementi u_i*

DIM. Sappiamo che il graduato associato all'ideale $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ è un anello di polinomi $A/I[x_2, \ldots, x_n]$, da cui l'enunciato segue facilmente. $\square$

Lasciamo anche al lettore di verificare che se f_i è un elemento di grado d_i e u_j è un elemento di grado a_j ne segue che la serie di Hilbert di A è:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} t^{a_i}}{\prod_{j=1}^{m}(1 - t^{d_j})}$$

Facciamo qualche utile ossrvazione sul caso graduato. In genere vi è un *metaprincipio* che indica che, un algebra graduata A finitamente generata su un campo $K = A_0$ con ideale massimale omogeneo $M = \sum_{i>0} A_i$, si comporta, rispetto ad oggetti graduati, come un anello locale con il suo ideale massimale.

Vediamo un primo Lemma.

4.21 LEMMA. *Sia A un algebra graduata, M un modulo graduato, i primi associati di M sono omogenei.*

DIM. Sia P un primo associato, P annullatore di $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_h = v_1 + v'$. Proviamo per induzione che è anche annullatore di un elemento omogeneo. Se $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_k \in P$ abbiamo $u_1 v_1 = 0,\ u_1 v = u_1 v_2 + \cdots + u_1 v_h$. Se $u_1 v \neq 0$ si ha che P (che è primo) è anche annullatore di $u_1 v$ e si procede per induzione, altrimenti $u_2 + \cdots + u_k \in P$ e si procede di nuovo per induzione (su k) $\square$

4.22 LEMMA. *Sia A un algebra graduata, M un modulo graduato e $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$ un divisore di 0 di M, decomposto nelle sue componenti omogenee, allora ogni u_i è un divisore di 0 di M.*

DIM. Segue dal lemma precedente. $\square$

4.23 TEOREMA. *Sia A un algebra graduata (finitamente generata), M un modulo graduato e I ideale omogeneo. Esiste una successione regolare massimale in I i cui elementi sono omogenei.*

DIM. Per induzione, basta far vedere che, se esiste un non divisore di 0 su M ne esiste uno omogeneo. Siano $h_i,\ i = 1, \ldots, k$ i gradi dei generatori a_i di I ed m un minimo comune multiplo, se lo spazio I_m è formato tutto da divisori di 0 allora I_m è contenuto in un primo associato P. Per ogni i si ha per $m = h_i k_i$ che $a_i^{k_i} \in I_m \subset P$ e quindi $I \subset P$ è formato da divisori di 0. $\square$

Ragioniamo ora in modo più geometrico, supponiamo che K sia un campo infinito.

Se G è un gruppo A un anello M un modulo, una azione di G su A è semplicemente una azione di G che sia formata da automorfismi di A una azione di G su M compatibile con la azione data è una azione per cui $g(am) = g(a)g(m)$.

Se $M = \oplus_i M_i$ è un modulo graduato, definiamo per $k \in K^*$ la trasformazione $t(k) : M \to M$ data da $t(k)m = k^i m$, $m \in M_i$. Abbiamo le proprietà di simmetria, che esprimono che il gruppo K^* agisce come un gruppo di automorfismi di A e su M in modo compatibile con l'azione su A:

$$t(k)(am) = t(k)(a)t(k)(m), \quad a \in A,\ m \in M, \quad t(hk) = t(h)t(k) \tag{4.24}$$

Poichè K è infinito abbiamo il:

4.25 Lemma. *Un $K-$sottospazio $N \subset M$ è omogeneo se e solo se è stabile per l'azione di K^*.*

Dim. In unverso è ovvio. Sia N sytabile e $n = \sum_{i=a}^{b} n_i,\ n_i \in M_i$. Si ha $t(k)n = \sum_{i=a}^{b} k^i n_i \in N$. Prendiamo tanti k_j distinti, quanti sono i termini $b - a$ e pensiamo a lle relazioni $t(k_j)n = \sum_{i=a}^{b} k_j^i n_i$ come ad un sistema lineare di equazioni, che si risolve in quanto il determinante della matrice è essenzialmente un determinante di Vandermonde diverso da 0. □

Applichaimolo in particolare all'anello A, abbiamo che se un ideale primo è K^* stabile allora è omogeneo, se è massimale omogeneo deve essere necessariamente $A^+ := \sum_{i>0} A_i$. Geometricamente possiamo dire che K^* opera su $Spec(A)$ come un gruppo di omeomorfismi ed ha un unico punto fisso chiuso, l'ideale A^+. Ne segue che,

4.26 Teorema. *Se U è un aperto di $Spec(A)$ che sia stabile rispetto a K^* e $A^+ \in U$ allora $U = Spec(A)$.*

Dim. Sia il complemento di U il chiuso $V(I)$ dove per I prendiamo il suo ideale di definizione. Per ipotesi è stabile rispetto a K^* e quindi é omogeneo. Se $I \neq A$ si deve dunque avere che $I \subset A^+$ e quindi $A^+ \in V(I)$ contro la ipotesi. Pertanto $I = A$ e $V(I) = \emptyset$. □

Il precedente teorema si applica nel modo seguente, se abbiamo una varietà (o uno schema affine) V il cui anello delle coordinate è graduato, ovvero un cono, e vogliamo studiare una qualche proprietà geometrica dei sui punti, se questa proprietà è una proprietà aperta, segue che vale in ogni punto di V se e solo se vale nel *vertice del cono.*

5 Caratterizzazioni omologiche

La prima caratterizzazione interessante è quella fatta tramite i funtori Ext.

5.1 Teorema. *1) Dato un modulo M di tipo finito su un anello Noetheriano A ed un ideale I si ha che la profondità $Pf(I, M)$ è il minimo intero i per cui $Ext^i(A/I, M) \neq 0$.*

2) Piú in generale se N è un modulo finitamente generato, il cui annullatore è I e $I + Ann(M) \neq A$ si ha che $Pf(I, M)$ è il minimo intero i per cui $Ext^i(N, M) \neq 0$. Se $I + Ann(M) = A$ si ha $Ext^i(N, M) = 0,\ \forall i$.

DIM. Cominciamo nel caso $Pf(I, M) = 0$, questo avviene se ogni elemento di I è divisore di 0 in M e dalla teoria dei primi associati questo è equivalente all'esistenza di un $m \in M,\quad m \neq 0$ con $Im = 0$.

Nel caso 1) l'applicazione $a \to am$ induce quindi un omomorfismo non nullo $\phi : A/I \to M$. Viceversa dato un tale omomorfismo $m := \phi(1)$ è non nullo ed annullato da I quindi $Pf(I, M) = 0 \iff Hom(A/I, M) \neq 0$.

Nel caso 2) prima di tutto se $Ann(N) + Ann(M) = A$ si ha che A annulla ogni $Ext^i_A(N, M)$ che quindi è 0. Osserviamo che $Ann(N) + Ann(M) = A$ se e solo se $Ann(N)M = M$, infatti se $Ann(N) + Ann(M) = A$ si ha $M = AM = (Ann(N) + Ann(M))M = Ann(N)M$, viceversa se $Ann(N)M = M$ dal Teorema di Cayley Hamilton esiste un $s \in Ann(N)$ con $(1 - s)M = 0$.

Sia dunque $IN = Ann(N)M \neq M$ e $d < \infty$ la profondità $d := Pf(I, M)$. Se $d = 0$ esiste un primo associato P ad M con $I \subset P$, poiché $hom_{A_P}(N_P, M_P) = hom_A(N, M)_P$ basta provare che $hom_{A_P}(N_P, M_P) \neq 0$ e metterci nel caso locale in cui l'ideale massimale $\underline{m}$ è associato a M. Pertanto $A/\underline{m} \subset M$, ma dal Lemma di Nakayama $N/\underline{m}N \neq 0$. D'altra parte $N/\underline{m}N$ è uno spazio vettoriale su $A/\underline{m}$ e quindi esiste un morfismo non nullo da $N \to N/\underline{m}N$ a $A/\underline{m} \subset M$.

Se $d > 0$ esiste un $a \in I$ che non è divisore di 0 in M. Abbiamo $I(M/aM) \neq M/aM$ e la profondità $Pf(I, M/aM) = d-1$. Per induzione il minimo i per cui $Ext^i_A(N, M/aM) \neq 0$ è $d - 1$. Applichiamo la successione esatta lunga degli Ext dedotta da $0 \to M \xrightarrow{a} M \to M/aM \to 0$ ottenendo esattamente come nel caso 1):

$$Ext^{i-1}(N, M/aM) \to Ext^i(N, M) \xrightarrow{a} Ext^i(N, M) \to$$
$$\to Ext^i(N, M/aM) \to Ext^{i+1}(N, M)$$

Poiché $Pf(I, M/aM) = d - 1$ si ha per induzione

$$Ext^i(N, M/aM) = 0,\ \forall i < d - 1,\ Ext^{d-1}(N, M/aM) \neq 0$$

da cui per $i < d - 1$ le successioni esatte $0 \to Ext^i(N, M) \xrightarrow{a} Ext^i(N, M) \to 0$. Poichè $a \in I, aN = 0$ il morfismo $Ext^i(N, M) \xrightarrow{a} Ext^i(N, M)$ è 0 e quindi $Ext^i(N, M) = 0, i < d$. Ora guardiamo alla successione esatta $0 \to Ext^{d-1}(N, M/aM) \to Ext^d(N, M)$ da cui segue che essendo $Ext^{d-1}(N, M/aM) \neq 0$ si ha $Ext^d(N, M) \neq 0$.

□

DIMENSIONE COOMOLOGICA

La precedente descrizione ha una importante corollario.

Ricordiamo che la dimensione omologica proiettiva di un modulo è la minima lunghezza di una sua risoluzione proiettiva, (può essere infinita). Denotiamo con $pd(M)$ tale dimensione.

