CAPITOLO 6 ELEMENTI DI TOPOLOGIA PL

NOTA In questo Capitolo iniziamo a discutere la nozione di poliedro e di applicazione PL ossia lineare a tratti, si tratta della formalizzazione in senso intrinseco della teoria simpliciale alcune dimostrazioni sono rimandate a capitoli successivi. Uno degli scopi che ci prefiggiamo è quello di discutere la nozione di varietà e quella collegata di singolarità sotto vari punti di vista fra cui quello combinatorio.

§1 Celle

INTRODUZIONE Iniziamo ricordando alcune definizioni fondamentali e presentando in vari modi la nozione di cella (poliedro convesso). Come spesso accade in geometria un oggetto può essere descritto implicitamente, tramite vincoli, o esplicitamente tramite parametri. Per le celle la definizione implicita è tramite un sistema di equazioni e disequazioni lineari (cf. 1.3), mentre quella parametrica è come inviluppo convesso di un numero finito di punti (cf. 1.6). L'equivalenza delle due definizioni non è completamente banale e viene rimandata al Capitolo II-1.

Da questa nozione arriveremo alla idea di poliedro e di sfera poliedrale. I poliedri formano una categoria *la categoria PL* strettamente legata alla categoria simpliciale ma di natura più geometrica.

Una idea fondamentale in questa categoria è lo studio del *link* in un punto, che costituisce un invariante della *singolarità* vicino al punto dato.

A partire da questa nozione potremo introdurre la nozione di *varietà non singolare PL* che è un concetto intermedio fra quelli di varietà topologica e di varietà differenziale.

La nozione di link ha molte buone proprietà geometriche che sfrutteremo nel prossimo capitolo per descrivere la geometria del *complesso trasverso* ad una data triangolazione, una idea fondamentale nella dualità.

1 Joins

Siano X, Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}^m$. Il loro **join** XY o $X \star Y$ é l'insieme dei punti

$$\{(1-t)x + ty : x \in X, y \in Y\} \tag{1.1}$$

$X \star Y$ non è un invariante topologico della coppia X, Y, come ci si convince subito con facili esempi. Ma vi è un caso particolare importante in cui questo inconveniente non si presenta.

1.2 Definizione. *X, Y si dicono congiungibili se*
(a) $X \cap Y = \emptyset$
(b) se $x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y$ e $x_1 \neq x_2$ oppure $y_1 \neq y_2$ allora $(x_1, y_1) \cap (x_2, y_2) = \emptyset$

Intuitivamente dobbiamo pensare a questa condizione come ad una condizione che i due insiemi X, Y siano *sghembi.*

1.3 Osservazione Se X, Y sono congiungibili e $X' \subset X,\ Y' \subset Y$ allora anche X', Y' sono congiungibili. Inoltre se $X" \subset X,\ Y" \subset Y$ sono altri sottoinsiemi si ha:

$$(X' * Y') \cap (X" * Y") = (X' \cap X') * (Y' * Y") \tag{1.4}$$

1.5 Esempio Nello spazio $\mathbb{R}^{p+q+1}$ i due sottospazi affini (tipici spazi sghembi)

$$A^p := \{(x_1, x_2, \ldots, x_p, 0, 0, \ldots, 0)\}, \quad A^q := \{(0, 0, \ldots, 0, 1, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q})\}$$

sono congiungibili.

Se un punto v è congiungibile con X in R^n, il join $v \star X$ si chiama *cono di base X e vertice v.*

La condizione che un punto v sia congiungibile con X è semplicemente che, $v \notin X$ e che v non sia allineato con nessuna coppia di punti di X.

Il join di spazi congiungibili gode di buone proprietà in quanto è una costruzione funtoriale. Infatti, se $f\colon X_1 \to X_2$ e $g\colon Y_1 \to Y_2$ sono continue, il *join* $f \star g : X_1Y_1 \to X_2Y_2$ è l'applicazione

$$(f \star g)((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tg(x) \tag{1.6}$$

$x \in X_1, y \in Y_1; t \in [0,1]$.

Nella definizione gli spazi X_1, Y_1 e X_2, Y_2 vengono tacitamente supposti congiungibili. È chiaro allora che il join è un funtore dalla categoria delle coppie di sottospazi congiungibili di R^m e coppie di funzioni continue alla categoria dei sottospazi di R^m e funzioni continue. In particolare $X \star Y$ è un invariante topologico della coppia (X, Y) se X, Y sono congiungibili. Questo suggerisce di definire un *join astratto* di sottospazi $X \subset R^m, Y \subset R^m$, ponendo

$$X \star Y := X' \star Y' \tag{1.7}$$

dove X', Y' sono copie di X, Y risp. con X', Y' congiungibili. Tali sostituti certamente esistono e non sono unici. Tuttavia se X'', Y'' è una seconda scelta, si ha, per la funtorialità del join, $X' \star Y' \approx X'' \star Y''$, pertanto il tipo di omeomorfismo di $X \star Y$ è ben definito e dipende solo dal tipo di omeomorfismo della coppia (X, Y).

Esercizio Definire il join di due spazi topologici qualunque.

1.8 PROPOSIZIONE. *L'operazione di join, tra spazi congiungibili o non, è associativa, commutativa e*

$$X_0 \star X_1 \star \ldots \star X_n \equiv \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i | x_i \in X_i,\ \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1\}\ .$$

Esempio. Un simplesso è il join dei suoi vertici.

1.9 PROPOSIZIONE. *Due simplessi A e B di R^m sono congiungibili se e solo se i loro vertici sono indipendenti. In tal caso $A \star B$ è un simplesso di dimensione* $\dim A + \dim B + 1$.

Siano K, L due complessi simpliciali.

