CAPITOLO 4 DIMENSIONE DI KRULL

versione del (9-4-2002)

1 Dimensione di Krull

La dimensione di Krull si sviluppa a partire dal corollario della proposizione 5.5.

Preso un ideale primo P di un anello commutativo A consideriamo tutte le possibili catene strettamente discendenti $P = P_0 \supsetneq P_1 \cdots \supsetneq P_{n-1} \supsetneq P_n$ di ideali primi a partire da P, il numero n è la *lunghezza* della catena.

1.1 Definizione. *Si dice altezza o codimensione di un ideale primo P, e si indica con $ht(P)$, il massimo delle lunghezze delle catene di ideali primi discendenti da P.*

Si chiama dimensione di Krull dell'anello A e si denota $\dim_K A$*, il massimo delle altezze degli ideali primi di A.*

Per un modulo M su un anello A definiamo la dimensione di Krull $\dim_K M$ *come la dimensione dell'anello $A/Ann(M)$.*

OSSERVAZIONE Dal corollario della proposizione 5.5. segue che la dimensione di Krull dell'anello A delle coordinate di una varietà affine V è uguale alla dimensione definita nel capitolo precedente, l'altezza di un ideale primo che definisce una sottovarietà irriducibile $W \subset V$ è la differenza fra la massima dimensione di una componente di V contenente W e la dimensione di W.

1.2 Proposizione. *Dato un ideale primo di un anello A si ha che:*

$$ht(P) = \dim_K A_P. \tag{1.3}$$

Dim. Dal Cap. 2, §5, segue che vi è una corrispondenza biunivoca preservante l'ordinamento di inclusione fra gli ideali primi $Q \subset P$ e gli ideali primi di A_P.

□

Il nostro scopo è di studiare ora la dimensione di Krull nel caso degli anelli e moduli Noetheriani.

1.4 Proposizione. *Dato A Noetheriano siano $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ i suoi primi minimali. Si ha che*

$$\dim_K A = \max \dim_K A/Q_i, \ i = 1, \ldots, r. \tag{1.5}$$

Dim. Segue dal fatto che una catena di primi si può sempre completare ad una contenente uno dei Q_i. □

1.6 Proposizione. *Sia M un modulo su un anello Noetheriano A con una successione finita di sottomoduli $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots M_{k-1} \supset M_k = \{0\}$ con $M_{i-1}/M_i = A/P_i$ e P_i un ideale primo ($i = 1, \dots, k$).*

Si ha

$$\dim_K M = \max_{i=1}^{k} \dim_K A/P_i. \tag{1.7}$$

Se $0 \to N \to M \to P \to 0$ è una successione esatta di moduli finitamente generati su un anello Noetheriano

$$\dim_K M = \max(\dim_K N, \dim_K P). \tag{1.8}$$

Dim.

Siano $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ i primi minimali di A. Per ogni i, $Ann(M) \subset Ann(A/P_i) = P_i$, viceversa chiaramente per induzione $P_t P_{t-1} \dots P_1 M \subset M_t$ quindi $\prod_{i=1}^{k} P_i \subset Ann(M)$, e per ogni $j = 1, \dots, r$ esiste un i tale che $P_i \subset Q_j$. Per la minimalità di Q_j segue che ogni tale Q_j appare nella sequenza dei P_i, ne segue che $\dim_K M = \max_{i=1}^{k} \dim_K A/P_i$.

Se $0 \to N \to M \to P \to 0$ è una successione esatta di moduli finitamente generati su un anello Noetheriano possiamo prendere (Cap 1, Corollario di 4.19) una successione di sottomoduli $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_i = N \supset M_{k-1} \supset M_k = \{0\}$ con $M_{i-1}/M_i = A/P_i$ e P_i un ideale primo ($i = 1, \dots, k$). 1.8 segue dunque da 1.7. $\square$

Riprendiamo il caso delle varietà affini. Data una varietà V con anello di coordinate $k[V]$ ed un suo punto P per definizione la *dimensione di V in P* è la dimensione dell'anello locale $k[V]_P$. Sappiamo da 1.5 che questa dimensione è il massimo delle dimensioni degli anelli $k[V]_P/Q_i$ per i primi minimali, ma gli anelli $k[V]_P/Q_i$ sono esattamente gli anelli locali $k[V_i]_P$ delle componenti irriducibili di V che contengono P.

2 Anelli Artiniani

Il nostro scopo è di studiare ora la dimensione di Krull nel caso degli anelli Noetheriani. Iniziamo dalla dimensione 0, questo è il caso in cui ogni ideale primo è massimale, nel caso delle algebre finitamente generate questo implicava che l'algebra è di dimensione finita, in generale abbiamo un analogo astratto nella teoria degli anelli Artiniani (da E. Artin).

2.1 Definizione. *Un anello si dice Artiniano se soddisfa la condizione della catena discendente sugli ideali. Ovvero ogni catena decrescente di ideali è stazionaria.*

Come nel caso Noetheriano la condizione della catena è equivalente ad assumere che ogni insieme non vuoto di ideali ha un elemento minimale.[1] Nello stesso modo si da la nozione di modulo Artiniano.

[1] Come per gli anelli Noetheriani questa condizione si può formulare anche in algebra non commutativa, prendendo solo catene di ideali destri (o sinistri).

2.2 Lemma. *Data una successione esatta* $0 \to N \to M \to P \to 0$ *di moduli* M *è Artiniano se e solo se* N, P *sono Artiniani.*

Dim. Se M è Artiniano è chiaro che N, P sono Artiniani. Viceversa sia $M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \dots$ una catena discendente, abbiamo che sia $M_k \cap N$ che la proiezione di M_k su P si stabilizza e la catena quindi si stabilizza.

□

2.3 Teorema. *Un modulo* M *Noetheriano è Artiniano se e solo se ammette una serie di composizione finita* $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$ *in cui tutti i fattori* M_i/M_{i+1} *sono irriducibili.*

Dim. Se M ammette una serie di composizione finita è chiaramente Noetheriano e Artiniano.