5.2 Teorema. *Se M è un modulo finitamente generato su un anello locale di dimensione proiettiva finita si ha:*

$$Pf(A) = Pf(M) + pd(M). \tag{5.3}$$

Dim. Lo facciamo per induzione su $pd(M)$. Se $pd(M) = 0$ si ha che M è libero ed evidentemente $Pf(A) = Pf(M)$.

Sia $s := Pf(A)$ e $\underline{m}$ l'ideale massimale di A. Se $pd(M) > 0$ sia $0 \to N \to A^r \to M \to 0$ esatta, per cui abbiamo $pd(N) = pd(M)-1$ inoltre, per induzione $Pf(A) = Pf(N)+pd(N)$ in particolare $Pf(N) \le Pf(A)$.

Sappiamo che $Pf(M) = \min i \mid Ext^i(A/\underline{m}, M) \neq 0$.

Supponiamo prima di tutto che $pd(M) > 1$ e quindi $pd(N) > 0$ e $t := Pf(N) < s$, il caso $pd(M) = 1$ lo trattiamo a parte.

Dalla successione esatta degli Ext ed il fatto che $Ext^i(A/\underline{m}, A^r) = 0,\ \forall i < s$ segue che $Ext^i(A/\underline{m}, M) = Ext^{i+1}(A/\underline{m}, N)$, se $i + 1 < s$. Ne segue che:

$$Ext^i(A/\underline{m}, M) = 0,\ \forall i < t - 1, \quad Ext^{t-1}(A/\underline{m}, M) = Ext^t(A/\underline{m}, N) \neq 0$$

e $Pf(M) = Pf(N) - 1$.

Trattiamo il caso in cui $pd(M) = 1$ e quindi abbiamo una risoluzione, minimale:

$$0 \to A^h \xrightarrow{u} A^k \to M \to 0$$

in cui la matrice u ha coefficienti in $\underline{m}$. Come prima $Ext^i(A/\underline{m}, M) = 0,\ \forall i < s - 1$, calcoliamo $Ext^{s-1}(A/\underline{m}, M)$ dalla successione esatta:

$$0 \to Ext^{s-1}(A/\underline{m}, M) \to Ext^s(A/\underline{m}, A^h) \xrightarrow{u^*} Ext^s(A/\underline{m}, A^k)$$

dico che $u^* = 0$ e quindi $Ext^{s-1}(A/\underline{m}, M) = Ext^s(A/\underline{m}, A^h) \neq 0$. Si ha

$$Ext^s(A/\underline{m}, A^h) = Ext^s(A/\underline{m}, A)^h, \quad Ext^s(A/\underline{m}, A^k) = Ext^s(A/\underline{m}, A)^k$$

e u^* è una matrice i cui elementi sono ottenuti dagli elementi di matrice $u_{ij} \in \underline{m}$ di u per moltiplicazione $Ext^s(A/\underline{m}, A) \xrightarrow{u_{ij}^*} Ext^s(A/\underline{m}, A)$. Queste moltiplicazioni sono 0 perché $\underline{m}$ annulla $A/\underline{m}$ e quindi $u^* = 0$. □

Il complesso di Koszul

Sia A un anello ed $x \in A$ un elemento, l'applicazione $A \xrightarrow{x} A$ si può pensare parte di un complesso:

$$K(x) := \quad \dots 0 \to \dots \to 0 \to A \xrightarrow{x} A \to 0,\ K_1(x) = A,\ K_0(x) = A,\ K_i(x) = 0,\ \forall i \neq 0, 1$$

Ovvero $K_1(x) = A,\ K_0(x) = A,\ K_i(x) = 0,\ \forall i \neq 0, 1$. È conveniente identificare $K_1(x)$ con il modulo libero Ae su un generatore e. Il differenziale è dunque $d(e) = x$.

La omologia di questo complesso è presto calcolata si ha:

$$H_i(K(x)) = 0,\ \forall i \neq 0, 1, \quad H_1(K(x)) = (0 : x) = \{b \in A \mid bx = 0\},\ H_0(K(x)) = A/xA$$

Preso un modulo M definiamo $K(x, M) := K(x) \otimes_A M$ ovvero

$$K(x, M) := \dots 0 \to \dots \to 0 \to M \xrightarrow{x} M \to 0,$$
$$H_1(K(x, M)) = \{b \in M \mid bx = 0\},\ H_0(K(x, M)) = M/xM$$

Vogliamo iterare la costruzione, dati elementi $x_1, x_2, \dots, x_r \in A$ definiamo:

$$K(x_1, x_2, \dots, x_r) := K(x_1) \otimes_A K(x_2) \otimes_A \dots \otimes_A K(x_r),$$
$$K(x_1, x_2, \dots, x_r, M) := K(x_1, x_2, \dots, x_r) \otimes_A M$$

Il complesso $K(x_1, x_2, \dots, x_r, M)$ è detto *complesso di Koszul*. È bene vederlo in un altro linguaggio, osserviamo che il complesso $K(x_1, x_2, \dots, x_r)$ si può pensare come un algebra graduata, l'algebra esterna, gli elementi della base di $K(x_1, x_2, \dots, x_r)_k$ sono i tensori prodotto di $1, e$, in cui e appare esattamente k volte, ad esempio $1 \otimes e \otimes 1 \otimes 1 \otimes e$ ha grado 2. Si prenda allora il modulo libero $A^r := \oplus_{i=1}^r Ae_i$. Se e appare nelle posizioni $i_1 < i_2 \dots < i_k$, identifichiamo tale tensore con $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, allora come modulo graduato $K(x_1, x_2, \dots, x_r) = \wedge A^r$ e per il differenziale si ha la formula:

$$d(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j x_j e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots e_{i_{j-1}} \wedge e_{i_{j+1}} \dots \wedge e_{i_k}$$

In altre parole d è una derivazione di algebre graduate ($|u|$ denota il grado di u)

$$d(u \wedge v) = d(u) \wedge v + (-1)^{|u|} u \wedge d(v), \quad d(e_i) = x_i. \tag{5.4}$$

Per calcolare l'omologia del complesso di Koszul conviene prima di tutto fare un passo generale. Sia $\underline{L}$ un complesso di $A-$ moduli e consideriamo $K(x) \otimes_A \underline{L}$, abbiamo che $K_0(x) \otimes_A \underline{L}$ è un sottocomplesso con quoziente $K_1(x) \otimes_A \underline{L}$ ovvero:

$$0 \to K_0(x) \otimes_A \underline{L} \to K(x) \otimes_A \underline{L} \to K_1(x) \otimes_A \underline{L} \to 0 \tag{5.5}$$

$K_0(x) \otimes_A \underline{L}$ si può identificare con $\underline{L}$ mentre $K_1(x) \otimes_A \underline{L} = e \otimes \underline{L}$ si può identificare con $\underline{L}$ in cui peró in grado i abbiamo L_{i-1} ed il differenziale viene cambiato di segno alternativamente, tale complesso viene indicato usualmente con $\underline{L}[-1]$ e si ha $H_i(\underline{L}[-1]) = H_{i-1}(\underline{L})$. Pertanto 5.3 si rilegge:

$$0 \to \underline{L} \to K(x) \otimes_A \underline{L} \to \underline{L}[-1] \to 0 \tag{5.6}$$

che da una successione esatta lunga:

$$H_{i+1}(\underline{L}[-1]) \xrightarrow{\delta} H_i(\underline{L}) \to H_i(K(x) \otimes_A \underline{L}) \to H_i(\underline{L}[-1]) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(\underline{L})$$

identifichaimo il morfismo di connessione $H_i(\underline{L}) = H_{i+1}(\underline{L}[-1]) \xrightarrow{\delta} H_i(\underline{L})$. Per definizione prendiamo un ciclo $e \otimes u$ di $\underline{L}[-1]_i$ ovvero $u \in L_i,\ d(u) = 0$, lo solleviamo e calcoliamo il differenziale in $K(x) \otimes_A \underline{L}$ che da $d(e \otimes u) = xu \pm e \otimes d(u) = xu$. Ne segue che si ha una identificazione di δ con la moltiplicazione per x e si deduce la successione esatta lunga:

$$H_i(\underline{L}) \xrightarrow{x} H_i(\underline{L}) \to H_i(K(x) \otimes_A \underline{L}) \to H_{i-1}(\underline{L}) \xrightarrow{x} H_{i-1}(\underline{L})$$

da cui si deduce la successione esatta corta:

$$0 \to H_0(K(x, H_i(\underline{L})) \to H_i(K(x) \otimes_A \underline{L}) \to H_1(K(x, H_{i-1}(\underline{L})) \to 0 \tag{5.7}$$

Corollario. *Se $H_i(\underline{L}) = 0,\ \forall i$ ovvero $\underline{L}$ è aciclico allora $K(x) \otimes_A \underline{L}$ è aciclico.*

Passiamo ora a $K(\underline{x}, M) := K(x_1, x_2, \ldots, x_r, M)$.
Il primo calcolo da fare è $H_0(K(x_1, x_2, \ldots, x_r, M)) = M/(x_1, x_2, \ldots, x_r)M$. In fatti

$$K_1(\underline{x}, M) = \oplus e_i \otimes M,\ K_0(\underline{x}, M) = M,\ d : \oplus e_i \otimes M \to M,\ d(e_i \otimes m) = x_i m.$$

Supponiamo A Noetheriano, M un modulo di tipo finito e le x_i nel radicale di A (ad esempio A locale e le x_i nell'ideale massimale).

5.8 Teorema. *Le condizioni seguenti sono equivalenti:*
1) $H_i(K(x_1, x_2, \ldots, x_r, M)) = 0,\ \forall i > 0$.
2) $H_1(K(x_1, x_2, \ldots, x_r, M)) = 0$.
3) $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *è una successione regolare su* M.