1.10 PROPOSIZIONE. *$|K|,\ |L|$ sono congiungibili se e solo se ciascuna coppia di simplessi $A \in K,\ B \in L$ è congiungibile e l'insieme di simplessi $A * B,\ A \in K,\ B \in L$ è un complesso simpliciale, che indicheremo con $K * L$.*

DIM. Dalla osservazione si ha che se $|K|,\ |L|$ sono congiungibili ogni coppia di simplessi $A \in K,\ B \in L$ è congiungibile, inoltre dati $A_1, A_2 \in K,\ B_1, B_2 \in L$ si ha $(A_1 * B_1) \cap (A_2 * B_2) = (A_1 \cap A_2) * (B_1 \cap B_2)$ e quindi la condizione di essere un complesso simpliciale è verificata.

Viceversa supponiamo che valga il viceversa e prendiamo due segmenti $[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ a_1, a_2 \in |K|,\ b_1, b_2 \in |L|$.

Siano $A_1, A_2,\ B_1, B_2$ minimi simplessi in K, L rispettivamente contenenti i punti dorrispondenti cosıche $[a_1, b_1] \subset A_1 * B_1,\ [a_2, b_2] \subset A_2 * B_2$. Per ipotesi $A_1 * B_1,\ \cap A_2 * B_2 = A * B$ con A faccia di A_1, A_2 e B faccia di B_1, B_2 quindi $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \subset A * B$ da questo una semplice analisi dei casi possibili implica la congiungibilità di $|K|, |L|$. □

Si osservi ora che, dal punto di vista combinatorio, lo scheletro di $K * L$ si deduce in modo puramente combinatorio dai due scheletri secondo la seguente costruzione-osservazione: Dati due complessi simpliciali combinatori $\mathcal{C}_1 := (\mathcal{V}_1, \mathcal{S}_1),\ \mathcal{C}_2 := (\mathcal{V}_2, \mathcal{S}_2)$ il loro *join combinatorio* $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ è definito ponendo come suoi vertici l'unione disgiunta $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ e come simplessi tutti i sottoinsiemi $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B,\ A \in \mathcal{S}_1, B \in \mathcal{S}_2$.

Più concretamente dato un complesso simpliciale combinatorio $\mathcal{C}$ e due suoi sottocomplessi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ diremo che tali complessi sono combinatoriamente congiungibili in $\mathcal{C}$ se dati comunque simplessi $A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2$ si ha che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B \in \mathcal{C}$ è un simplesso nell'ambiente in tal caso troviamo ovviamnete in $\mathcal{C}$ il join combinatorio dei due complessi.

La costruzione di join è funtoriale anche nella categoria simpliciale in fatti si verifica facilmente che il join di applicazioni simpliciali è un'applicazione simpliciale.

2 Links e stelle simpliciali, alcune formule combinatorie

Sia $K = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ un complesso simpliciale.

2.1 Definizione. *Se $A \in \mathcal{S}$ è un simplesso di K, definiamo il link simpliciale di A in K come*

$$L(A,K) = \{B \in \mathcal{S} | A \cap B = \emptyset, \;\; A \star B \in \mathcal{S}\}$$

Ovviamente si intende A congiungibile con B. Allora A e $L(A,K)$ sono congiungibilii e

$$St(A,K) := A \star L(A,K) = \{B \in \mathcal{S} | A \cup B \in \mathcal{S}\}$$

si dice stella simpliciale di A in K. È chiaro che link e stella sono sottocomplessi di K.

Da un punto di vista combinatorio se pensiamo agli scheletri il link di A è l'insieme dei simplessi B disgiunti da A e tali che $A \cup B$ è un simplesso.

2.2 Proposizione.

(1) *Se $B \in L(A,K)$*

$$L(B, L(A,K)) = L(A * B, K) \tag{C1}$$

(2) *Se $A \in K, B \in L$ e KL esiste:*

$$L(A * B, K * L) = L(A,K) \star L(B,L) \tag{C2}$$

(3) *Sia $B \prec A \in K$ con $\dim A = \dim B + 1$. Allora:*

$$L(A,K)) = L(B\dot{A} * L(A,K)) \tag{C3}$$

dove $\dot{A}$ è il sottocomplesso delle facce proprie di A.

dim. Ragioniamo sempre in termini combinatori ossia di scheletri.

1) Per ipotesi $A \cap B = \emptyset, \;\; A \cup B \in \mathcal{S}$. Si ha che $C \in L(B, L(A,K))$ se e solo se $B \cap C = \emptyset, \;\; B \cup C \in L(A,K)$ ovvero $A \cap (B \cup C) = \emptyset, \;\; A \cup B \cup C \in \mathcal{S}$ ossia i tre insiemi A, B, C sono disgiunti e $A \cup B \cup C \in \mathcal{S}$ che vuol dire $C \in L(A * B, K)$.

2) $C * D = C \cup D$ è in $L(A * B, K * L)$ se e solo se $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \emptyset$ e $(A \cup B) \cup (C \cup D) = (A \cup C) \cup (B \cup D)$ è un simplesso di $K * L$ ovvero $C \in L(A,K), \;\; D \in L(B,L)$.

3) Sia $C \in L(A,K)$ ovvero $A \cap C = \emptyset, \;\; A \cup C \in \mathcal{S}$. Per ipotesi B è una faccia di A e quindi certamente $C \in L(B, \dot{A} * L(A,K))$. Viceversa se $M \cup N, \;\; M \in \dot{A}, \;\; N \in L(A,K))$ è nel link di B in $\dot{A} * L(A,K)$ si ha che in particolare $M \cap B = \emptyset$ ed essendo M una faccia di A si ha, o che $M = \emptyset$ oppure che $A = B \cup M$, ma allora $B \cup (M \cup N) = A \cup N \notin \dot{A} * L(A,K)$. $\square$

3 Convessità

La nozione di insieme convesso si può dare in vari livelli di generalità ed a noi servirà la più elementare. Ricordiamo dunque che:
Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se, dati comunque due punti $P, Q \in X$ l'intero segmento $[P, Q]$ è contenuto in X.