Viceversa, per induzione Noetheriana, sia N un sottomodulo di M massimale rispetto alla proprietà di avere una serie di composizione finita. Se $N \neq M$ possiamo trovare un sottomodulo Q di M con $Q \supsetneq N$ e minimale. Dunque Q/N è irriducibile e Q ha una serie di composizione finita, una contraddizione. □

Per il prossimo risultato abbiamo bisogno di un utile lemma generale il *lemma di sollevamento degli idempotenti.*

2.4 Lemma. *Dato un anello* R *(non necessariamente commutativo) un ideale* I *formato di elementi nilpotenti ed un elemento* $u \in R$ *con* $u^2 \cong u, \mod I$ *esiste un* $e \cong u \mod I$ *e* $e^2 = e$.
Se R *è commutativo* e *è univocamente determinato.*

Dim. Scriviamo $1 = u + v$ e supponiamo che $(u^2 - u)^n = 0$, da cui $u^n v^n = 0$. Decomponiamo

$$1 = (u+v)^{2n-1} = e + f,\ e := \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n-1}{i} u^{2n-1-i} v^i,\quad f := \sum_{i=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} u^{2n-1-i} v^i$$

Poiché $e = u^n e'$, $f = v^n f'$ si ha $ef = 0$ da cui $e = e^2$, $f = f^2$. Modulo I si ha $u \cong u^i$, $uv \cong 0$ da cui $e \cong u, \mod I$ come richiesto.

Se R è commutativo sia $e' \cong e, \mod I$ un altro idempotente, $e' = e + n$, $n^k = 0$. Da $e+n = (e+n)^2 = e+2en+n^2$ deduciamo $n^2 = (1-2e)n$ da cui ripetendo $n^3 = (1-2e)n^2 = (1-2e)^2 n$ e per induzione $0 = n^k = (1-2e)^{k-1}n$. Possiamo assumere $k - 1 = 2h$ quindi $(1-2e)^{2h} = [(1-2e)^2]^h = (1-4e+4e)^h = 1$ ed $n = 0$. □

Il Lemma precedente è strettamente legato alle idee di componenti connesse, sviluppate in Cap 1, §8. Si utilizza come sgue:

2.5 Proposizione. *Sia* A *un anello commutativo* I *un ideale formato da nilpotenti. Assumiamo che* $B := A/I$ *si decompone in una somma diretta* $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k$, *allora A si decompone in modo unico in una somma diretta $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$ in cui A_i ha immagine B_i in B.*

Dim. Si procede perinduzione su k. Decomporre un anello $B = B_1 \oplus B'$ è equivalente a scegliere un idempotente, l'unità di B_1. Il lemma precedente mostra che questa decomposizione si solleva in modo unico. □

Ora possiamo concludere:

2.6 Teorema. *Un anello Noetheriano di dimensione di Krull 0 è somma diretta finita di anelli locali artiniani.*

Un anello Noetheriano ha dimensione di Krull 0 se e solo se è Artiniano.[2]

Dim. Sia A Noetheriano di dimensione di Krull 0 e sia J il suo radicale nilpotente. Si ha $J = \cap_{i=1}^m P_i$ dove i P_i sono primi minimali. Poiché la dimensione è 0 tali primi sono anche massimali e $A/P_i = F_i$ è un campo per ogni i. Proviamo prima di tutto che $A/J = \oplus_{i=1}^m F_i$. Iniziamo osservando che $P_1 + \cap_{i\neq 1} P_i = A$ infatti P_1 è massimale e $\cap_{i\neq 1} P_i \not\subset P_1$ altrimenti essendo P_1 primo si dovrebbe avere che uno degli altri $P_i \subset P_1$. Segue che $A/J = F_1 \oplus A/\cap_{i\neq 1} P_i$ e $A/J = \oplus_{i=1}^m F_i$ per induzione. La decomposizione $A/J = F_1 \oplus A/\cap_{i\neq 1} P_i$ corrisponde ad un idempotente $u \in A/J$ con $A/Ju = F_1$. Dal lemma precedente tale idempotente si solleva ad un idempotente e che decompone $A = Ae \oplus A(1-e)$ ed Ae è locale con campo residuo F_1. Di nuovo per induzione si decompone l'intero A. Mostriamo ora che un anello locale Noetheriano di dimensione 0 è Artiniano.

Sia A l'anello M il suo ideale massimale che è anche minimo per ipotesi ed $F = A/M$ un campo. M è nilpotente ed abbiamo la catena $M \supset M^2 \supset \cdots \supset M^k = 0$. Ogni M^i/M^{i+1} è un modulo finitamente generato su A ma in effetti M annulla tale modulo e quindi è uno spazio vettoriale di dimensione finita su F. Pertanto ha una serie di composizione finita e quindi tutto A ha una tale serie di composizione.[3]

Per concludere basta provare che un anello Artiniano A ha dimensione di Krull 0.

In effetti se P è un ideale primo, A/P è un anello Artiniano senza divisori diu 0. Affermo che è un campo, infatti dato $a \in A/P$ la catena di ideali $(a) \supset (a^2) \supset \cdots \supset (a^k)$ si stabilizza e per qualche k si ha $(a^k) = (a^{k+1})$ da cui $a^k = a^{k+1}b$ e non essendoci divisori di zero, $1 = ab$ se $a \neq 0$. Pertanto ogni ideale primo è massimale e A ha dimensione di Krull 0. □

Riprendiamo l'analisi precedente, se A è un anello locale Artiniano di ideale massimale M abbiamo visto che $F = A/M$ è un campo. M è nilpotente, $M^{n+1} = 0$ ed abbiamo la catena $M =\supset M^2 \supset \cdots \supset M^k = 0$. Ogni M^i/M^{i+1} 'e uno spazio vettoriale di dimensione finita su F. Pertanto A ha una serie di composizione di lunghezza $\sum_{i=0}^n \dim_F M^i/M^{i+1}$. Nei casi geometrici in effetti A contiene il campo F e la lunghezza di una serie di composizione è $\dim_F A$. In generale la lunghezza di una qualunque serie di composizione (che per il teorema di Jordan Hölder non dipende dalla serie) si denota $\ell(A)$ e viene detta lunghezza di A. Ricordiamo rapidamente il teorema di Jordan Hölder.

[2]Si può provare che per un anello la proprietà di essere Artiniano implica quella di Noetheriano.

[3]Si noti che A assomiglia ad uno sapzio vettoriale su F, ma in generale non lo è perchè non contiene F, ad esempio $/(p^n)$ ha una serie di composizione di tipo $/(p)$ me non è uno spazio vettoriale su $/(p)$.