Dim. Ovviamente 1) $\implies$ 2). Assumiamo 2 ed otteniamo (da 5.5) applicato ad $\underline{L} = K(x_2, \ldots, x_r, M)$;

$$H_0(K(x_1, H_1(K(x_2, \ldots, x_r, M))) = 0, \quad H_1(K(x_1, H_0(K(x_2, \ldots, x_r, M)) = 0$$

Poichè x_1 è nel radicale e $H_1(K(x_2, \ldots, x_r, M)$ è un modulo di tipo finito la prima implica $H_1(K(x_2, \ldots, x_r, M) = 0$ e la seconda implica che x_1 non è divisore di 0 in $K(x_2, \ldots, x_r, M)$, quindi applicando l'induzione si ha 3).

Applichiamo 3) poichè $(M/x_1M)/(x_2, \ldots, x_r)(M/x_1M) = M/(x_1, x_2, \ldots, x_r)M$ ne deduciamo per induzione da 5.5,

$$H_i(K(\underline{x}, M)) = 0,\ i > 1,\ H_1(K(\underline{x}, M)) = H_1(K(x_1, H_0(K(x_2, \ldots, x_r, M))$$

$H_0(K(x_2, \ldots, x_r, M)) = M/(x_2, \ldots, x_r)M$ e x_1 non è divisore di 0 su $M/(x_2, \ldots, x_r)M$ per ipotesi, quindi $H_1(K(x_1, H_0(K(x_2, \ldots, x_r, M)) = 0$. □

Dimensione omologica

Ricordiamo che un modulo M ha dimensione proiettiva $\leq n$ se e solo se ammette una risoluzione proiettiva di lunghezza n:

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \tag{5.9}$$

Per definizione la dimensione proiettiva $pd(M)$ è dunque il minimo delle lunghezze delle possibili risoluzioni proiettive. Dualmente un modulo M ha dimensione iniettiva $\leq n$ se e solo se ammette una co-risoluzione iniettiva di lunghezza n:

$$0 \to M \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_n \to 0 \tag{5.10}$$

Per definizione la dimensione iniettiva $id(M)$ è dunque il minimo delle lunghezze delle possibili co-risoluzioni iniiettive.

La dimensione omologica proiettiva di un anello A, detta anche dimensione globale ed indicata con $gl.dim.A$ è il sup delle dimensioni proiettive dei moduli, similmente per quella iniettiva, si ha però che le due dimensioni coincidono e si parla quindi di *dimensione globale*:

$$gl.dim.(A) := \sup pd(M), \; M \in MOD_A. \tag{5.11}$$

Per definizione $pd(M) = 0$ se e solo se M è proiettivo. In generale data una risoluzione

$$0 \to R^n(M) \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \tag{5.12}$$

il modulo $R^n(M)$ anche se non è univocamente individuato lo è a meno di addendi proiettivi, è detto $n-$*esima sizigia* di M:

5.13 Lemma di Schanuel. *Date due risoluzioni*

$$0 \to R^n(M) \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

$$0 \to \overline{R}^n(M) \to Q_n \to Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0$$

Con i P_i, Q_j proiettivi, esistono due moduli proiettivi P, Q tali che:

$$R^n(M) \oplus Q = \overline{R}^n(M) \oplus P$$

Dim. Il lemma si prova per induzione, osservando che:

1) se $N = M \oplus P$ con P proiettivo, si può costruire una risoluzione di N con $R^n(N) = R^n(M) \oplus P$.

2) si hanno le successioni esatte:

$$0 \to R^n(M) \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to R^1(M) \to 0, \quad 0 \to R^1(M) \to P_0 \to M \to 0$$

per cui $R^n(M) = R^{n-1}(R^1(M))$.

Per $n = 1$ se abbiamo due successioni esatte:

$$0 \to R^1(M) \to P_0 \xrightarrow{p} M \to 0, \quad 0 \to \overline{R}^1(M) \to Q_0 \xrightarrow{q} M \to 0$$

costruiamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R^1(M) \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{R}^1(M) \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \oplus Q_0 \arrow[r, "p+q"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "1"] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

da cui si deduce (utilizzando anche l'altro diagramma, scambiando p, q) che:

$$R^n(M) \oplus Q_0 = \tilde{R}^1(M) = \overline{R}^n(M) \oplus P_0$$

$\square$

Se ne può dedurre che, se $m \leq pd(M)$ si ha $pd(R^m(M)) = pd(M) - m$.

Dati due $A-$moduli M, N si definisce $tor_i^A(M, N)$ o tramite una risoluzione proiettiva di $\underline{P} \to M \to 0$ di M, o tramite una risoluzione proiettiva di $\underline{Q} \to N \to 0$ di N:

$$tor_i^A(M, N) := H_i(\underline{P} \otimes_A N) = H_i(M \otimes_A \underline{Q}). \tag{5.14}$$

si definisce $Ext_A^i(M, N)$ o tramite una risoluzione proiettiva di $\underline{P} \to M \to 0$ di M, o tramite una risoluzione iniettiva di $0 \to N \to \underline{I}$ di N:

$$Ext_A^i(M, N) := H^i(hom_A(\underline{P}, N)) = H^i(hom_A(M, \underline{I})). \tag{5.15}$$

Vale il *decalage*:

$$tor_i^A(M, N) = tor_{i-m}^A(R^m(M), N), \quad Ext_A^i(M, N) = Ext_A^{i-m}(R^m(M), N), \ \forall m < i,$$

dalla simmetria del prodotto tensoriale abbiamo inoltre $tor_i^A(M, N) = tor_i^A(N, M)$.

5.16 PROPOSIZIONE. *A) Per un modulo M le seguenti condizioni sono equivalenti:*
1) M è piatto.
2) $tor_i^A(M,N)=0$ per ogni modulo N ed $i>0$.
3) $tor_1^A(M,N)=0$ per ogni modulo N.

B) Per un modulo M le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) M è proiettivo.
2) $Ext_A^i(M,N)=0$ per ogni modulo N ed $i>0$.
3) $Ext_A^1(M,N)=0$ per ogni modulo N.

C) Per un modulo M le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) M è iniettivo.
2) $Ext_A^i(N,M)=0$ per ogni modulo N ed $i>0$.
3) $Ext_A^1(N,M)=0$ per ogni modulo N.
4) $Ext_A^1(A/I,M)=0$ per ogni ideale I di A.

DIM. A) Chiaramente 1) $\implies$ 2) $\implies$ 3) se vale 3), data una successione esatta corta $0\to B\to C\to N\to 0$ abbiamo una successione esatta lunga:

$$0 = tor_1^A(M,N)\to M\otimes_A B\to M\otimes_A C\to M\otimes_A N\to 0$$

Pertanto il funtore $M\otimes_A -$ è esatto, che è una delle caratterizzazioni di modulo piatto.

Per B) e C) vale un ragionamento analogo, il funtore $hom_A(M,-)$ è esatto, è una delle caratterizzazioni di modulo proiettivo. Il funtore $hom_A(-,M)$ è esatto, è una delle caratterizzazioni di modulo iniettivo. Resta solo da vedere C) 4 che è un punto più sottile.

Sia $0\to N\to L$ e $f:N\to M$ dobbiamo provare che f si estende a M. Applichiamo il Lemma di Zorn e possiamo sostituire N con un sottomodulo massimale su chi f è definito, se per assurdo esiste $m\notin N$ proviamo che f si estende a $N+Am$. Abbiamo la successione esatta $0\to N\to N+Am\to N+Am/N = A/I\to 0$ da cui la successione esata lunga:

$$0\to hom_A(A/I,M)\to hom_A(N+Am,M)\to hom_A(N,M)\to Ext_A^1(A/I,M)=0$$

pertanto f si estende. □

COROLLARIO. *A) Per un modulo M le seguenti condizioni sono equivalenti:*
1) $pd(M)\le n$.
2) $Ext_A^{n+1}(M,N)=0$ per ogni modulo N.

C) Per un modulo M le seguenti condizioni sono equivalenti:
1) $id(M)\le n$.
2) $Ext_A^{n+1}(N,M)=0$ per ogni modulo N ed $i>0$.

DIM. Costruiamo *la* $n-$esima sizigia $R^n(M)$. Si ha $pd(M)\le n$ se e solo se $R^n(M)$ è proiettivo e questo se e solo se $Ext_A^1(R^n(M),N)=0$ per ogni modulo N, per decalge $Ext_A^1(R^n(M),N)=Ext_A^{n+1}(N,M)$ e l'enunciato segue. La seconda parte è simile. □

Possiamo ora verificare che la dimensione iniettiva e proiettiva di un anello A coincidono:

5.17 Teorema. *Dato un anello A ed un intero positivo n le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *$pdM \leq n$ per ogni $A-$modulo M.*
(2) *$pdM \leq n$ per ogni $A-$modulo M di tipo finito.*
(3) *$idM \leq n$ per ogni $A-$modulo M.*
(4) *$Ext_A^{n+1}(M,N) = 0$ per ogni coppia di $A-$moduli M,N.*

Dim. Chiaramente 1) $\implies$ 2). Proviamo che 2) $\implies$ 3) sia

$$0 \to M \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to C \to 0$$

una risoluzione con gli I_k iniettivi, dobbiamo provare che C è iniettivo.

Usiamo il criterio 5.16 verifichiamo che $Ext_A^1(A/I,C) = 0$ per ogni ideale I di A. Per decalage abbiamo $Ext_A^1(A/I,C) = Ext_A^{n+1}(A/I,M) = 0$ per ipotesi (e il precedente corollario). $\square$

Supponiamo ora A locale Noetheriano, $\underline{m}$ il suo ideale massimale, $A/\underline{m} := k$ il campo residuo e M un $A-$modulo di tipo finito, si ha allora.

5.18 Proposizione. *A) Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) M è libero.
2) M è piatto.
3) $tor_1^A(M,k) = 0$.

B) Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) $pd(M) \leq n$.
2) $tor_{n+1}^A(M,k) = 0$.