È immediato verificare che:

(1) Qualunque intersezione di insiemi convessi è ancora convesso e quindi, dato comunque un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$, esiste un minimo insieme convesso $\tilde{C}$ che lo contiene e che viene detto *inviluppo convesso* di C.
(2) La chiusura di un insieme convesso è convesso.
(3) Poiché ogni sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ è convesso l'inviluppo convesso di C è contenuto nel sottospazio affine $< C >$ generato da C.
(4) È anche evidente che la nozione di convessità è invariante per trasformazioni affini.

Si osservi che, se $P_0, \dots, P_n$ sono punti di $\mathbb{R}^m$, il loro join

$$J(P_0, \dots, P_n) := P_0 \star \cdots \star P_n$$

coincide con l' inviluppo convesso di $P_0, \dots, P_n$.

Sia H un iperpiano di $\mathbb{R}^n$. H divide lo spazio in due semispazi aperti disgiunti con frontiera H, componenti connesse di $\mathbb{R}^n - H$.

3.1 Definizione. *Dati due insiemi A, B diremo che H separa A da B se A è contenuto in una delle due componenti connesse di $\mathbb{R}^n - H$ e B è contenuto nell'altra.*

Diremo che un insieme A si trova da una sola parte rispetto ad H se l'intersezione di A con una delle due componenti connesse di $\mathbb{R}^n - H$ è vuota.

Elenchiamo le varie caratterizzazioni delle celle, che proveremo in II-1 e che utilizzeremo.

3.2 Teorema. *Per un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ convesso e compatto le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(1) *C è definito da un numero finito di diseguaglianze lineari.*
(2) *C è una unione finita di simplessi.*
(3) *C è l'inviluppo convesso di un numero finito di punti.*
(4) *C è immagine tramite una applicazione lineare di un simplesso.*

Un insieme che soddisfi le precedenti proprietà è detto una cella.

Osservazione Se abbiamo le disequazioni $f \geq 0$, $-f \geq 0$ le sostituiamo con l'equazione $f = 0$.

Se P è il minimo sottospazio affine contenente la cella C l'interno C° di C in P (ovvero il massimo aperto di P contenuto in C) è denso in C.

La *dimensione* di C è la dimensione dello spazio affine $\langle C \rangle$. Questa è chiaramente la dimensione topologica di C secondo il Cap. 1.

Esempi di celle $n-$dimensionali (o $n-$celle) sono un n-simplesso, ed il cubo I^n.

Esempi. (a) Il simplesso standard $\Delta^n \subset R^{n+1}$ è una n-cella, di cui una presentazione è

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1 \quad x_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$$

(b) Un n-simplesso è una n-cella. Segue da (a) e da 2) della precedente proposizione.

(c) Il prodotto di una cella C di $\mathbb{R}^m$ e di una cella D di $\mathbb{R}^n$ è una cella di $\mathbb{R}^{m+n}$. Infatti, se

$$\{f_i(x) = 0, g_j(x) \geq 0\} \quad \{f'_{i'}(y) = 0, g'_{j'} \geq 0\}$$

sono presentazioni di C e D rispettivamente,

$$\{f_i(x) = 0, f'_{i'}(y) = 0, g_j(x) \geq 0, g'_{j'}(y) \geq 0\}$$

è una presentazione di $C \times D$ in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con coordinate (x, y).

(d) In particolare, il cubo I^n è una n-cella.

(e) L'intersezione di due celle è una cella.

(f) L'intersezione di una cella con un sottospazio lineare o con un semispazio lineare dello spazio ambiente è ancora una cella.

Come nel caso dei simplessi è essenziale considerare le *facce* di una cella.

LEMMA (II-1). *Sia C una n-cella in $\mathbb{R}^m$, esiste un'unica decomposizione $\partial C = F_1 \cup \cdots \cup F_p$ tale che:*

(a) *F_j sia una $n-1$-cella*

(b) *F_j sia intersezione di ∂C con un iperpiano di $\langle C \rangle$.*

Le $n-1$-celle $F_1, \ldots, F_p$ si dicono $n-1$-facce di C. Una $n-2$-faccia è, per definizione, una $n-2$-faccia di qualche F_j e cosí via, induttivamente.

Si vede facilmente che gli interni F_j° sono disgiunti.

Le facce zero-dimensionali si dicono *vertici* di C. L'insieme vuoto e C si considerano anch'esse come facce di dimensione -1 ed n rispettivamente. Esse sono le *facce improprie*, le altre si chiamano *facce proprie*. La notazione $D \preceq C$ indica che D è una faccia di C, propria o impropria, di qualsiasi dimensione, mentre $D \prec C$ indica che D è una faccia propria di C oppure $D = \emptyset$.

3.3 TEOREMA. *Sia C una cella presentata mediante un sistema di equazioni e disequazioni lineari:*

$$\begin{array}{lll} (1) & f_i(x) = 0 & i = 1, \ldots, s \\ (2) & g_j(x) \geq 0 & j = i, \ldots, l \end{array}$$

Imponendo il segno di eguaglianza in alcune delle g_j, comunque scelte, si ottiene una faccia di C e viceversa ogni faccia è descritta in un tale modo.

Lavorando con presentazioni è in generale molto più comodo riconoscere le facce di una cella. Ad esempio la dimostrazione della seguente proposizione costituisce un facile esercizio.

3.4 Proposizione. *(a) Se A e B sono celle, le facce di $A \times B$ sono le celle $A' \times B'$, con $A' \preceq A, B' \preceq B$.*

(b) *Se A, B sono celle di $\mathbb{R}^m$, le facce di $A \cap B$ sono le celle $A' \cap B'$, con $A' \preceq A, B' \preceq B$.*

♣

Ci servirà spesso di capire la posizione di un simplesso relativamente ad un insieme convesso.

Ricordiamo che se $\Delta := \sum t_i P_i,\ 0 \le t_i,\ \sum t_i = 1$ è un simplesso di vertici P_i (punti indipendenti), il suo interno $\Delta^\circ := \sum t_i P_i,\ 0 < t_i,\ \sum t_i = 1$, è anche l'interno di Δ pensato come chiuso nello spazio affine che esso genera.