2.7 Teorema. *Sia M un modulo su un anello A non necessariamente commutativo e sia $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_k = 0$ con M_i/M_{i+1} irriducibile una serie di composizione. Se $M = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_h = 0$ con N_i/N_{i+1} irriducibili una seconda serie di comosizione si ha $h = k$ e i moduli M_i/M_{i+1} coincidono con i moduli N_j/N_{j+1} a meno dell'ordine.*

Dim. Prendiamo N_{h-1} che è un modulo irriducibile, esiste un minimo indice j per cui $N_{h-1} \not\subset M_j,\ N_{h-1} \subset M_{j-1}$, segue che $M_j \oplus\ N_{h-1} = M_{j-1}$ da cui M/N_{h-1} ha le due serie di composizione, l'una formata dai $N_i/N_{h-1}, i = 0, \dots, h-1$ e l'altra dalle immagini modulo N_{h-1} dei moduli M_i. per questi l'immagine di $M_j,\ M_{j-1}$ coincidono. Si finisce per induzione.

□

3 Teorema dell'ideale principale di Krull

Prima di passare al Teorema principale di Krull ci serve una nozione.

Sia dunque A un anello commutativo P un ideale primo e $i : A \to A_P$ la localizzazione. Detto M l'ideale massimale di A_P si pone:

3.1 Definizione. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisce* **potenza simbolica** $n-$ **esima***, e si denota con $P^{(n)}$, l'ideale $i^{-1}(M^n)$.*

Abbiamo due osservazioni:

3.2 Proposizione. *1) $P^{(n)} = \{a \in A \,|\, \exists s \notin P, sa \in P^n\}$.*
2) $P^{(n)}$ è un ideale primario di radicale P.

Dim. Dire che $i(a) \in M^n$ vuol dire che $i(sa = i(u),\ u \in P^n,\ s \notin P$ ovvero $tsa = u,\ t \notin P$.

2) Chiaramente $P^{(n)} \subset P,\ P^n \subset P^{(n)}$ quindi $\sqrt{P^{(n)}} = P$. Se $ab \in P^{(n)},\ a \notin P$ esiste $s \notin P$ con $sab \in P^n$ ma $sa \notin P$ e quindi $b \in P^{(n)}$. □

Ora possiamo provare:

3.3 Teorema. *(Teorema dell'ideale principale di Krull).*
Sia A un anello Noetheriano e P un ideale primo minimale fra quelli che contengono un dato elemento x, allora $ht(P) \leq 1$.

Dim. Dalla descrizione degli ideali primi nella localizzazione a P vediamo che possiamo assumere A locale con P ideale massimale. Se $Q \subsetneq P$ è un qualunque ideale primo basta provare che $ht(Q) = 0$.

Per questo basta provare che localizzando a Q l'ideale Q diviene nilpotente. Ora poiché P è minimale su x si ha che l'anello $A/(x)$ è Artiniano. Appplichiamo questa proprietà alla catena discendente delle potenze simboliche $Q^{(n)}$ di Q. Esiste un n per cui $xA +$

$Q^{(n)} = xA + Q^{(n+1)}$, pertanto dato comunque un elemento $u \in Q^{(n)}$ possiamo scrivere $u = ax + b,\ b \in Q^{(n+1)}$. Ne segue che $ax \in Q^{(n)}$ ma essendo P minimale su x si ha $x \notin Q$ e dalle proprietà delle potenze simboliche si ottiene $a \in Q^{(n)}$. Se ne deduce che, detto $M := Q^{(n)}/Q^{(n+1)}$ si ha $xM = M$. Dal lemma di Nakayama si ottiene $M = 0$ ovvero $Q^{(n)} = Q^{(n+1)}$. Ora questo implica che nell'anello locale A_Q l'ideale massimale $\underline{m} := Q_Q$ ha $\underline{m}^n = \underline{m}^{n+1}$. Di nuovo il lemma di Nakayama prova che $\underline{m}^n = 0$ come desiderato. □

Conseguenza:

3.4 Teorema. *(Teorema dell'ideale principale caso generale).*
Sia A un anello Noetheriano e P un ideale primo minimale fra quelli che contengono n elementi $x_1, \dots, x_n$, allora $ht(P) \leq n$.

Dim. Come prima possiamo assumere A locale e P il suo ideale massimale. Per induzione su n, basta provare che se $Q \subsetneq P$ è un qualunque ideale primo $ht(Q) \leq n - 1$.

Possiamo assumere che Q sia massimale fra tali ideali, quindi A/Q è un dominio locale con unico ideale primo non nullo la classe di P. Per ipotesi almeno uno degli elementi x_i ad esempio x_1 non è in Q. Segue come nel Teorema precedente che $A/(Ax_1 + Q)$ è Artiniano e quindi, modulo $Ax_1 + Q$ l'ideale P è nilpotente.

In particolare per ogni $i = 2, \dots, n$ si ha per qualche m che $x_i^m = a_i x_1 + y_i,\ y_i \in Q$. Evidentemente P è anche minimale fra gli ideali primi che contengono $x_1, y_2, y_3, \dots, y_n$. Proviamo che Q è minimale fra gli ideali primi che contengono $y_2, y_3, \dots, y_n$. Altrimenti avremmo un altro ideale primo $R \subsetneq Q,\ y_2, y_3, \dots, y_n \in R$, nell'anello A/R si ha che le P diviene minimale sulla classe di x_1 ma la catena $P \supset Q \supset R$ ha lunghezza 2, una contraddizione. □

Per provare il viceversa del Teorema ci serve il:

3.5 Lemma. *(di esclusione dei primi)*
Siano $I_1, \dots, I_n, J$ ideali di un anello A con $J \subset \cup_j I_j$. Se A contiene un campo infinito o se al piú due degli ideali I_j non sono primi si ha che $J \subset I_i$ per qualche i.

Dim. Se A contine un campo infinito ci si riduce allo stesso enunciato per gli spazi vettoriali. Altrimenti ragioniamo come segue. Se $n = 2$ e $J \not\subset I_1,\ J \not\subset I_2$ sia $x_1 \in J - I_1,\ x_2 \in J - I_2$, si ha che $x_1 + x_2 \in J$ ma evidentemente $x_1 + x_2 \notin I_1 \cup I_2$.

In generale sia $n > 2$ e possiamo assumere che J non sia contenuto in alcuna unione propria degli I_j (qui stiamo usando la ipotesi, perché fino a che $n > 2$ siamo sicuri che nella lista vi è almeno un ideale primo). Supponiamo ad esempio che I_1 è primo. Scegliamo come prima per assurdo $x_i \in J - \cup_{j \neq i} I_j$ per ogni i abbiamo dunque $x_i \in I_i$ e che $\prod_{i>1} x_i \in \cap_{j>1} I_j$ e $x_1 + \prod_{i>1} x_i$ non è in alcun I_j. Infatti se $x_1 + \prod_{i>1} x_i \in I_1$ allora $\prod_{i>1} x_i \in I_1$ ed essendo I_1 primo si ha che per qualche $i > 1$ $x_i \in I_1$ una contraddizione. D'altra parte se $x_1 + \prod_{i>1} x_i \in I_j, l > 1$ si ha $x_1 \in I_j$ anche una contraddizione. □

Ora possiamo provare il viceversa del Teorema dell Ideale principale:

3.6 Teorema. *In un anello Noetheriano A un primo P di codimensione n è minimale su un ideale generato da n elementi. Si possono scegliere gli n elementi in modo tale che tutti i primi minimali su di essi abbiano codimensione n.*

Dim. Per induzione costruiamo per ogni $k \leq n$ un ideale $I_k := (x_1, \ldots, x_k) \subset P$ tale che ogni primo minimale su I ha codimensione k.