Dim. A) Chiaramente 1) $\implies$ 2) $\implies$ 3). Assumiamo 3), sia $u_1,\dots,u_n$ un'insieme di elementi di M le cui classi $\overline{u}_1,\dots,\overline{u}_n$ (modulo $\underline{m}M$) formano una base di $M/\underline{m}M$ su k, sia $\pi : A^n \to M, p(a_1,\dots,a_n) := \sum_i a_iu_i$ e sia R il nucleo, dal Lemma di Nakayama π è suriettivo ed abbiamo le successioni esatte:

$$0 \to R \to A^n \to M \to 0,\ 0 = tor_1^A(M,k) \to R \otimes_A k \to A^n \otimes_A k \to M \otimes_A k \to 0$$

Per costruzione $k^n = A^n \otimes_A k \to M \otimes_A k = \oplus_i k\overline{u}_i$ è un isomorfismo e quindi $R \otimes_A k = 0$, dal Lemma di Nakayama $R = 0$ e quindi $\pi : A^n \to M$ è un isomorfismo.

B) Abbiamo per la $n-$esima sizigia, $tor_1^A(R^n(M),k) = tor_{n+1}^A(M,k)$ in particolare $R^n(M)$ è proiettivo e $pd(M) \leq n$ se e solo se $tor_1^A(R^n(M),k) = tor_{n+1}^A(M,k) = 0$. $\square$

5.19 Teorema. *A ha dimensione omologica $\leq n$ se e solo se $tor_{n+1}^A(k,k) = 0$. In particolare $gl.dimA = pd(k)$,*

Dim. In una direzione è evidente, per l'altra dalla proposizione precedente segue per l'$A-$modulo k che $pd(k) \leq n$ da cui segue per un modulo M di tipo finito $tor_1^A(R^n(M),k) =$

$tor_{n+1}^A(M,k) = 0$. Possiamo dedurre dunque da 5.18 che $R^n(M)$ è proiettivo e quindi $pd(M) \leq n$, concludiamo da 5.17. □

Prima di continuare, ricordiamo che, dato un anello locale Noetheriano A, con ideale massimale $\underline{m}$ e campo residuo $A/\underline{m} := k$ ed un $A-$modulo di tipo finito M, ha senso parlare di insieme minimo di generatori di M, prendendo elementi u_i che siano una base di $M/\underline{m}M$ su k. Pertanto dati tali elementi abbiamo un morfismo suriettivo $p : A^m \to M$ con $k^m = k \otimes_A A^m \to k \otimes_A M = M/\underline{m}M$ un isomorfismo. Possiamo iterare la costruzione su N il nucleo di p, e così via, otteniamo una *risoluzione minimale libera* di M che è essenzialmente unica.

Vogliamo provare che:

5.20 LEMMA. $\underline{K} := K(a_1, \ldots, a_d)$ *è un addendo diretto di una risoluzione minimale* $\underline{L}$ *di* k.

DIM. Per costruzione $d(\underline{K}_i) \subset \underline{m}\,\underline{K}_{i-1}$ e inoltre $d : k \otimes_A \underline{K}_i \to k \otimes_A \underline{m}\,\underline{K}_{i-1} = \oplus_J (\underline{m})/(\underline{m})^2 e_J$ è iniettivo. Infatti $k \otimes_A \underline{K}_i$ ha come base su k i vettori $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$ mentre $k \otimes_A \underline{m}\,\underline{K}_{i-1}$ ha come base su k i vettori $a_i e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}}$, infine $de_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$ è somma di vettori fra i precedenti in cui appaiono esattamente gli indici $j_1, \ldots, j_i$ e quindi tali differenziali sono linearmente indipendenti.

Costruiamo con il metodo generale di comparazione delle risoluzioni proiettive morfismi:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \underline{K}_i \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "u_i"'] & \underline{K}_{i-1} \arrow[r, "\partial_{i-1}"] \arrow[d, "u_{i-1}"'] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \underline{K}_0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \underline{L}_i \arrow[r, "d_i"] & \underline{L}_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] & \cdots \arrow[r] & \underline{L}_0 \arrow[r] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Costruito u_{i-1} il morfismo u_i si costruisce sfruttando il fatto che $\underline{K}_i$ è un modulo libero e che $\underline{L}$ è esatto. Dato che $d_{i-1} \circ u_{i-1} \circ \partial_i = u_{i-2} \circ \partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ si ha che $u_{i-1} \circ \partial_i$ è nell'immagine di d_i e quindi u_i si può costruire con $d_i \circ u_i = u_{i-1} \circ \partial_i$.

Procediamo per induzione supponiamo di aver dimostrato che u_{i-1} è un isomorfismo fra $\underline{K}_{i-1}$ ed un addendo diretto di $\underline{L}_{i-1}$. Per definizione di risoluzione minimale, detto $R_{i-1} := ker(d_{i-1})$ si ha che $k \otimes_A \underline{L}_i = k \otimes_A R_{i-1}$, d'altra parte $R_{i-1} \subset \underline{mL}_{i-1}$, per la minimalità, abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
k \otimes_A \underline{K}_i \arrow[r, "\overline{d}"] \arrow[d, "\overline{u}_i"'] & k \otimes_A \underline{m}\,\underline{K}_{i-1} \arrow[d, "\overline{u}_{i-1}"'] \\
k \otimes_A \underline{L}_i \arrow[r] & k \otimes_A \underline{m}\,\underline{L}_{i-1}.
\end{tikzcd}$$

Per costruzione $\overline{d}$ è iniettivo e per induzione $\overline{u}_{i-1}$ è iniettivo, e ne segue che $\overline{u}_i : k \otimes_A \underline{K}_i \to k \otimes_A \underline{L}_i$ è iniettivo, essendo sia $\underline{K}_i$ che $\underline{L}_i$ moduli liberi su A locale ne segue che u_i è un isomorfismo su un addendo diretto. □

Vogliamo arrivare a dimostrare il:

5.21 TEOREMA. *Un anello locale Noetheriano è regolare se e solo se ha dimensione globale finita, in questo caso la dimensione omologica coincide con la dimensione di Krull.*

DIM. Supponiamo prima di tutto A regolare di dimensione d e siano $a_1, \dots, a_d$ generatori per l'ideale massimale $\underline{m}$. Il complesso di Koszul $K(a_1, \dots, a_d)$ è in questo caso una risoluzione libera, di lunghezza d del modulo k, ne segue che $gl.dimA = pd(k) \leq d$, d'altra parte calcoliamo $tor_i^A(k,k)$ tramite il complesso $K(a_1, \dots, a_d, k)$. In questo complesso tutti i differenziali sono 0 e ne deduciamo che coincide con la sua omologia da cui $\dim_k tor_i^A(k,k) = \binom{d}{i}$, in particolare $tor_d^A(k,k) \neq 0$ e $gl.dimA = pd(k) = d$.

Supponiamo ora $gl.dim.A < \infty$ e siano $a_1, \dots, a_d$ generatori minimali per l'ideale massimale. Il complesso di Koszul $K(a_1, \dots, a_d; k)$ è di nuovo con differenziali 0 e omologia di dimensione $\binom{d}{i}$.

Dal precedente Lemma il complesso di Koszul, che ha lunghezza d,è contenuto in una risoluzione minimale di k, ne deduciamo che la lunghezza di una risoluzione libera minimale di k è almeno d. A questo punto sappiamo che $Pf(A) \geq d$ da cui $\dim_K A \geq d$, ma l'ideale massimale è generato da d elementi e quindi finalmente $d = Pf(A) = \dim_K A$. $\square$

6 Qualche applicazione

In questo paragrafo A è un anello Noetheriano non necessariamente locale, vogliamo globalizzare i risultati di §4.

6.1 TEOREMA. *i) Dato un anello Noetheriano A di C-M ed un sistema moltiplicativo S anche A_S è di C-M.*

ii) Dato un anello Noetheriano A di C-M ed una successione regolare $a_1, \dots, a_h$ di A anche $A/(a_1, \dots, a_h)$ è di C-M.

iii) A è di C-M se e solo se $A[x]$ è di C-M.

iv) Dato un anello Noetheriano A di C-M i suoi primi associati sono tutti minimali (unmixedness).

DIM. i) Sia prima di tutto A locale di dimensione d e P un ideale primo di codimensione r, proviamo che $A/$ è di C-M. Dalla teoria dei sistemi di parametri esiste un sistema di parametri $a_1, \dots, a_d$ di A per cui P è minimale su $a_1, \dots, a_r$, pertanto $a_1, \dots, a_r$ è un sistema di parametri per A_P. Il fatto che $a_1, \dots, a_r$ è una successione regolare è conseguenza della piattezza della localizzazione, da una successione esatta:

$$0 \to A/(a_1, \dots, a_h) \xrightarrow{a_{h+1}} A/(a_1, \dots, a_h) \to A/(a_1, \dots, a_{h+1}) \to 0$$

si deduce la successione esatta:

$$0 \to A_P/(a_1, \dots, a_h) \xrightarrow{a_{h+1}} A_P/(a_1, \dots, a_h) \to A_P/(a_1, \dots, a_{h+1}) \to 0$$

Per A generale, se M è un ideale massimale di A_S si ha che $(A_S)_M = A_P$ per un primo P e quindi l'enunciato segue dal caso locale.

ii) Dato un ideale massimale $M \supset (a_1, \ldots, a_h)$ si ha per piattezza che $a_1, \ldots, a_h$ è una successione regolare in A_M e possiamo applicare 4.12.

iii) Poiché x non è divisore di 0, dalla parte ii) se $A[x]$ è di C-M anche A è di C-M. Per il viceversa, sia M un ideale massimale di $A[x]$ e $\underline{m} = M \cap A$, si ha che $A_{\underline{m}} = A[x]_M/(x)$ e x non è divisore di 0 in $A[x]_M/(x)$ e concludiamo da 4.12.

Se esistesse un primo associato P non minimale localizzando a P avremo la stessa proprietà per l'anello locale A_P che è di C-M. Questo contraddice 4.11 e le sue conseguenze. □

Nel caso in cui A è l'anello dei polinomi su un campo algebricamente chiuso, la condizione ii) è esattamente quella che definisce una intersezione completa schematica, che è quindi una *intersezione completa*. Con questo linguaggio, una intersezione completa in una varietà di C-M è di C-M. (Stesso discorso nel caso schematico).