In generale, sia C un convesso, per definizione il suo interno C° è l'interno di C nello spazio affine $< C >$.

3.5 Lemma. *1) Se un simplesso Δ è contenuto in un convesso C ed un punto P di Δ è contenuto nell'interno di C, allora tutto Δ° è contenuto nell'interno di C.*

2) Se C è un convesso, $a \in C^\circ$, $R = a + tv,\ t \in [0, \infty)$ una semiretta uscente da a contenuta nello spazio affine $< C >$ generato da C allora R interseca ∂C in un unico punto.

Dim. 1) Sia Q un qualunque punto interno di Δ allora esiste un punto $Q' \in \Delta$ tale che Q è interno al segmento $[P, Q']$. In un intorno aperto di P tutto contenuto in C possiamo completare Q' ad un riferimento affine di $< C >$, per cui il simplesso generato da questi punti contiene Q nel suo interno ed è contenuto in C.

2) $R \cap C^\circ$ è un aperto convesso limitato di R, pertanto esso consiste di tutti i punti della forma $a + tv$, dove t varia in un intervallo semiaperto $[0, \tau)$ dell'asse reale. Allora $R \cap \partial C$ chiaramente contiene $x = a + \tau v$. Dalla prima parte del lemma se un punto interno al segmento $[a, x]$ è interno a C allora tutto il segmento aperto (a, x) é interno, altrimenti tutto (a, x) è nella frontiera. Questo non è possibile perché allora anche a è di frontiera contro la ipotesi.

♣

Corollario. *Sia C una cella, C° il suo interno e $\dot{C}$ la sua frontiera. Dato $a \in C^\circ$, a è congiungibile con $\dot{C}$, il join $a\dot{C}$ è un cono e coincide con C.*

Dim. Per convessità $a\dot{C} \subset C$, viceversa sia $b \in C$ con $b \neq a$ e consideriamo la semiretta R_b di origine a, passante per b. Per il lemma precedente $R_b \cap \dot{C}$ è costituito da un solo punto x, cosicché $b \in [a, x] \subset a\dot{C}$, dunque $C \subset a\dot{C}$.

Rimane da far vedere che $a\dot{C}$ è un cono, cioè che a e $\dot{C}$ sono congiungibili ovvero, se x, y sono due punti di $\dot{C}$, con $x \neq y$, allora $[a, x] \cap [a, y] = a$.

Ciò è senz'altro vero, poiché altrimenti uno dei due segmenti sarebbe contenuto nell'altro ed esisterebbe pertanto una semiretta di origine a intersecante $\dot{C}$ in due punti distinti x, y.

♣

Più avanti ci servirà la seguente generalizzazione del risultato appena stabilito. Sia v un vertice di C e sia:

$$L(v, C) := \cup\{F | F \prec C, v \notin F\} .$$

Figura 1

3.6 PROPOSIZIONE. *C è il cono $vL(v, C)$.*

DIM. Per la convessità di C si ha $vL(v, C) \subset C$. Dimostriamo l'inclusione inversa, procedendo per induzione sulla dimensione di C.

Sia $a \in C^\circ$, la semiretta $v + ta$ incontra $\dot{C}$ in un ulteriore punto x e affermo che $x \in L(v, C)$.

In caso contrario esiste $F \prec C$ tale che $v \in F$, e $x \in F$. Allora $[v, x] \subset F$ e pertanto non può contenere il punto interno a. Dunque ogni punto interno si trova sul cono richiesto.

Se a sta in $\dot{C}$ e $a \neq v$, esiste $F \prec C$, tale che $a \in F$. Per l'ipotesi induttiva, a si troverà sul cono $vL(v, F)$. Ma dalla definizione è chiaro che $L(v, F) \subset L(v, C)$, pertanto $a \in vL(v, C)$. La congiungibilità si prova come nella proposizione precedente.

♣

4 La categoria PL

NOTA Definiamo la categoria dei poliedri e delle applicazioni lineari a tratti e ne studiamo alcune proprietà fondamentali

4.1 DEFINIZIONE. *Un* **poliedro compatto** *P di $\mathbb{R}^m$ è una qualsiasi unione finita di celle 'o' equivalentemente, di simplessi di $\mathbb{R}^m$. Nel seguito ometteremo la specifica compatto.*

Una funzione $f\colon P_1 \to P_2$ tra due poliedri in $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ rispettivamente si dice PL *(= piecewise linear) se il suo grafico*

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+n} : x \in P_1\}$$

è un poliedro.

Osservazione Una funzione PL è necessariamente continua.

In generale non ci si può restringere alla sola considerazione dei poliedri compatti ma è necessario considerare **poliedro** P di $\mathbb{R}^m$ una qualsiasi unione localmente finita di celle 'o' equivalentemente, di simplessi di $\mathbb{R}^m$.

Localmente finito vuol dire che, ogni punto di $\mathbb{R}^m$ ha un intorno che interseca solo un numero finito delle celle date.

Lasciamo al lettore di verificare in questo caso più generale la validità degli enunciati che proveremo per i poliedri compatti.

Dai risultati stabiliti per le celle ricaviamo subito i seguenti esempi e proprietà:

4.2 Teorema.

(a) L'intersezione, l'unione e il prodotto di un numero finito di poliedri è un poliedro.
(b) L'immagine lineare di un poliedro è un poliedro.
(c) Un cono su un poliedro è un poliedro.
(d) L'intersezione di un poliedro con uno spazio lineare è un poliedro.
(e) Un poliedro convesso è una cella e viceversa.
(f) Il sostegno di un complesso simpliciale è un poliedro.
(g) Il join di due poliedri congiungibili è un poliedro.

4.3 Esercizio Provare che un aperto in un poliedro è un poliedro localmente finito.

Esempi.