Il passo induttivo consiste nel passare modulo I e prendere i primi minimali Q_j su I che per induzione hanno codimensione k. Se $k = n$ si ha che P deve essere uno di questi primi, altrimenti $P \not\subset \cup_j Q_j$ per il teorema di esclusione dei primi. Se prendiamo un elemento $x_{k+1} \in P$, $x_{k+1} \notin \cup_j Q_j$ abbiamo che ogni primo Q minimale su $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ contiene propriamente uno dei primi Q_j e quindi ha codimensione $k + 1$. $\square$

Dai Teoremi precedenti segue la seguente caratterizzazione della dimensione nel caso locale. La analisi precedente porta alla nozione di *sistema di parametri.*

Corollario-Definizione. *In un anello locale Noetheriano di ideale massimale $\underline{m}$ la dimensione è il minimo numero n per cui esistono n elementi $f_1, \ldots, f_n$ con la proprietà che $\underline{m}$ è l'unico ideale primo che li contiene tutti.*
Un tale insieme di elementi è detto sistema di parametri per l'anello locale.

Prima di concludere introduciamo una definizione che si svilupperà nella teoria degli anelli di Cohen Macaulay.

3.7 Definizione. *Dato un ideale I in un anello A diremo che I* **non è misto**[4] *se tutti gli ideali associati ad A/I sono minimali e della stessa codimensione.*

Ad esempio se $I = (a)$ richiediamo che tutti gli ideali associati hanno codimensione 1.

4 Il cono e lo spazio tangente

Dato un anello locale Noetheriano A di ideale massimale $\underline{m}$ possiamo costruire l'anello graduato $Gr_{\underline{m}}(A) := \oplus_{i=0}^{\infty} \underline{m}^i/\underline{m}^{i+1}$ è un algebra sul campo $F := A/\underline{m}$ generata su F dalle classi u_i di una base di $\underline{m}/\underline{m}^2$ come spazio vettoriale su F.

Il significato geometrico di questa costruzione è quello di *cono tangente.*

Vediamo il perché. Sia A un anello Noetheriano e prendiamo un ideale massimale $\underline{m}$. Indichiamo con $A' := A_{\underline{m}}$, $\underline{m}' := \underline{m}_{\underline{m}} = \underline{m} \otimes_A A'$, possiamo formare un anello graduato direttamente $Gr_{\underline{m}}(A) := \oplus_{i=0}^{\infty} \underline{m}^i/\underline{m}^{i+1}$ oppure prima localizzando A ad $\underline{m}$, formare $Gr_{\underline{m}'}(A') := \oplus_{i=0}^{\infty} (\underline{m}')^i/(\underline{m}')^{i+1}$. Le due costruzioni coincidono, infatti essendo $A/\underline{m}$ un campo si ha per la proprietà universale il diagramma commutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A_{\underline{m}} = A' \arrow[d] \\ A/\underline{m} \arrow[r, "\cong"] & A'/\underline{m}' \end{tikzcd}$$

[4] *nunmixed* in inglese.

Per piattezza $(\underline{m}')^i/(\underline{m}')^{i+1} = \underline{m}^i/\underline{m}^{i+1} \otimes_A A'$ ma $\underline{m}$ annulla $\underline{m}^i/\underline{m}^{i+1}$ e dunque $\underline{m}^i/\underline{m}^{i+1} \otimes_A A' = \underline{m}^i/\underline{m}^{i+1} \otimes_A A'/\underline{m}' = \underline{m}^i/\underline{m}^{i+1} \otimes_A A'/\underline{m}' = \underline{m}^i/\underline{m}^{i+1} \otimes_A A/\underline{m} = \underline{m}^i/\underline{m}^{i+1}$.

Ora analizziamo la costruzione $Gr_{\underline{m}}(A)$ nel caso in cui $A = k[x_1, \dots, x_k]/(f_1, \dots, f_m)$ (in particolare se A è l'anello delle coordinate di una varietà). L'ideale massimale corrisponde ad un punto che, cambiando le coordinate, si può assumere 0.

Facciamo prima l'esempio di una sola equazione $f(x)$ che sviluppiamo secondo le sue componenti omogenee, $f(x) = \sum_{i=r}^{N} f_i(x),\ f_r(x) \neq 0$.

Si ha $\underline{m} = (x_1, \dots, x_k)/(f(x))$ dunque $\underline{m}^i/\underline{m}^{i+1} = (x_1, \dots, x_k)^i/(x_1, \dots, x_k)^{i+1} + (f(x))$, indicando con P_i lo spazio dei polinomi omogenei di grado i abbiamo

$$\underline{m}^i/\underline{m}^{i+1} = P_i/P_i \cap [(x_1, \dots, x_k)^{i+1} + (f(x))]$$

Un polinomio omogeneo $u(x)$ di grado i è in $[(x_1, \dots, x_k)^{i+1} + (f(x))]$ se e solo se $u(x) = v(x)f_r(x)$. Pertanto in questo caso $Gr_{\{0\}}k[x_1, \dots, x_k]/(f(x)) = k[x_1, \dots, x_k]/(f_r(x))$. Il significato di cono tangente sta nella seguente analisi, presa una retta $x_i = a_i t$ per l'origine, l'intersezione di tale retta con la ipersufercie $f(x) = 0$ viene dalla equazione $0 = f(a_1 t, \dots, a_n t) = \sum_{i=r}^{N} f_i(a_1, \dots, a_n)t^i$. Per a_i generici tale equazione ha uno 0 di ordine r in 0, ma per gli a_i che soddisfano $f_r(a_1, \dots, a_n) = 0$ l'equazione ha uno 0 di ordine $> r$ in 0. In modo ovvio tali rette si dicono *tangenti* alla ipersuperficie.