6.2 Definizione. *Un anello Noetheriano A si dice* **catenario** *se dati comunque ideali primi $P \supset Q$ tutte le catene massimali di ideali primi $P = P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \cdots \supsetneq P_k = Q$ hanno la stessa lunghezza.*

L'esempio che si ha in mente è l'anello delle coordinate di una varietà affine.

6.3 Teorema. *Un anello Noetheriano A di C-M è catenario.*

Dim. Possiamo assumere A locale e P l'ideale massimale, sia $a_1, \ldots, a_r$ una successione regolare massimale in Q passando modulo tale successione possiamo supporre che Q è minimale. Sia $d = \dim_K A$ e facciamo induzione su d. Sia $Q_1 \supsetneq Q$ e minimale fra tali primi. Per la proprietà di C-M esiste un $a \in Q_1$ che non è divisore di 0, ne segue che Q_1 è minimale in A/aA e $\dim_K A/aA = d - 1$ per induzione ogni successione massimale in A/aA di ideali primi ha lunghezza $d - 1$ e ne segue che ogni successione massimale in A ha lunghezza d.

□

Corollario. *Un anello Noetheriano A quoziente di un anello di C-M è catenario. Un algebra A finitamente generata su un anello B di C-M è catenaria.*

Dim. Il quoziente di un anello catenario è catenario. Un algebra A finitamente generata su un anello B è quoziente di $B[x_1, \ldots, x_m]$.

□

In Geometria algebrica è importante sapere se un dato insieme di equazioni definisce una varietà inisemisticamente o genera il suo ideale, in altre parole se un anello A ha o no nilpotenti. Nel caso di C-M abbiamo.

6.4 Teorema. *Sia A un anello di C-M e $P_1, \dots, P_k$ i suoi primi minimali. Si ha che A è ridotto se e solo se gli anelli A_{P_i} sono campi.*

Dim. A è ridotto se e solo se $0 = P_1 \cap \dots \cap P_k$, in generale si ha una decomposizione primaria (da C-M) $0 = Q_1 \cap \dots \cap Q_k$, $\sqrt{Q_i} = P_i$.

Se $S := A - (P_1 \cup \dots \cup P_k)$ si ha che S è l'insieme dei non divisori di 0 di A e quindi $A \subset A[S^{-1}] \subset \oplus_i A/Q_i[S^{-1}]$ ed anche $A/Q_i \subset A/Q_i[S^{-1}]$. $A[S^{-1}]$ è un anello 0 dimensionale e quindi $A[S^{-1}] = \oplus_i A/Q_i[S^{-1}]$, pertanto A è ridotto se e solo se A/Q_i è ridotto per ogni i ovvero $Q_i = P_i$ e $A/Q_i[S^{-1}] = A_{P_i}$ è un campo. □

Il seguente criterio si usa spesso:

6.5 Teorema. *Siano $A \subset B$ anelli, supponiamo che A è regolare e B un dominio di tipo finito su A. B è di C-M se e solo se è piatto su A.*

Dim. Se $M \subset B$ è un ideale massimale anche $\underline{m} := M \cap A$ lo è in A e localizzando possiamo assumere A locale regolare di dimensione d, sia $\underline{m} := (a_1, \dots, a_d)$. Se B è piatto su A, essendo A locale B è libero su A e quindi $(a_1, \dots, a_d)$ sono una successione regolare. Viceversa, se B è un dominio di C-M, deve essere di dimensione d (per il going up) in ogni ideale massimale, e essendo $(a_1, \dots, a_d)$ un sistema di parametri, è anche una successione regolare in ogni ideale massimale di B quindi è una successione regolare su B. Ne segue che la profondità di B come $A-$modulo è d e quindi la sua dimensione omologica è 0 (formula) ovvero B è proiettivo su A. □

6.6 Lemma. *Se A è un anello locale, $x_1, \dots, x_d$ una successione regolare e $m_1, \dots, m_d$ interi positivi allora $x_1^{m_1}, \dots, x_d^{m_d}$ è una successione regolare.*

Se A è un anello locale con ideale massimale $\underline{m}$ e J è un ideale con radicale $\underline{m}$, esiste una successione regolare massimale contenuta in J.

Dim. Per induzione, poiché x_d non è divisore di 0 modulo $x_1, \dots, x_{d-1}$ altrettanto è vero per $x_d^{m_d}$ e quindi $x_1, \dots, x_{d-1}, x_d^{m_d}$ è una successione regolare. Dunque anche $x_d^{m_d}, x_1, \dots, x_{d-1}$ è una successione regolare. Per induzione $x_d^{m_d}, x_1^{m_1}, \dots, x_{d-1}^{m_{d-1}}$ è una successione regolare e quindi anche $x_1^{m_1}, \dots, x_d^{m_d}$ lo è.

Per la seconda parte basta osservare che, se $x_1, \dots, x_d$ è una successione regolare esistono $m_1, \dots, m_d$ interi positivi con $x_1^{m_1}, \dots, x_d^{m_d} \in J$. □

7 Anelli di Gorenstein e dualità

Iniziamo questa sezione con delle generalità sui moduli.

Sia A un anello e $E \subset F$ moduli.

7.1 Definizione. *Si dice che la estensione $E \subset F$ è* **essenziale** *se, dato comunque un sottomodulo $M \subset F$, $M \neq 0$ si ha $M \cap E \neq 0$.*

7.2 LEMMA. *Se $E \subset F$ e $F \subset G$ sono estensioni esssenziali allora $E \subset G$ è una estensione esssenziale.*

DIM. Se $M \subset G$, $M \neq 0$ si ha $M \cap F \neq 0$ per l'essenzialità di $F \subset G$ e quindi $M \cap E = (M \cap F) \cap E \neq 0$ per l'essenzialità di $E \subset F$. □

7.3 LEMMA. *Data una estensione $E \subset G$ esiste una estensione $E \subset F \subset G$ con $E \subset F$ essenziale e massimale con questa proprietà.*

DIM. Se $E \subset E_\alpha$ è una catena crescente ordinata di estensioni essenziali è chiaro che $E \subset \cup_\alpha E_\alpha$ è essenziale. Si conclude con il lemma di Zorn. □

7.4 TEOREMA. *Date estensioni $E \subset F \subset G$ con $E \subset F$ essenziale e massimale in G e G iniettivo si ha che F è iniettivo.*

DIM. Per il Lemma 7.2 la sola estensione essenziale di F in G è F. Per il Lemma di Zorn esiste un sottomodulo $N \subset G$ con $N \cap F = 0$ e massimale con questa proprietà. Se proviamo che $G = F \oplus N$ allora F in quanto addendo diretto di un modulo iniettivo è anche iniettivo.

Poichè $F \cap N = 0$ si ha che $F \to G/N$ è iniettivo, basta provare che $G = F + N$ (essendo $F \cap N = 0$), in altre parole basta provare che la proiezione $F \to G/N$ è anche suriettivo.

Osserviamo che $F \to G/N$ è una estensione essenziale, infatti se vi fosse un sottomodulo $\overline{M} \subset G/N$, con $\overline{M} = M/N$, e $\overline{M} \cap F = 0$ anche $M \cap F = 0$ che contraddice la costruzione di F.

Dato che G è un modulo iniettivo, esiste un morfismo $j : G/N \to G$ che estende la inclusione $F \subset G$.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\ i\ } & G \\ {\scriptstyle 1}\big\downarrow & & {\scriptstyle j}\big\uparrow \\ F & \xrightarrow{\ \bar{i}\ } & G/N \end{array}$$

Se $\overline{K} = Ker(j)$ si ha $\overline{K} = K/N$ e $F \cap K = 0$ in quanto $i(f) = j(\bar{i}(f))$. Per massimalità $K = N$ e j è iniettivo. Abbiamo dunque $F \subset G/N \subset G$ e $F \subset G/N$ è essenziale, per costruzione quindi $F = G/N$. □

Possiamo costruire ora *l'inviluppo iniettivo* di un modulo M.

7.5 DEFINIZIONE. *Dato un modulo M ed una estensione $M \subset I$ diremo che I è* **l'inviluppo iniettivo** *di M se I è iniettivo e la estensione è essenziale.*

7.6 TEOREMA. *Un inviluppo iniettivo esiste ed è unico.*

DIM. Sia $M \to J$ la inclusione di M in un modulo iniettivo. Se $M \subset I \subset J$ è tale che $M \xrightarrow{i} I$ è essenziale e massimale, dal Teorema 7.4 segue che I è iniettivo e quindi un inviluppo iniettivo.

Sia ora $M \xrightarrow{f} K$ un morfismo in un iniettivo. Dalle proprietà degli iniettivi esiste un morfismo $g : I \to K$ con $g \circ i = f$.

Poiché $M \xrightarrow{i} I$ è essenziale se f è un morfismo iniettivo si deve avere $Ker(g) \cap M = 0$ e quindi $Ker(g) = 0$.

In particolare si ha che $K = g(I) \oplus K'$ per le proprietà degli iniettivi. Se $M \xrightarrow{f} K$ è un inviluppo iniettivo si deve avere $K' = 0$ e g è un isomorfismo.

□

Se $M \to E(M)$ è l'inviluppo iniettivo e $M \subset I$ con I iniettivo abbiamo che la inclusione $M \subset E(M)$ si estende ad una inclusione $M \subset E(M) \subset I$. Per la iniettività di $E(M)$ si ha inoltre $I = E(M) \oplus I'$.

Inoltre dato un morfismo $M \to N$ si ottiene un morfismo $E(M) \to E(N)$.

Prima di continuare ci serve una osservazione sulla nozione di iniettivo nel caso in cui l'anello A è Noetheriano.