(1) Un'applicazione simpliciale è PL.
(2) L'identità è una funzione PL.
(3) Se f è un omeomorfismo PL, anche f^{-1} è PL.
(4) *Estensioni coniche.* Siano aP, bQ due coni sui poliedri P e Q ed $f\colon P \to Q$ un'applicazione PL. Definiamo *cono su* f l'applicazione $F\colon aP \to bQ$ data da $F(\lambda a + \mu x) = \lambda b + \mu f(x)$ dove $\lambda + \mu = 1$ e $\lambda, \mu \geq 0$. Allora F è un'applicazione PL, poiché $\Gamma(F) \equiv (a, b)\Gamma(f)$. Inoltre, se f è un PL omeomorfismo anche la sua estensione conica F è tale.
(5) Più in generale, il join di due applicazioni PL è un'applicazione PL.
(6) (Località) Se $f : X \to Y$ è una funzione fra due poliedri e $X = \cup_{i=1}^n X_i$ con X_i poliedri allora f è PL se e solo se $f|_{X_i} : X_i \to Y$ è PL per ogni i.

Notazione. Se $f\colon |K| \to |L|$ è un'applicazione continua, simpliciale rispetto a K e L, abbrevieremo dicendo che $f\colon K \to L$ è un'applicazione simpliciale.

4.4 Proposizione. *1) La composizione di funzioni PL è una funzione PL.*

2) Se $f\colon |K| \to |L|$ è un'applicazione PL, l'immagine $f(|K|)$ è un sottopoliedro di $|L|$ e se $|S| \subset |L|$ è un sottopoliedro, $f^{-1}(|S|)$ è un sottopoliedro di $|K|$.

Dim. 1) Siano $P_1 \subset \mathbb{R}^m$, $P_2 \subset \mathbb{R}^n$, $P_3 \subset \mathbb{R}^p$ tre poliedri ed $f\colon P_1 \to P_2$, $g\colon P_2 \to P_3$ due applicazioni PL di grafici $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $\Gamma(g) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Il grafico della composizione di f e g si può ottenere nel modo seguente. Si forma il poliedro

$$\Gamma(f) \times \Gamma(g) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

e lo si interseca con il sottospazio dei punti $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, tali che $y = z$. Finalmente si proietta su $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. Tutte queste operazioni conservano il carattere di poliedro in virtù delle proprietà (a), (b), (d).

La dimostrazione di 2) è simile e la omettiamo.

♣

4.5 Definizione. *Dicesi categoria PL la categoria che ha come oggetti i poliedri e come morfismi le funzioni PL.*

Corollario. *Il join di poliedri congiungibili è un invariante PL (non solo topologico) e il join astratto di poliedri è ben definito nella categoria PL.*

Dim. Tutto deriva dal fatto che il join si restringe a un funtore dalla categoria delle coppie di poliedri congiungibili (in qualche $\mathbb{R}^m$) e coppie di funzioni PL alla categoria PL. ♣

Naturalmente, come in ogni categoria, abbiamo la nozione di isomorfismo, per i poliedri (ossia per gli oggetti della categoria PL) l'isomorfismo viene anche detto PL-omeomorfismo ed indicheremo con $X \approx_{PL} Y$ la relazione di isomorfismo PL.

Può essere conveniente pensare in modo più intrinseco.

4.6 Definizione. *Uno spazio topologico X ha una struttura di poliedro se è dato un omeomorfismo di X con un poliedro P, due strutture di poliedro sono PL equivalenti se ottenute una dall'altra tramite un isomorfismo PL di poliedri.*

In effetti noi ci siamo limitati per ora a poliedri compatti, una classe abbastanza generale di spazi su cui fare topologia PL e per cui molti teoremi si estendono semplicemente dal caso compatto è la classe di spazi omeomorfi al complementare di un poliedro K in un altro poliedro P.

5 Triangolazioni di Poliedri

5.1 Definizione. *1) Un complesso di celle K è un insieme finito di celle di qualche $\mathbb{R}^m$, tale che*

(a) se $A \in K$, ogni faccia di A è in K;

(b) se $A, B \in K$, allora $A \cap B$ è una faccia comune ad A e B (possibilmente vuota).

L'unione in $\mathbb{R}^m$ delle celle di K si dice poliedro sostegno di K e si indica con $|K|$.

2) Un sottoinsieme L di K è un sottocomplesso, e si scrive $L \subset K$, se L è esso stesso un complesso di celle.

3) Se K', K sono complessi di celle, si dice che K' è una suddivisione di K, scritto $K' \lhd K$, se
(1) $|K'| = |K|$, (2) ogni cella di K è unione di celle di K'.

La condizione di finitezza non è strettamente necessaria la si può indebolire supponendo che K è solo *localmente finito* ossia, per ogni punto $p \in \mathbb{R}^m$ vi è un intorno con intersezione non vuota con un numero finito di celle di K.

Con questa definizione abbiamo un *esempio fondamentale.*

Prendiamo in $\mathbb{R}^m$ i cubi a coordinate intere. Preso un vettore a coordinate intere $(a_1, \dots, a_m)$ definiamo

(5.3)
$$\begin{aligned} C_{(a_1,\dots,a_m)} &:= (a_1, \dots, a_m) + I^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m | a_i \le x_i \le a_i + 1\} \\ &= [a_1, a_1 + 1] \times [a_2, j_a + 1] \times \cdots \times [a_m, a_m + 1] \end{aligned}$$

Questi cubi e le loro facce formano una decomposizione in celle di $\mathbb{R}^m$ detta **reticolazione cubica a coordinate intere di $\mathbb{R}^m$.**

Esempi. (1) L'insieme di tutte le facce di una cella C è un complesso di celle, denotato ancora con C.

(2) L'insieme di tutte le facce proprie di una cella C è un sotto complesso di C, denotato con ∂C o $\dot{C}$

(3) Un cono $a|K|$ su un complesso di celle è a sua volta un complesso di celle con elementi $\{a, aB, B : B \in K\}$.

(4) Lo *r-scheletro* di K è il sottocomplesso $K^r := \{C : C \in K,\ \dim C \le r\}$.

(5) Se K è un complesso di celle in $\mathbb{R}^m$ ed $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è un isomorfismo lineare, allora l'*immagine*
$$f(K) := \{f(C) : C \in K\}$$
è ancora un complesso di celle.