In generale dobbiamo considerare $P_i \cap [(x_1, \dots, x_k)^{i+1} + (f_1, \dots, f_m)]$, evidentemente un polinomio omogeneo di grado i è in $(x_1, \dots, x_k)^{i+1} + (f_1, \dots, f_m)$ se e solo se è il termine omogeneo di grado più basso di un polinomio in $(f_1, \dots, f_m)$. L'insieme dei termini omogenei di grado più basso dei polinomi di $I := (f_1, \dots, f_m)$ è evidentemente un ideale omogeneo che denotiamo con I_0 e $Gr_0 k[x_1, \dots, x_k]/I = k[x_1, \dots, x_k]/I_0$. Geometricamente il cono tangente ad una varietà in un punto è l'intersezione dei coni tangenti di tutte le ipersuperfici che la contengono.

Si notino però vari punti, prima di tutto se I è un ideale primo I_0 può non essere neppure radicale ed il cono può avere molte componenti e non ridotte, un esempio si ha già con semplici curve $f(x, y) = 0$, *e.g.* $x^2y + x^3 + y^3 = 0$. Inoltre se $I := (f_1, \dots, f_m)$ **non è vero** in generale (semplici esempi), che I_0 è generato dai termini di grado più basso dei generatori f_i scelti.

Passiamo ora a definire lo spazio tangente (secondo Zariski). Nel caso di una varietà V immersa in k^n, lo definiamo come:

4.1 Definizione. *Lo spazio tangente di Zariski di una varietà V in un punto P è il minimo sottospazio lineare contenente il cono tangente a V in P (come sottoschema).*

Per definizione dunque, una forma lineare $u(x)$ si annulla sullo spazio tangente di Zariski se e solo se si annulla sul cono tangente.

4.2 Teorema. *Fissando il punto nell'origine, lo spazio tangente di Zariski è definito dalle equazioni lineari $u(x) = 0$ dove gli $u(x)$ variano fra i termini lineari delle equazioni definenti V.*

Se l'ideale di V è generato da $k-$equazioni $f_1(x), \dots, f_k(x)$ lo spazio tangente di Zariski in un punto $P := (a_1, \dots, a_n)$ è definito dalle $k-$equazioni lineari

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j(P)}{\partial x_i}(x_i - a_i) = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

La codimensione dello spazio tangente di Zariski in un punto P è il rango della matrice $(n \times k)$Jacobiana

$$J(f_1(x), \dots, f_k(x)) := (\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}),\ j = 1, \dots, k;\ i = 1, \dots, n$$

calcolata in P.

Dim. Per definizione una equazione lineare svanisce sul cono tangente se e solo se è il termine di grado più basso di una delle equazioni definenti V.

Dato un punto $P := (a_1, \dots, a_n)$ il cono tangente si ottiene facendo il cambiamento di coordinate $y_i = x_i - a_i$ e poi prendendo i termini più bassi nelle y delle equazioni definenti V. Per ipotesi $P \in V$ e quindi le equazioni definenti V non hanno termine costante. Similmente per i termini lineari e lo spazio tangente di Zariski. Il termine lineare di un polinomio $f(y_1, \dots, y_n)$ è $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial y_i} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} y_i$.

Se $f(x) = \sum_{j=1}^{k} u_j(x) f_j(x)$ si ha $f_j(P) = 0$ e:

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{k} u_j(P) \frac{\partial f_j(P)}{\partial x_i}$$

pertanto il termine lineare di $f(y_i - a_i)$ è combinazione lineare dei termini lineari dei generatori $f_j(y_i - a_i)$.

L'ultima asserzione segue dalla precedente e dall'algebra lineare. $\square$

Osserviamo infine che lo spazio tangente di Zariski ha un significato intrinseco. Infatti abbiamo visto che se P corrisponde ad un ideale massimale $\underline{m}$ possiamo identificare $\underline{m}/\underline{m}^2$ con la parte lineare dell'anello delle coordinate del cono tangente, se la varietà è immersa $\underline{m}/\underline{m}^2$ si identifica con le forme lineari su k^n modulo le forme lineari che definiscono lo spazio tangente, pertanto in modo naturale lo spazio tangente di Zariski si può identificare con $(\underline{m}/\underline{m}^2)^*$

5 Filtrazioni e Lemma di Artin Rees

Ci proponiamo di mostrare che la dimensione di Krull di A coincide con quella dell'anello graduato $Gr_{\underline{m}}(A)$. Per questo è necessario generalizzare la costruzione precedente.

Sia I un ideale con la proprietà che l'anello locale A/I è Artiniano, ad esempio l'ideale $I := (f_1, \ldots, f_n)$ con gli f_i un sistema di parametri. In particolare A/I ha una lunghezza finita $\ell(A/I)$. Per ogni $n \geq 0$ si ha che $\underline{m}/I^n$ è ancora l'unico ideale primo di A/I^n che è Artiniano.

Inoltre I/I^2 è un modulo di tipo finito su A/I. Ora possiamo rivedere la dimensione come una misura della crescenza di $\ell(A/I^n)$. Se $F = A/\underline{m} \subset A$ sappiamo che

$$\ell(A/I^n) = \dim_F(A/I^n) = \dim_F \oplus_{i=0}^{n-1} I^i/I^{i+1}$$

L'anello graduato $Gr_I(A) := \oplus_{i=0}^{\infty} I^i/I^{i+1}$ è un algebra sull'anello locale Artiniano A/I generata su A/I dalle classi u_i di un numero finito di generatori di I/I^2 come modulo su A/I.

Come nel Teorema 3.8 possiamo dedurre se, A è un anello locale Artiniano.

5.1 Teorema. *Per un modulo graduato $M = \oplus_{i=0}^{\infty} M_i = \sum_{i=1}^{m} Ru_i$ finitamente generato su $R = A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ l'anello dei polinomi su A, esiste un polinomio $q_M(t)$ a valori interi di grado $\leq n-1$ per cui $\ell(M_i) = q_M(i)$, $\forall i >> 0$.*

Dim. Per questo teorema o si segue la dimostrazione di 3.8 e si vede che resta sostanzialmente la stessa, oppure ci si riduce a 3.8 come segue:

Si filtra A con le potenze dell'ideale massimale $\underline{m}$ di A, (una filtrazione finita poiché $\underline{m}$ è nilpotente) e si osserva che per ogni $A-$modulo finitamente generato N, posto $Gr(N) := \oplus \underline{m}^i N/\underline{m}^{i+1}N$ si ha $\ell(N) = \dim_F Gr(N)$. A questo punto $Gr(R) = Gr(A)[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ è un algebra finitamente generata su F di tipo finito su $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ e pertanto di dimensione n e per M si ha $Gr(M) = \oplus_i Gr(M_i)$ con $\ell(M_i) = \dim_F Gr(M_i)$ da cui segue facilmente l'asserto. $\square$

A questo punto dobbiamo provare che la dimensione di Krull di un modulo su un anello locale coincide con la dimensione calcolata con il polinomio di Hilbert Samuel su un graduato da esso costruito con il metodo precedente.