Osservazione 7.7 (A Noetheriano)

Un modulo I è iniettivo se e solo se dato un morfismo iniettivo $0 \to B \to C$ di moduli finitamente generati ed un morfismo $f : B \to I$ tale morfismo si estende a C.

In fatti, dalla dimostrazione di 5.16, C4) sappiamo che basta verificare la proprietà di estensione nel caso in cui $C = A$ e B è un ideale. Nel caso Noetheriano tali moduli sono finitamente generati.

Ora sia A un anello locale Artiniamo e $k := A/\underline{m}$ il suo campo residuo.

k è l'unico modulo irriducibile su A, se M è un $A-$modulo qualunque si $S(M) = \sum N,\ N \subset M,\ N$ irriducibile.

7.8 Lemma. *$S(M) \subset M$ è una estensione essenziale.*

Dim. Ogni sottomodulo di M contiene un modulo finitamente generato e quindi Artiniano che a sua volta contiene un sottomodulo irriducibile in $S(M)$.

□

Poich'e ogni morfismo di k in M ha immagine in $S(M)$ ne segue che:

$$S(M) = hom_A(k, M).$$

Sia $\omega_A := E(k)$ l'inviluppo iniettivo di k come $A-$modulo.

7.9 Lemma. *$hom_A(k, \omega_A) = hom_A(k, k) = k$.*

Dim. Se $i : k \to E(k)$ è un morfismo non nullo deve essere $i(k) = k$ altrimenti $i(k) \cap k = 0$ che contraddice la ipotesi che $k \subset E(k)$ è essenziale. □

Dato un modulo M poniamo:

$$D(M) := hom_A(M, \omega_A). \tag{7.10}$$

abbiamo un morfismo di bidualità:

$$j_M : M \to D(D(M)), \quad j(m)(\phi) := \phi(m). \tag{7.11}$$

7.12 Teorema. *Se M è un modulo finitamente generato j_M è un isomorfismo.*

Dim. Prima di tutto lo facciamo per k dove è immediato da 7.8. Poi per induzione sulla lunghezza di una catena di composizione, $0 \to k \to M \to N \to 0$ induce un diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong\big\downarrow & & \big\downarrow & & \cong\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D^2k & \longrightarrow & D^2M & \longrightarrow & D^2N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

per induzione e si conclude dal Lemma dei 5. □

Studiamo ora sistematicamente i *funtori di dualità*:

7.13 Definizione. *Un* **funtore dualizzante** *è un funtore controvariante $M \to DM$ dalla categoria dei moduli finiti su A a se stessa con un isomorfismo naturale $M \xrightarrow{\cong} D^2M$.*

Prima di tutto un Lemma.

7.14 Lemma. *Un funtore dualizzante è esatto.*

Dim. Data una successione esatta $0 \to M \to N \to P \to 0$ bisogna mostrare che $0 \to D(P) \to D(M) \to D(N) \to 0$ è esatta o in altri termini che, per ogni modulo M la successione degli $hom(M,-)$ è esatta. Ma per bidualità ogni modulo è della forma $D(M)$ e per tale modulo abbiamo gli isomorfismi di bidualità $hom_A(D(M), D(X)) = hom_A(M, X)$ da cui segue l'esattezza. □

Abbiamo quindi:

7.15 Teorema. *Se D è un funtore dualizzante $D(A)$ è un modulo iniettivo.*
$D(M) = hom_A(M, D(A))$.
La lunghezza di $D(M)$ è uguale a quella di M.
$D(k) = k$.
$D(A)$ è l'inviluppo iniettivo di k.

Dim. Per dualità e l'Osservazione 7.7 si ha che, essendo A proiettivo, $D(A)$ è iniettivo.
Si ha

$$D(M) = hom_A(A, D(M)) = hom_A(D^2(M), D(A)) = hom_A(M, D(A)).$$

Per bidualità basta mostrare che $l(D(M)) \geq l(M)$. Ora se $0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_k = M$ è sua serie di composizione abbiamo, per esattezza, la successione di quozienti $D(M_k) \to D(M_{k-1}) \to \cdots \to D(M_0) = 0$.
Inoltre $M_{i+1}/M_i \neq 0$ implica $D(M_i)/D(M_{i+1}) \neq 0$ da cui l'asserto.

$D(k)$ deve essere irriducibile altrimenti k avrebbe una serie di composizione non banale, l'unico modulo irriducibile è k.

Si ha una applicazione $A \to k$ da cui per dualità una iniezione $k \to D(A)$. D'altra parte $hom_A(k, D(A)) = hom_A(A, k) = k$ ne segue che il Socle di $D(A)$ ha dimensione 1 e quindi $D(A)$ è una estensione essenziale di k.

□

COROLLARIO. *L'inviluppo iniettivo* ω_A *di* k *è un modulo di lunghezza finita e l'unico funtore dualizzante è* $hom_A(M, \omega_A)$.

Se A è un algebra di dimensione finita su un campo F possiamo definire su $hom_F(M, F)$ una struttura di A modulo con la formula $a.\phi(m) := \phi(am)$ e si ha un funtore dualizzante. Segue che questo coincide con il funtore $hom_A(M, \omega_A)$.

Osserviamo infine che, se I è un qualunque modulo iniettivo e $S(I) = \oplus_\alpha k e_\alpha$ abbiamo una inclusione $I \supset \oplus_\alpha (\omega_A)_\alpha$, poiché $\oplus_\alpha (\omega_A)_\alpha$ è iniettivo abbiamo $I = I' \oplus \oplus_\alpha (\omega_A)_\alpha$, ma $S(I') = 0$ e quindi $I' = 0$ e $I = \oplus_\alpha (\omega_A)_\alpha$, ogni iniettivo è somma diretta di copie di ω_A.

Terminiamo conun risultato che ci sarà utile per la teoria generale.

7.16 LEMMA. *Sia A un algebra locale di dimensione 0 su un anello locale di dimensione 0, supponiamo A un modulo di tipo finito su R allora si ha:*

$$\omega_A = hom_R(A, \omega_R), \tag{7.17}$$

DIM. Si ha per un $A-$modulo M che

$$hom_A(M, hom_R(A, \omega_R)) = hom_R(M \otimes_A A, \omega_R) = hom_R(M, \omega_R)$$

pertanto il funtore $M \to hom_A(M, hom_R(A, \omega_R))$ è un funtore di dualità.

□

ANELLI DI GORENSTEIN

Possiamo ora dare una definizione fondamentale:

7.18 DEFINIZIONE. *Un anello locale Artiniano A si dice di Gorenstein, se* $A = \omega_A$.

Vediamo delle conseguenze:

7.19 TEOREMA. *Per un anello locale Artiniano A le condizioni seguenti sono equivalenti:*
1) A è di Gorenstein.
2) A è iniettivo come A modulo.
3) Il socle di A ha dimensione 1.
4) ω_A *è un modulo ciclico.*

DIM. 1) $\implies$ 2) per definizione.

2) $\implies$ 3) Se S è il Socle di A si ha che A è l'inviluppo iniettivo di S ma, essendo A indecomponibile come modulo si ha che $S = k$.

3) $\implies$ 4) per dualità. se A ha un solo sottomodulo irriducibile ω_A ha un solo quoziente irriducibile, ovvero un unico sottomodulo massimale. Pertanto un qualunque element non contenuto in tale sottomodulo lo genera.

4) $\implies$ 1) Se ω_A è un modulo ciclico abbiamo un morfismo suriettivo $A \xrightarrow{p} \omega_A$. Avendo A e ω_A la stessa lunghezza p è un isomorfismo. □

8 Il caso generale

Per un anello A di dimensione maggiore di 0 la dualità non si può sviluppare direttamente sulla categoria dei moduli e vi sono due scelte, quella di restringere la classe dei moduli su cui fare dualità oppure passare ad un'altra categoria la categoria derivata. Noi ci limiteremo al primo passo.

8.1 TEOREMA. *Dato un anello locale A di dimensione d ed un modulo M finitamente generato, le seguenti condizione sono equivalenti.*
1) Ogni sistema di parametri di A è una successione regolare su M.
2) Esiste un sistema di parametri di A che è una successione regolare su M.
3) $Pf(M) = d$

DIM. Ovviamente 1) $\implies$ 2) $\implies$ 3), si prova che 3) $\implies$ 1) come in 4.12.

□

8.2 DEFINIZIONE. *Un modulo che soddisfi le precedenti condizioni è detto* **massimo Cohen Macaulay**.

L'obiettivo è di studiare la dualità, per un anello locale di C-M sulla classe dei moduli massimi C-M.

Si osservi che, se $\dim_K A = 0$ la condizione di essere massimo C-M è vuota per un modulo finitamente generato.

Dobbiamo definire il modulo dualizzante, ci sono però delle difficoltà non potendo dimostrarne l'esistenza nella massima generalità ma solo per classi di anelli particolari, che però includono tutti gli esempi della geometria algebrica ed aritmetica.

Abbiamo a disposizione due strade, una induttiva e l'altra assiomatica e dovremo mostrare che sono equivalenti.

8.3 DEFINIZIONE INDUTTIVA. *Un modulo finitamente generato M su un anello locale A di C-M di dimensione d è un modulo canonico se o $d = 0$ e $M = \omega_A$ ovvero $d > 0$ ed esiste x, non divisore di 0 su M, tale che M/xM è modulo canonico su $A/(x)$.*

Esplicitando la induzione arriviamo a dire che:
Esiste una successione regolare $x_1, \ldots, x_d$ in A che è anche successione regolare in M per cui, posto $B := A/(x_1, \ldots, x_d)$ si ha che $M/(x_1, \ldots, x_d)M = \omega_B$.

8.4 DEFINIZIONE ASSIOMATICA. *Un modulo finitamente generato M su un anello locale A di C-M di dimensione d è un modulo canonico se:*
i) è massimo Cohen Macaulay.

ii) Ha dimensione iniettiva finita.
iii) $End_A(M) = A$.