(6) Se K, L sono complessi di celle in $\mathbb{R}^m$, la loro *intersezione*
$$K \cap L := \{A \cap B : A \in K, B \in L\}$$
è un complesso di celle. Se $|K| = |L|$ allora $K \cap L$ è una suddivisione di entrambi K ed L.

Infatti, siano $A \cap B$ e $C \cap D$ due celle di $K \cap L$ e sia $F = (A \cap B) \cap (C \cap D) = (A \cap C) \cap (B \cap D)$. Poiché K ed L sono complessi di celle, si ha $A \cap C \preceq A$ e $B \cap D \preceq B$, pertanto $F \prec A \cap B$. Analogamente si vede che $F \prec C \cap D$.

(7) Se K ed L sono complessi di celle il *prodotto*

$$K \times L := \{A \times B : A \in K,\ B \in L\} \tag{5.4}$$

è un complesso di celle.

Infatti, siano $A \times B$ e $C \times D$ due celle di $K \times L$ ed $F = (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$. Ma $A \cap C \prec A$ e $B \cap D \prec B$, quindi $F \prec A \times B$. Analogamente $F \prec C \times D$.

(8) Un complesso simpliciale è un complesso di celle.

Corollario. *Dati comunque k complessi di celle K_i localmente finiti, che decompongono lo spazio $\mathbb{R}^m$ la loro intersezione è una suddivisione in celle simultanea di tutti i complessi dati.*

6 Complesso derivato.

Sia K un complesso di celle. Per ogni $A \in K$, scegliamo un punto $a \in Int\ A$. Definiamo una suddivisione $K' \lhd K$, induttivamente sugli scheletri di K in ordine di dimensione crescente, mediante la formula

$$A' := a \star (\dot{A})', \qquad A \in K \tag{6.1}$$

Si vede immediatamente, per induzione utilizzando il corollario 1.7, che K' **è un complesso simpliciale**, detto *un (primo) derivato* di K. I punti interni scelti si dicono *centri di derivazione.* Evidentemente si può ripetere la operazione di derivato ottenendo un secondo, etc. derivato.

Osservazione Vi è una possibile scelta canonica dei punti $a \in Int\ A$, basta prendere i baricentri delle celle, in questo caso la suddivisione si dice *baricentrica* altrimenti *pseudo-baricentrica,* in ogni caso i complessi simpliciali che si ottengono con queste decomposizioni sono combinatorialmente equivalenti.

6.2 Proposizione. *Ogni complesso di celle ammette una suddivisione simpliciale e due complessi di celle aventi il medesimo sostegno ammettono una suddivisione simpliciale comune.*

Dim. Se K, L sono i due complessi di celle, si prenda un primo derivato di $K \cap L$.

♣

La costruzione del derivato si può fare anche se il complesso è soltanto localmente finito, in particolare si può applicare ad una decomposizione dello spazio $\mathbb{R}^m$ in celle ad esempio alla reticolazione cubica a coordinate intere di $\mathbb{R}^m$ e si ottiene una *triangolazione localmente finita dello spazio* $\mathbb{R}^m$.

Figura 2

complesso di quadrati con derivato

6.3 LEMMA. *Dati r simplessi* $A_1, \ldots, A_r$ *di* $\mathbb{R}^m$ *esiste una triangolazione dello spazio* $\mathbb{R}^m$ *in cui tutti gli* A_i *sono sottocomplessi.*

DIM. Prendiamo una qualunque triangolazione K dello spazio (ad esempio la suddivisione del reticolato cubico intero). Per ogni i scegliamo una trasformazione affine f_i dello spazio che porta A_i in un simplesso di K. Costruiamo dunque le $r-$triangolazioni $f_i^{-1}(K)$ ciascuna delle quali contiene uno degli A_i come simplesso.

L'intersezione di queste triangolazioni è un complesso di celle, la cui suddivisione baricentrica soddisfa alle condizioni del Lemma. $\square$

6.4 TEOREMA. *Siano* $A_1, \ldots, A_r$ *simplessi di* $\mathbb{R}^n$ *e* K *un complesso simpliciale tale che* $A_1 \cup \cdots \cup A_r \subset |K| \subset \mathbb{R}^n$. *Allora esistono suddivisioni* $K' \triangleleft K$, $A_i' \triangleleft A_i$, *con* $A_i' \subset K'$, *per ogni* $i = 1, \ldots, r$.

DIM. Basta applicare il Lemma precedente agli A_i ed a tutti i simplessi di K.

$\clubsuit$

COROLLARIO. *i) Se* K, L *sono complessi simpliciali con* $|L| \subset |K| \subset \mathbb{R}^n$ *esistono suddivisioni* $K' \triangleleft K$ *e* $L' \triangleleft L$ *con* $L' \subset K'$.

ii) Ogni poliedro è sostegno di un complesso simpliciale.

DIM. i) Si applichi il teorema precedente prendendo come $\{A_1, \ldots, A_r\}$ l'insieme dei simplessi di L. $\clubsuit$

ii) Se $P = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ è un poliedro di $\mathbb{R}^n$ e gli A_i sono simplessi, si applichi il teorema prendendo come K un qualsiasi n-simplesso $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ tale che $P \subset \Delta$.

$\clubsuit$

È importante capire che la suddivisione pseudobaricentrica è un caso speciale di una procedura più generale detta *starring*. Sia dunque J un complesso di celle ed $a \in |J|$ un punto. Il complesso di celle $a * J$ è cosi definito. Si prendono come sue celle:

1) Tutte le celle di J che non contengono a.

2) il punto a stesso

3) tutte le celle $G * a$ dove, G è una cella di J che non contiene a ed esiste una celle C di J con $a \in C,\ G \subset C$.

Il fatto che $a * J$ sia un complesso di celle che suddivide J segue dalla formula $C = a * C'$ dove C è una cella contente a e C' è l'unione di tutte le celle $G \in J$ con $a \notin G,\ G \subset C$.