Per questo dobbiamo riprendere un punto sulle filtrazioni.

La situazione è la seguente, abbiamo un anello A ed un suo ideale I con cui formiamo la filtrazione I^k. Per un modulo M una filtrazione $I-$adica è una filtrazione decrescente $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_k \supset \ldots$ per cui $IM_k \subset M_{k+1}$. dato un modulo con una filtrazione $I-$adica ed un suo sottomodulo N, su N abbiamo una filtrazione $I-$adica indotta, $N_k := M_k \cap N$.

Su ogni modulo M abbiamo una *filtrazione $I-$adica standard* ponendo $M_k := I^k M$, una difficloltà che incontriamo viene dal fatto che la filtrazione indotta su un sottomodulo N dalla filtrazione standard in generale non è standard. Per questo è opportuno prendere una classe più vasta di filrazioni che hanno proprietà simili a quella standard e che, in opportune condizioni di finitezza sono preservate passando da un modulo ad un sottomodulo.

5.2 Definizione. *Una filtrazione $I-$adica si dice* **stabile** *se esiste un k_0 per cui $M_{k+1} = IM_k$, $\forall k \geq k_0$.*

È interessante vedere in modo diverso queste idee. Dato un anello A ed un suo ideale I possiamo costruire un nuovo anello come segue nell'anello dei polinomi $A[t]$ consideriamo il sottoinsieme $B_I A := \oplus_{i=0}^{\infty} I^i t^i$ chiaramente unsottoanello, detto l'algebra dello scoppiamento, per ragioni geometriche che per ora non approfondiamo.[5] Se I è un ideale finitamente generato $I = (a_1, \dots, a_m)$ si vede facilmente che $B_I A$ è generata su A dagli elementi $a_i t$, pertanto se A è Noetheriano anche $B_I A$ lo è.

Dato un modulo M con una filtrazione I adica possiamo considerare in $M[t] = A[t] \otimes_A M$ il sottoinsieme $B_I M := \oplus_{i=0}^{\infty} M_i i t^i$. Dagli assiomi dati segue immediatamente che $M_I M$ è un $B_I A$ modulo. Inoltre i graduati associati si possono costruire a partire da questi oggetti in un semplice modo. In $B_I A$ consideriamo l'ideale $J := \oplus_{i=0}^{\infty} I^{i+1} t^i$,si ha in modo canonico $Gr(A) = B_I A/J$, una analisi simile per il modulo M, ovvero $Gr(M) = \oplus_{i=0}^{\infty} M_i i t^i / \oplus_{i=0}^{\infty} M_{i+1} t^i$.

Per gli anelli Noetheriani vale il seguente:

5.3 Lemma. *(di Artin Rees) Dato un modulo M finitamente generato su un anello Noetheriano A ed una sua filtrazione $I-$adica. La filtrazione è stabile se e solo se $B_I M$ è un $B_I A$ modulo finitamente generato.*

Dato un modulo M finitamente generato su un anello Noetheriano A ed una sua a filtrazione $I-$adica stabile, la filtrazione indotta su un suo sottomodulo N è stabile.

Dim. La seconda parte segue dalla prima e dalla Noetherianità degli anelli e moduli. Per la prima, se la filtrazione è stabile, prendiamo per ogni $h \leq k_0$ un insieme finito di generatori $m_{h,j}$ di M_h si vede subito che gli elementi $m_{h,j} t^h$ generano $B_I M$ come $B_I A$ modulo. Viceversa si può assumere che i generatori di $B_I M$ su $B_I A$ siano della forma $m_{h,j} t^h$, $h \leq k_0$. Preso un $k > k_0$ e $m \in M_k$ abbiamo dunque $mt^k = \sum_{h,j} a_{h,j} t^{k-h} m_{h,j} t^h, m_{h,j} \in I^{k-h}$ ovvero $M_k = \sum_{h \leq k_0} I^{k-h} M_h \subset IM_{k-1}$, quindi $M_k = IM_{k-1}$. □

Vi è un importante conseguenza del Lemma precedente.

5.4 Teorema. *(Teorema di Krull dell'intersezione) Dato un ideale I di un anello Noetheriano A ed un modulo M finitamente generato, esiste un $r \in I$ tale che:*

$$(1 - r) \cap_{i=1}^{\infty} I^i M = 0. \tag{5.5}$$

Se I è contenuto ne radicale di Jacobson $\cap_{i=1}^{\infty} I^i M = 0$. Se A è un dominio e I un ideale proprio $\cap_{i=1}^{\infty} I^i = 0$.

Dim. Consideriamo la filtrazione $\cap_{i=1}^{\infty} I^i M \cap I^j M$ indotta in $\cap_{i=1}^{\infty} I^i M$ dalla filtrazione $I-$adica. Evidentemente $\cap_{i=1}^{\infty} I^i M \cap I^j M = \cap_{i=1}^{\infty} I^i M$. Dal Lemma di Artin Rees segue che $I \cap_{i=1}^{\infty} I^i M = \cap_{i=1}^{\infty} I^i M$ e quindi possiamo concludere dal Cap. 1, Lemma 2.2. Le due

[5] la B sta per *blow up*.

ultime affermazioni seguono semplicemente, se I è nel radicale di Jacobson si ha che $1-r$ è invertibile. Mentre nel caso di un dominio e di un ideale proprio basta osservare che $1-r \neq 0$

$\square$

Spesso si utilizza la proposizione precedente per un anello locale Noetheriano ed il suo ideale massimale, che coincide con il radicale di Jacobson.

6 Polinomi di Hilbert Samuel

6.1 Teorema. *Dato un anello locale di ideale massimale $\underline{m}$ e di dimensione n si ha, per ogni ideale $I \subset \underline{m}$ per cui A/I è Artiniano:*

(1) *Se M è un A modulo finitamente generato, per ogni k si ha che M/I^kM ha lunghezza finita ed esiste un polinomio $q_{I,M}(k)$ di grado $\leq n$ tale che $\ell(M/I^kM) = q_{I,M}(k)$ per $k >> 0$.*

(2) *Più in generale se M è un A modulo finitamente generato, ed M_k una filtrazione $I-$adica stabile, per ogni k si ha che M/M_k ha lunghezza finita e $\ell(M/M_k)$ è un polinomio per $k >> 0$ di grado e coefficiente direttivo indipendente dalla filtrazione scelta. Inoltre il grado è anche indipendente dall'ideale I, definiremo* $\dim M$ *il grado di un tale polinomio.*

(3) *Posto $q_{I,M}(k) := \ell(M/I^kM)$ si ha per una successione esatta di moduli finitamente generati $0 \to N \to M \to P \to 0$ che*

$$q_{I,M}(k) = q_{I,N}(k) + q_{I,P}(k) - F(k)$$

dove $F(k)$ è un polinomio con coefficiente direttivo positivo e di grado strettamente inferiore al grado di $q_{I,M}(k)$.