La condizione iii) serve ad eliminare la possibilità che M sia somma diretta di moduli che soddisfano la stessa condizione, è simile alla scelta dell'inviluppo iniettivo.

Per capire la equivalenza facciamo qualche semplice osservazione. Sia A un anello J un ideale ed E un modulo iniettivo.
Consideriamo $hom_A(A/J, E) = \{u \in E \mid Ju = 0\}$ come A/J modulo.

8.5 Lemma. *i) Se E è iniettivo, $hom_A(A/J, E)$ è un A/J modulo iniettivo.*
ii) Se $F \subset G$ è essenziale anche $hom_A(A/(x), F) \subset hom_A(A/(x), G)$ è essenziale.

Dim. i) Per costruzione $hom_A(A/J, E)$ è un A/J modulo. Dati $0 \to B \to C$ due A/J moduli ed un morfismo $f : B \to hom_A(A/J, E) \subset E$, per la iniettività di E tale morfismo si estende ad un morfismo $g : C \to E$ ma poiché J annulla C si ha $g(C) \subset hom_A(A/J, E)$.

ii) Sia $M \subset hom_A(A/J, G) \subset G$ un sottomodulo, abbiamo per la essenzialità che $M \cap F \neq 0$ ma ovviamente $M \cap F \subset hom_A(A/J, F)$. □

8.6 Lemma. *Sia A un anello $x \in A$ un non divisore di 0 ed E un modulo iniettivo, allora $E = xE$.*

Dim. Dato $u \in E$ abbiamo il morfismo $A \to E,\ a \to au$. Poiché $A \xrightarrow{x} A$ è iniettivo si ha che tale morfismo si estende ad un morfismo $a \to av$ con $au = xav$ ovvero $u = xv$. □

8.7 Teorema. *Sia $0 \to M \to \underline{E}$ una risoluzione iniettiva minimale di un modulo M e sia $x \in A$ un non divisore di 0 su A e su M, sia $E'_i := hom_A(A/(x), E_i)$.*
Il complesso $\underline{E}' := E'_1 \to E'_2 \to \dots$ è una risoluzione iniettiva minimale di M/xM nella categoria degli $A/(x)$ moduli.

Dim. Dal lemma precedente E'_i è iniettivo come $A/(x)$ modulo.
Si ha $H^i(hom_A(A/(x), \underline{E}) = Ext^i_A(A/(x), M)$. $Ext^i_A(A/(x), M)$ si calcola anche dalla successione esatta $0 \to A \xrightarrow{x} A \to A/(x) \to 0$ con la successione lunga:

$$\dots \to Ext^i_A(A, M) \xrightarrow{x} Ext^i_A(A, M) \to Ext^{i+1}_A(A/(x), M) \to Ext^{i+1}_A(A, M) \to$$

da cui essendo $Ext^i_A(A, M) = 0,\ \forall i > 0$ ed essendo x non divisore di 0 in M si ha $Ext^i_A(A/(x), M) = 0,\ \forall i \neq 1$ mentre dalla successione lunga:

$$\dots \to hom_A(A, M) \xrightarrow{x} hom_A(A, M) \to Ext^1_A(A/(x), M) \to 0 = Ext^1_A(A, M) \to$$

si ha $Ext^1_A(A/(x), M) = M/xM$.

Ora poiché $M \subset E_0$ è essenziale si ha che $E'_0 = 0$ e quindi $hom_A(A/(x), \underline{E}) = 0 \to \underline{E}'$ da cui segue l'enunciato. Denotiamo $hom_A(A/(x), F) := F'$ per un modulo F.

Dal Lemma 8.5 se $F \subset G$ è essenziale anche $F' \subset G'$ è essenziale.

Per ipotesi l'inclusione $d(E_i) \subset E_{i+1}$ è essenziale e quindi $d(E_i)' \subset E'_{i+1}$ è essenziale, basta provare che $d(E_i)' = d(E'_i)$. Ovviamente $d(E_i)' \supset d(E'_i)$, se $u \in d(E_i)'$ si ha $d(u) = 0$ e quindi per la esattezza di $\underline{E}'$ si ottiene $d(E_i)' \subset d(E'_i)$. Resta solo da considerare la inclusione $M/xM \subset E'_1$, di nuovo per esattezza $M/xM = Ker(d)$, $d : E'_1 \to E'_2$ e se $0 \neq C \subset E'_1$ si ha $0 \neq C \cap d(E_0) \subset M/xM$. □

COROLLARIO 8.8.

i) Se M è un modulo finitamente generato e $x \in \underline{m}$ è un non divisore di 0 in A ed in M si ha:

$$i.d._A(M) = i.d._{A/(x)}M/xM$$

Sia M è un modulo massimo C-M su un anello locale A di dimensione d, $x_1, \dots, x_d$ una successione regolare e $B := A/(x_1, \dots, x_d)$.

ii) M ha dimensione iniettiva finita se e solo se $M/(x_1, \dots, x_d)M$ è iniettivo. In questo caso $i.d.(M) = d$ e $M/(x_1, \dots, x_d)M = \omega_B^k$ per qualche k.

iii) Se N è un A modulo annullato da x si ha:

$$Ext^j_{A/(x)}(N, M/xM) = Ext^{j+1}_A(N, M),\ \forall j \geq 0. \tag{8.9}$$

DIM. Per definizione la dimensione iniettiva è la lunghezza di una risoluzione iniettiva minimale, i) segue poiché $\underline{E}'$ ha lunghezza uno di meno di $\underline{E}$.

ii) Presa una successione regolare $x_1, \dots, x_d$ su M per induzione accorciamo ad ogni passo la risoluzione minimale fino ad ottenerne una di $M/(x_1, \dots, x_d)M$ come $A/(x_1, \dots, x_d)$ modulo. Ma in dimensione 0, la dimensione iniettiva finita equivale a dimensione 0, per dualità e la formula di Auslander Buchsbaum (dicotomia in dim 0, o un modulo è libero o ha dimensione proiettiva infinita) inoltre i soli iniettivi di lunghezza finita sono i moduli ω_B^k.

iii) Per definizione $Ext^{j+1}_A(N, M)$ è la coomologia del complesso $hom_A(N, \underline{E})$ in grado $j+1$, mentre $Ext^j_{A/(x)}(N, M/xm)$ è la coomologia in grado j del complesso $hom_A(N, \underline{E}')$. Poichè N è annullato da x si ha che $hom_A(N, \underline{E}) = hom_{A/(x)}(N, 0 \to \underline{E}')$ da cui l'enunciato segue. □

OSSERVAZIONE Se x è un non divisore di 0 su M allora x è un non divisore di 0 su $hom_A(N, M)$.

Il risultato che ci permette di fare l'induzione è il seguente:

8.10 PROPOSIZIONE. *Siano A un anello locale C-M di dimensione d, M un modulo finitamente generato massimo Cohen Macaulay e di dimensione iniettiva finita.*

i) Dato un modulo N finitamente generato di profondità e si ha:

$$Ext^i_A(N, M) = 0,\ \forall i > d - e. \tag{8.11}$$

ii) Se N è massimo Cohen Macaulay si ha:

$$hom_A(N, M)/x\, hom_A(N, M) = hom_{A/(x)}(N/xN, M/xM) \tag{8.12}$$

DIM. La dimensione iniettiva di M è d quindi $Ext^i_A(N,M) = 0$, $\forall i > d$, possiamo allora supporre $e > 0$ e sia x un non divisore di 0 su N (nell'ideale massimale). Prendiamo la successione esatta:

$$0 \to N \xrightarrow{x} N \to N/xN \to 0$$

con $N/x\,N$ di profondità $e-1$. Abbiamo la successione esatta lunga di Ext:

$$\dots \to Ext^i_A(N,M) \xrightarrow{x} Ext^i_A(N,M) \to Ext^{i+1}_A(N/x\,N,M) \to \dots$$

per induzione $Ext^{i+1}_A(N/x\,N,M) = 0$, $\forall i+1 > d-(e-1) = d-e+1$ e quindi $Ext^i_A(N,M) \xrightarrow{x} Ext^i_A(N,M)$ è suriettivo per $i > d-e$. Il Lemma di Nakayama implica allora $Ext^i_A(N,M) = 0$ per $i > d-e$.

ii) Prendiamo la successione esatta:

$$0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$$

da cui la successione esatta lunga di Ext:

$$0 \to hom_A(N,M) \xrightarrow{x} hom_A(N,M) \to hom_A(N,M/xM) \to Ext^1_A(N,M).$$

Per ipotesi la profondità di N è d e quindi $Ext^1_A(N,M) = 0$.

Ne deduciamo un isomorfismo $hom_A(N,M)/x\,hom_A(N,M) = hom_A(N,M/xM)$ ma ovviamente $hom_A(N,M/xM) = hom_{A/(x)}(N/xN,M/xM)$. □

La formula precedente ha un aspetto piú significativo come formula di cambiamento di anello, sia $B := A/(x)$ allora la 8.12 si rilegge:

$$B \otimes_A hom_A(N,M) = hom_B(B \otimes_A N, B \otimes_A M) \tag{8.13}$$

8.14 LEMMA. *A locale M,N moduli finitamente generati, x un non divisore di 0 in M nell'ideale massimale e $\phi : N \to M$ un morfismo, $\psi : N/xN \to M/xM$ il morfismo indotto.*
Se ψ è un monomorfismo, ϕ è un monomorfismo
Se ψ è un epimorfismo , ϕ è un epimorfismo.

DIM. Il primo è il Lemma di Nakayama. Per il secondo sia $J = Ker\phi$ abbiamo $J \subset x\,M$. Ma se $j = xn$, $j \in J$ si ha $0 = \phi(j) = x\phi(n)$ quindi $\phi(n) = 0$ e $n \in J$. Di nuovo $J = xJ$ implica $J = 0$.

□

Riprendiamo le notazioni, A locale $\underline{m}$ il suo ideale massimale $k := A/\underline{m}$ il suo campo residuo.