Esercizio Provare che una suddivisone pseudobaricentrica si può costruire con una successione di operazioni di *starring*, in ordine decrescente di dimensione delle celle di cui si prendono i centri.

Più in generale si consideri un complesso di celle J ed un sottocomplesso J', scelto un punto interno ad ogni cella di $J - J'$ si può procedere alla suddivisione corrispondente.

Equivalenza combinatoria di complessi di celle

Due complessi di celle K, L si dicono *combinatoriamente equivalenti* se esiste una corrispondenza biunivoca $\alpha\colon K \to L$, tale che, se $A \prec B \in K$, allora $\alpha(A) \prec \alpha(B)$ (**figura**)

6.5 Proposizione. *Se α è un'equivalenza combinatoria tra K ed L, esiste un PL isomorfismo $f\colon |K| \to |L|$, tale che $f(A) = \alpha(A)$, per ogni $A \in K$.*

Dim. Numeriamo le facce A_i di K e B_i di L con $\alpha(A_i) = B_i$. Si considerino derivati K', L', con centri $\{a_i \in A_i\}$, $\{b_i \in B_i\}$ rispettivamente e sia $f\colon K' \to L'$ l'isomorfismo simpliciale determinato da $f(a_i) = b_i$. □

Il punto di questa proposizione è il seguente. Ad un complesso di celle si associa il poset i cui elementi sono le celle stesse e l'ordinamento è quello delle facce. L'equivalenza combinatoria è semplicemente l'isomorfismo di posets.

Ora sappiamo che ad ogni poset è associato un complesso simpliciale, il suo nervo.C on la suddivisione di un complesso di celle abbiamo definito un isomorfismo PL fra il supporto del complesso di celle e quello del nervo del poset associato.

Osservazione Non ogni poset è associato ad un complesso di celle, ad esempio l'intervallo $[0, 1, \ldots, n]$ ordinato naturalmente non è associato ad un complesso di celle per $n \geq 1$. Il suo nervo rappresenta il simplesso standard $n-$dimensionale.

Triangolazioni di funzioni PL

Passiamo ora a triangolare le funzioni PL tra poliedri. Abbiamo già visto che un derivato dà una triangolazione di un complesso di celle o, più precisamente, del suo poliedro sostegno. Abbiamo però bisogno di un altro modo importante di triangolare i complessi di celle.

6.6 PROPOSIZIONE. *Un complesso di celle K ammette una suddivisione simpliciale K' che non contiene ulteriori vertici.*

DIM. Ordiniamo (arbitrariamente) i vertici di K. Definiamo K' cella per cella in ordine crescente di dimensione, cominciando banalmente con la dimensione zero.

Se $C \in K$ e v è il primo vertice di C nel dato ordinamento, abbiamo visto che $C = v \star L(v, C)$. per induzione $L = L(v, C)$ ammette una suddivisione L' priva di ulteriori vertici. Definiamo $C' \triangleleft C$, ponendo

$$C' = v \star L'$$

La costruzione è coerente, perché, se $v \in D \prec C$, allora v è il primo vertice anche per D e quindi D' è un sottocomplesso di C' (**figura**).

♣ **Osservazione** Si provi che la suddivisione precedente è ottenuta con il procedimento di *starring* applicato successivamente ai vertici in ordine decrescente.

6.7 LEMMA. *Siano K, L complessi di celle in $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ rispettivamente e $p\colon |K| \to |L|$ la restrizione di un'applicazione lineare da $:\mathbb{R}^m$ ad $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$M := \{A \cap p^{-1}(B) : A \in K, B \in L\}$$

è un complesso di celle che suddivide K.

DIM. Se

$$B =< B > \cap H_1 \cap \cdots \cap H_q$$

e

$$A =< A > \cap H'_1 \cap \cdots \cap H'_p$$

allora

$$A \cap p^{-1}(B) =< A > \cap \pi^{-1} < B > \cap H'_1 \cap \cdots \cap H'_p \cap \pi^{-1} H_1 \cap \cdots \cap \pi^{-1} H_q \tag{6.8}$$

è una cella. Inoltre, dalla presentazione (1) si deduce che le facce di $A \cap p^{-1}(B)$ sono le celle

$$\{A' \cap p^{-1}(B') : A' \preceq A, B' \preceq B\}.$$

Per provare che M è un complesso di celle osserviamo che

$$(A \cap p^{-1}(B)) \cap (C \cap p^{-1}(D)) = (A \cap C) \cap p^{-1}(B \cap D)$$

è una faccia comune di $A \cap p^{-1}(B)$ e di $C \cap p^{-1}(D)$. Chiaramente $M \triangleleft K$.

♣

6.9 Proposizione. *Siano K, L, p, come nel lemma precedente, allora esistono suddivisioni $K' \lhd K$ ed $L' \lhd L$ tali che $p: K' \to L'$ sia simpliciale.*

Dim. Se $A \in K$, allora $p(A)$ è una cella. Pertanto esiste una suddivisione $L' \lhd L$, per cui $p(A)$, per ogni $A \in K$, è il sostegno di un sottocomplesso di L'. Consideriamo

$$M' = \{A \cap p^{-1}(B) : A \in K, B \in L'\}$$

Per il lemma precedente M' è un complesso di celle ed $M' \lhd K$.

L'immagine di una cella , $p(A \cap p^{-1}(B)) = p(A) \cap B$ è per costruzione un simplesso della decomposizione L'. In particolare se una cella $A \cap p^{-1}(B)$ di M' è un vertice v di K', $f(v)$ è un vertice di L'.

La funzione p è lineare, quindi lineare su ogni cella di M', e manda vertici in vertici e celle in simplessi. Se, infine, $K' \lhd M'$ è una suddivisione simpliciale senza ulteriori vertici, allora K', L' sono le suddivisioni cercate.