(4) *Se M è un A modulo finitamente generato si ha $\dim M = \dim_K M$. In particolare per l'anello stesso $q_I(k) := \ell(A/I^k)$ è, per k grande, un polinomio in k di grado esattamente n.*

Dim. Dalle ipotesi fatte $Gr(M)$ è un modulo finitamente generato su $Gr(A)$ e dunque ad esso si applica la teoria dei moduli graduati e si deduce che $\ell(M/M_k)$ è un polinomio per $k >> 0$. Paragoniamo ora una filtrazione M_k stabile con la filtrazione standard, denotiamo con $q(k) := \ell(M/I^kM)$, $q'(k) := \ell(M/M_k)$. Abbiamo $M_k \supset I^kM$ quindi $\ell(M/I^kM) \geq \ell(M/M_k)$. Ora sia $M_{k+1} = IM_k,\ k \geq k_0$, quindi $M_k \subset I^{k-k_0}M,\ k \geq k_0$. In definitiva:

$$q(k-k_0) \leq q'(k) \leq q(k),\ k \geq k_0$$

Segue che $q(k),\ q'(k)$ hanno lo stesso grado. Proviamo ora che il grado di tale polinomio non dipende da I. Dato un altro tale ideale J si ha che, modulo I, J è nilpotente, similmente scambiando i due ruoli. Ovvero $J^r \subset I,\ I^s \subset J$ da cui $J^{kr} \subset I^k,\ I^{ks} \subset J^k$. Pertanto, posto $q_I(k) := \ell(M/I^kM), q_J(k) := \ell(M/J^kM)$ si ha $q_I(k) \leq q_J(rk),\ q_J(k) \leq q_I(sk)$ e segue che i gradi dei due polinomi sono uguali.

Proviamo ora che, in dimensione n il grado è $\leq n$. Dalla analisi fatta possiamo calcolare il grado prendendo come I l'ideale generato da un sistema di parametri $f_1, \dots, f_n$. In questo caso i moduli graduati sono sull'anello dei polinomi in $n-$variabili su A/I ed il calcolo sul grado segue.

3) Per ogni k abbiamo due successioni esatte:

$$0 \to N \cap I^kM \to I^kM \to I^kP \to 0, \quad 0 \to N/N \cap I^kM \to M/I^kM \to P/I^kP \to 0$$

segue che $q_{I,M}(k) = q_{I,P}(k) + q'_{I,N}(k)$, dove $q'_{I,N}(k)$ è il polinomio di Hilbert della filtrazione $N \cap I^kM$. Dalla dimostrazione di 2) sappiamo che $q'_{I,N}(k) \leq q_{I,N}(k)$, è un polinomio con lo stesso grado e coefficiente direttivo, pertanto $F(k) := q_{I,N}(k) - q'_{I,N}(k)$ è positivo e con grado strettamente inferiore a quello di $q_{I,N}(k)$.

4) Per induzione su $n = \dim_K A$, se $n = 0$ anche $\dim A = 0$ poichè A ha lunghezza finita, supponiamo quindi provata l'eguaglianza quando $\dim_K A < n$. Sia M un modulo finitamente generato e $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots M_{k-1} \supset M_k = \{0\}$ una successione finita di sottomoduli con $M_{i-1}/M_i = A/P_i$ e P_i un ideale primo $(i = 1, \dots, k)$. Da 3) per induzione segue che $q_{I,M}(k) = \sum q_{I,A/P_i}(k) + F(k)$ dove $F(k)$ è un polinomio di grado strettamente inferiore del massimo dei gradi dei polinomi $q_{I,A/P_i}(k)$, ne segue $\dim M = \max \dim A/P_i$, poiché per la dimensione di Krull vale la stessa proprietà basta provare che $\dim A/P = \dim_K A/P$, per induzione solo se $\dim_K A/P = n$. Dalla Teoria dei sistemi di parametri segue comunque che $\dim A/P \leq \dim_K A/P$. Ora calcoliamo $\dim A/P$ come grado del polinomio $q_{I,A/P}$ per $I = (f_1, \dots, f_n)$ un sistema di parametri con la proprietà che ogni primo minimale su $f_1, \dots, f_k$ ha codimensione k per ogni k. Consideriamo la successione esatta $0 \to A/P \xrightarrow{f_1} A/P \to (A/P)/(f_1) \to 0$. Da 3) segue che $\dim A/P \geq \dim(A/P)/(f_1) + 1$, per costruzione $\dim_K(A/P)/(f_1) = n - 1$ e per induzione $\dim(A/P)/(f_1) + 1 = n$ quindi $\dim A/P \geq n$ da cui $\dim A/P = n$. □

Osserviamo un corollario importante (in particolare si veda la sezione su anelli di Cohen Macaulay).

Corollario. *Sia $M \neq 0$ un modulo finitamente generato su un anello locale noetheriano A e $a \in A$ un elemento che non è divisore di 0 su M allora*

$$\dim_K M/aM < \dim_K M. \tag{6.2}$$

Dim. Dalla successione esatta $0 \to M \xrightarrow{a} M \to M/aM$ e dalla parte 3 del teorema precednte segue che il grado del polinomio di Hilbert Samuel di M/aM è strettamente inferiore a quello di M. □

7 Anelli regolari e singolari

Possiamo ora dare la definizione algebrica di punto regolare (o liscio) di una varietà in termini di proprietà del suo anello locale e poi confrontare tale definizione con quella più analitica sui numeri complessi.

7.1 Definizione. *Un anello locale Noetheriano di dimensione n si dice* **regolare** *se il suo ideale massimale è generato da n elementi, che sono necessariamente un sistema di parametri.*

7.2 Teorema. *Per un anello locale Noetheriano A con ideale massimale $\underline{m}$ e con $\dim A = n$ le condizioni seguenti sono equivalenti:*

i) A è regolare.

ii) $\dim_F(\underline{m}/\underline{m}^2) = n$.

iii) L'anello graduato $Gr_{\underline{m}}A$ è un anello di polinomi in $n-$variabili sul campo $F := A/\underline{m}$.