8.15 Teorema. *Sia M un modulo di C-M massimo, $x_1, \ldots, x_d$ è una successione regolare, $B := A/(x_1, \ldots, x_d)$. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*
i) $M/(x_1, \ldots, x_d)M = \omega_B$.
ii) M è di dimensione iniettiva finita (necessariamente d) e $End_A(M) = A$.

Se N è un modulo di C-M massimo, con $N/(x_1, \ldots, x_d)N = \omega_B$ allora N è isomorfo ad M.

Dim. Dal Corollario 8.8 segue che M è di dimensione iniettiva finita se e solo se $M/(x_1, \ldots, x_d)M = \omega_B^r$ per qualche r.

Da 8.9 deduciamo che:

$$B \otimes_A End_A(M) = End_B(\omega_B)^r = M_r(B)$$

dove $M_r(B)$ denota l'anello delle matrici $r \times r$ su B.

Pertanto basta provare che $B \otimes_A End_A(M) = B$ se e solo se $End_A(M) = A$.

In un verso è chiaro, nell'altro se $B \otimes_A End_A(M) = B$ il morfismo naturale $A \to End_A(M)$ è suriettivo, basta osservare per induzione che x_{i+1} non è divisore di 0 su $End_{A/(x_1,\ldots,x_i)}(M/(x_1, \ldots, x_i)M)$ e applicare il Lemma 8.13 induttivamente a

$$A/(x_1, \ldots, x_i) \to End_{A/(x_1,\ldots,x_i)}(M/(x_1, \ldots, x_i)M) = End_A M/(x_1, \ldots, x_i)End_A M.$$

Per l'ultima parte abbiamo per induzione:

$$B \otimes_A hom_A(N, M) = hom_B(\omega_B, \omega_B) = B$$

da cui esiste un morfismo $\phi : N \to M$ che modulo una successione regolare è isomorfismo, pertanto da 8.14 è isomorfismo. □

Ora passiamo alla esistenza:

8.16 Lemma. *Se R è locale, e A è un'algebra locale su R finitamente generata come R modulo e C-M si ha che la profondità $Pf_R(A)$ di A come $R-$modulo è uguale alla sua dimensione come anello.*

Dim. Siano $\underline{m}, \underline{n}$ rispettivamente gli ideali massimali di R e di A. Poiché, A è finitamente generato come $R-$modulo si ha $\underline{m}A \neq A$ e quindi $\underline{m}A \subset \underline{n}$, inoltre poiché $A/\underline{m}A$ è un modulo di lunghezza finita si deve avere $\underline{n}^k \subset \underline{m}A$ per qualche k.

Per induzione su $\dim_K A$, se $\dim A = 0$ si ha che $\underline{n}$ è nilpotente e quindi $\underline{m}$ opera con elementi nilpotenti su A da cui $Pf_R(A) = 0$. Altrimenti siano $P_1, \ldots, P_k$ i primi minimali di A e Q_i la preimmagine di P_i in R. Se $\underline{m}$ fosse formato interamente di divisori di 0 su A si dovrebbe avere $\underline{m} \subset \cup_i Q_i$ e quindi per il teorema di evitare i primi, si deduce $\underline{m} \subset Q_i$ per qualche i da cui $\underline{m}A \subset P_i$, da $\underline{n}^k \subset \underline{m}A$ deduciamo $\underline{n} = P_i$ una contraddizione essendo A di C-M e dimensione > 0.

□

8.17 Teorema. *Se R è locale, C-M con modulo canonico ω_R e A è un'algebra locale su R finitamente generata come R modulo e C-M. Posto $c = \dim R - \dim A$ si ha che:*

$$\omega_A := Ext_R^c(A, \omega_R)$$

è un modulo canonico per A.

Dim. Per induzione su $\dim_K A$. Se $\dim_K A = 0$ si ha $c = \dim_K R$, per ipotesi se $\underline{m}$ è l'ideale massimale di R e $\underline{n}$ è l'ideale massimale di A si ha che $\underline{m}A \subset \underline{n}$, il radicale dell'annullatore di A in R è $\underline{m}$ ed esiste una successione regolare $x_1, \dots, x_c$ nell'annullatore di A. Posto $R' := R/(x_1, \dots, x_c)$ si ha che R' ha dimensione 0 e A è una R' algebra. Inoltre per definizione $\omega_R/(x_1, \dots, x_c)\omega_R = \omega_{R'}$ è un modulo canonico per R'. Dalla 8.9 per induzione $hom_{R'}(A, \omega_{R'}) = Ext^0_{R'}(A, \omega_{R'}) = Ext^c_R(A, \omega_R)$ e si applica 7.17.

Supponiamo ora $\dim_K A > 0$, dalla definizione induttiva basta mostrare che:
se $x \in \underline{m} \subset A$ è un non divisore di 0, allora x è un non divisore di 0 su $Ext^c_R(A, \omega_R)$ e che $Ext^c_R(A, \omega_R)/xExt^c_R(A, \omega_R)$ è un modulo canonico per $A/(x)$.

Prendiamo la successione esatta corta $0 \to A \xrightarrow{x} A \to A/(x) \to 0$ e la successione lunga:

$$\begin{aligned} \dots Ext^c_R(A/(x), \omega_R) \to Ext^c_R(A, \omega_R) \xrightarrow{x} Ext^c_R(A, \omega_R) \to \\ \to Ext^{c+1}_R(A/(x), \omega_R) \to Ext^{c+1}_R(A, \omega_R) \to \end{aligned}$$

per induzione $Ext^{c+1}_R(A/(x), \omega_R)$ è un modulo canonico per $A/(x)$, basta dunque provare che $0 = Ext^c_R(A/(x), \omega_R) = Ext^{c+1}_R(A, \omega_R)$.

Dal Lemma 8.17 la profondità di $A, A/(x)$ come $R-$moduli è $\dim A, \dim A - 1$ rispettivamente e quindi la 8.11 implica $0 = Ext^{c+1}_R(A, \omega_R)$. Per quanto riguarda $Ext^c_R(A/(x), \omega_R)$ dobbiamo sfruttare il fatto che, se I è l'annullatore di A in R si ha che (I, x) annulla $A/(x)$ in R. (I, x) contiene una successione regolare di lunghezza $c + 1$ e pertanto la profondità di (I, x) su ω_R è $c + 1$ pertanto da 5.1, 2) si ha $Ext^c_R(A/(x), \omega_R) = 0$. $\square$

Dualità

8.18 Teorema. *Sia A locale C-M con modulo canonico ω_A.*
Il funtore $M \to D(M) := hom_A(M, \omega_A)$ è una dualità sulla classe dei moduli C-M massimali, nel senso che:
i) È esatto.
ii) Si ha un isomorfismo $j_M : M \to D^2(M)$.

Dim. Da una successione esatta $0 \to M \to N \to P \to 0$ otteniamo una successione esatta

$$0 \to D(P) \to D(N) \to D(M) \to Ext^1_A(P, \omega_A)$$

da 8.11, se P è massimo C-M si ha $Ext^1_A(P, \omega_A) = 0$.

Per la seconda parte facciamo induzione, per $\dim A = 0$ è stata provata altrimenti esiste un non divisore di 0, sia $x \in A$ e sappiamo che $A/(x) \otimes_A \omega_A = \omega_A/x\omega_A = \omega_{A/(x)}$ d'altra parte, da basta provare (8.14) che j_M induce un isomorfismo modulo x. Per quasto basta osservare da 8.10, 8.13 che, posto $B := A/(x)$:

$$B \otimes_A hom_A(M, \omega_A) = hom_B(B \otimes_A M, B \otimes_A \omega_A) = hom_B(B \otimes_A M, \omega_B)$$

in altre parole, se denotiamo con D_A, D_B rispettivamente i funtori di dualità per i due anelli abbiamo:

$$B \otimes_A D_A(M) = D_B(B \otimes_A M) \tag{8.19}$$

applicando due volte la formula si ottiene l'isomorfismo desiderato. □

La descrizione del modulo canonico è particolarmente semplice nel caso del quoziente di un anello locale regolare.

Corollario. *Sia R un anello locale regolare di dimensione d, I un ideale e $A := R/I$ di C-M e dimensione e, sia $c = d - e$ allora A come R modulo ha dimensione omologica c e data una risoluzione libera minimale:*

$$\mathcal{F} \to R/I \to 0 := 0 \to F_c \to F_{c-1} \to \cdots \to F_0 \to R/I \to 0$$

si ha che la duale $\mathcal{F}^* := hom_R(\mathcal{F}, R)$ è una risoluzione minimale di ω_A.

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

i) A è di Gorenstein.

ii) Il complesso $\mathcal{F}$ è simmetrico, ovvero $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^*$.

iii) $F_c = R$.

Dim. Per ipotesi A ha dimensione omologica finita, che per la formula di Auslander Buchsbaum, e per il Lemma 8.17 è $c = d - e$.

La omologia del complesso $\mathcal{F}^*$ in grado j è $Ext_R^{c-j}(A, R)$ (si noti lo scambio dei gradi). L'ideale I contiene una successione regolare in R di lunghezza c (cf.) e tale lunghezza è massimale, quindi $Pf(I, R) = c$ da cui $Ext_R^{c-j}(A, R) = 0, \forall j > 0$ e si deduce che $\mathcal{F}^*$ è una risoluzione di $Ext_R^c(A, R) = \omega_A$. Tale risoluzione deve essere minimale, altrimenti dualizzando se ne otterrebbe una contraddizione alla minimalità di $\mathcal{F}$.

A è di Gorenstein se e solo se $\omega_A = A$ e ii) segue dalla unicità di una risoluzione minimale.

ii) implica iii) è ovvio per simmetria. Assumendo iii) si deduce che ω_A è il quoziente di R per un ideale J, esssendo un $R/I-$modulo si deve avere $I \subset J$ ma essendo $A = End_A(\omega_A)$ si ha infine $I = J$.

□