Dim. i) $\implies$ ii), iii) Sia $\underline{m}$ generato da un sistema di parametri $f_1, \dots, f_n$, quindi $n = \dim A = \dim Gr_{\underline{m}}A$.

Dette x_i le classi degli f_i modulo $\underline{m}^2$, sappiamo che $Gr_{\underline{m}}A = F[x_1, \dots, x_n]$, non vi sono relazioni fra gli x_i perchè la dimensione di $Gr_{\underline{m}}A$ è n, ii), iii) seguono.

ii) $\implies$ iii) Se $\dim_F(\underline{m}/\underline{m}^2) = n$ si ha $Gr_{\underline{m}}A$ è un quoziente $Gr_{\underline{m}}A = F[x_1, \dots, x_n]/I$ dell'anello dei polinomi generato dalle classi x_i di una base di $\underline{m}/\underline{m}^2$, ma $\dim Gr_{\underline{m}}A = n$ e quindi $I = 0$.

iii) $\implies$ ii) Se $Gr_{\underline{m}}A = F[x_1, \dots, x_n]$ è un anello di polinomi, per ogni ideale massimale $\underline{n}$ di $F[x_1, \dots, x_n]$ si ha $\dim \underline{n}/\underline{n}^2 = n$, applicato ad $\underline{n} := \oplus_{i=1}^{\infty} \underline{m}^i/\underline{m}^{i+1}$ si ha $\underline{n}/\underline{n}^2 = \underline{m}/\underline{m}^2$ e l'asserto.

ii) $\implies$ i), infatti se le classi di $f_1, \dots, f_n$ sono una base di $\underline{m}/\underline{m}^2$, dal lemma di Nakayama segue che $\underline{m} = (f_1, \dots, f_n)$. □

Per ottenere qualche proprietà degli anelli regolari iniziamo da un semplice lemma.

7.3 Lemma. *Sia A un anello, $A \supset A_1 \supset \cdots \supset A_i \supset \dots$ una filtrazione decrescente con $\cap_i A_i = 0$.*

Se $Gr(A)$ non ha divisori di 0, anche A non ha divisori di 0.

Dim.

Supponiamo che $ab = 0$ con $0 \neq a, b \in A$. Sia $a \in A_i,\ a \notin A_{i+1},\ b \in A_j,\ b \notin A_{j+1}$ abbiamo classi non nulle $\overline{a} \in A_i/A_{i+1},\ \overline{b} \in A_j/A_{j+1}$ con $\overline{a}\overline{b} = 0$ una contraddizione.

□

Corollario. *Un anello locale regolare non ha divisori di 0.*

Dim. Dal lemma precedente ed il teorema di intersezione di Krull. □

Mettiamoci ora di nuovo nel caso affine, $A = k[x_1, \dots, x_k]/(f_1, \dots, f_m)$ e sia V la varietà definita da tali equazioni. Al momento non assumiamo che A sia un anello ridotto.

Supponiamo che ogni componente irriducibile di V ha la stessa dimensione $n = \dim V$.

7.4 Teorema. *(Criterio jacobiano di non singolarità)*
I punti $P \in V$ per cui A_P è un anello locale regolare sono esattamente quelli in cui il rango della matrice Jacobiana è $k-n$ e quindi lo spazio tangente di Zariski ha dimensione n.

Dim. Per ipotesi, per ogni $P \in V$ l'anello locale A_P ha dimensione n.
Da 7.2, ii) se $\underline{m}$ è l'ideale massimale in P, A_P è regolare se e solo se $\dim_k(\underline{m}/\underline{m}^2) = n$. Dal Teorema 4.2 la codimensione dello spazio tangente di Zariski $(\underline{m}/\underline{m}^2)^*$ in un punto P è il rango della matrice Jacobiana in P. □

Abbiamo un viceversa di tale teorema.

7.5 Teorema. *Sia $A = k[x_1, \dots, x_k]/(f_1, \dots, f_i)$ e sia V la varietà definita da tali equazioni. Sia U l'aperto di V dove la matrice Jacobiana $J(f_1, \dots, f_i)$ ha rango esattamente i.*
Allora ogni punto $p \in U$ è liscio in V e V ha codimensione i in P.

Dim. Dal Teorema dell'ideale principale la codimensione di ogni componente irriducibile di V è $h \leq i$. Nei punti di U la dimensiopne dello spazio tangente di Zariski è $k-i \leq h-i$ segue che $h = k$ e che i punti di U sono lisci. □

Applichiamo i due Teoremi precedenti ad una varietà V, data da equazioni $(f_1, \dots, f_m)$ in un punto P in cui V ha codimensione i ed in cui il rango della matrice Jacobiana $J(f_1, \dots, f_m)$ è i. Esistono dunque i fra le funzioni i $(f_1, \dots, f_m)$, ad esempio le prime i, per cui ancora $J(f_1, \dots, f_i)$ ha rango esattamente i. Sia come prima $W \supset V$ la varietà definita da $(f_1, \dots, f_i)$ ed U il suo aperto dove la matrice Jacobiana $J(f_1, \dots, f_i)$ ha rango esattamente i. Si ha che U ha codimensione i in ogni suo punto e localmente è irriducibile, $P \in U$. Ne segue che in un intorno di P le varietà U e V coincidono. In particolare in un intorno di P la varietà V è definita da i equazioni.

Sui numeri complessi possiamo applicare la teoria analitica, in particolare il Teorema delle funzioni implicite, che ci dà l'esistenza di i funzioni analitiche $g_i(x_{i+1}, \dots, x_n)$ che parametrizzano in modo regolare la varietà in un intorno di p come:

$$(g_1(x_{i+1}, \dots, x_n), \dots, g_i(x_{i+1}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n).$$

L'ultima cosa che ci resta da verificare è che, in una varietà V l'insieme U dei punti regolari è non vuoto. Poiché U è un aperto ci possiamo restringere al caso irriducibile. Sia V irriducibile di dimensione n e $k[V] := k[x_1, \dots, x_k]/(f_1, \dots, f_m)$ il suo anello di coordinate. Possiamo supporre per esempio che le classi di $x_1, \dots, x_n$ sono algebricamente indipendenti in $k[V]$ e vogliamo mostrare che la matrice Jacobiana $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$ ha rango n in un aperto non vuoto di V. Per questo abbiamo un calcolo defferenziale algebrico da sviluppare. Lo faremo nel prossimo capitolo.