♣

Possiamo finalmente provare il teorema di triangolazione per le funzioni PL:

6.10 Teorema. *Sia $f: |K| \to |L|$ un'applicazione PL, dove K, L sono complessi simpliciali. Esistono suddivisioni $K' \lhd K$ ed $L' \lhd L$ tali che $f: K' \to L'$ sia simpliciale.*

Dim. Supponiamo $|K| \subset \mathbb{R}^m$, $|L| \subset \mathbb{R}^n$, cosicché il grafico $\Gamma(f)$ è un poliedro in $\mathbb{R}^{m+n}$. Sia K_Γ una suddivisione simpliciale del poliedro $\Gamma(f)$.

Applichiamo la precedente proposizione alla proiezione $\pi_1: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, che è un isomorfismo PL fra $\Gamma(f)$ e $|K|$, ottenendo suddivisioni $\tilde{K}$, $\tilde{K}_\Gamma$ di K, K_Γ per cui π_1 è simpliciale. Poiché $\pi_1: |\tilde{K}_\Gamma| \to |\tilde{K}|$ è una biiezione, π_1 è un isomorfismo simpliciale. Ora applichiamo la medesima proposizione a $\pi_2: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ottenendo suddivisioni L', K'_Γ di L, $\tilde{K}_\Gamma$ rispettivamente per cui π_2 è simpliciale.

Poiché $\pi_1: |\tilde{K}_\Gamma| \to |\tilde{K}|$ è un isomorfismo simpliciale la suddivisione K'_Γ induce una suddivisone K' ad essa isomorfa.

Se $g: |K'| \to |K'_\Gamma|$ denota l'isomorfismo inverso (anche esso simpliciale), $f = \pi_2 \circ g: K' \to L'$ è simpliciale, il che conclude la dimostrazione.

♣

7 Links

NOTA La nozione di *link* corrisponde allo studio locale di un poliedro in un punto, dove in piccolo il poliedro appare come un cono con vertice il punto dato, su un poliedro (di dimensione minore) detto appunto link.

La nozione di **link** è una di quelle fondamentali per lo studio locale dei poliedri e ne rappresenta in sostanza la natura della singolarità in un punto.

Abbiamo già visto la nozione di link in un complesso simpliciale, nel caso combinatorio il link di un vertice v è formato da tutti i simplessi A che non contengono v e che, insieme con v formano un simplesso.

Sia ora P un poliedro immerso in $\mathbb{R}^n$ ed a un suo punto. Vediamo prima di tutto il link di a in P, da un punto di vista topologico, consideriamo per questo la sfera unitaria S^{n-1} in $\mathbb{R}^n$, e, per ogni $r > 0$ la sfera di raggio r e centro a come immagine della applicazione $p_r : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n,\ p_r(u) := ru + v$ abbiamo:

7.1 TEOREMA. *Esiste un $\epsilon > 0$ tale che il sottoinsieme $p_r^{-1}(P)$ non dipende da r se $r < \epsilon$.*

DIM. Basta prendere una triangolazione di P per cui a sia un vertice e come ϵ la distanza di a dal sottopoloedro di P formato da quei simplessi che non contengono a. Segue che per $r < \epsilon$ si ha $p_r^{-1}(P) = p_r^{-1}(Q)$ dove Q è il sottopoliedro di P formato dall'unione di tutti i simplessi che contengono a come vertice. Ora Q è stabile rispetto alle omotetie $x \to \lambda(x-a)+a,\ \lambda < 1$ di centro a (e che contraggono lo spazio) da questo il teorema segue facilmente. □

In altre parole, consideriamo l' insieme delle semirette uscenti da a che possiamo parametrizzare con i punti della sfera S^{n-1}, fra queste le semirette la cui intersezione con P non ammette a come punto isolato possono essere pensate come spazzanti una specie di cono tangente a P in a, topologicamente formano un chiuso di S^{n-1} che coincide con il link $p_r^{-1}(P)$ e che chiameremo il *link topologico* di a in P.

Passiamo ora alla definizione poliedrale:

7.2 DEFINIZIONE. *Un link di a in P è un sotto poliedro compatto $L \subset P$, tale che, a sia congiungibile con L e, considerato il join aL, l'insieme $aL - L$ sia un intorno aperto di a in P; aL si dice una stella di a in P e $aL - L$ un intorno conico di a in P.*

Il nostro compito è ora di provare che:

1) Ogni punto $a \in P$ ammette un link.

2) Il link è una nozione intrinseca che non dipende in particolare dalla immersione in $\mathbb{R}^n$.

3) Il link di un punto a è una nozione locale, dipende solo dalla struttura del poliedro*vicino* ad a.

7.3 LEMMA. *Sia P un poliedro ed $A \subset P$ un aperto. Supponiamo che la chiusura $\overline{A}$ e $\overline{A} - A$ sono sottopoliedri, allora $P - A$ è un sottopoliedro di P.*

DIM. Esercizio, si triangoli P in modo che $\overline{A}$ e $\overline{A} - A$ sono sottocomplessi simpliciali.

7.4 Proposizione. *Ogni punto $a \in P$ ammette un link.*

Se L è un link di a in P, allora $L = |L(a,K)|$ per qualche triangolazione K.

Se $Q \subset P$ è un sottopoliedro contenente un intorno aperto di a in P allora $L(a,Q) = L(a,P)$

Dim. 1) Sia K una triangolazione di P avente a come vertice. Consideriamo $L(a,K)$, il link simpliciale di a in K ed $S(a,K) = aL(a,K)$, la stella simpliciale di a in K. Si vede subito che $|S(a,K)|$ è un intorno conico si a in P con vertice a e base $|L(a,K)|$.

2) Si triangoli $P - (aL - L)$ in modo che L sia un sottocomplesso K_0 (cf. Lemma precedente) e si estenda tale triangolazione ad aL prendendo il cono aK_0. Se K è la triangolazione di P cosí ottenuta, a è un vertice e $|L(a,K)| = L$, $|S(a,K)| = aL$.

3) Evidente dalla definizione.

♣

Esempio-Esercizio. Sia K un complesso simpliciale ed $A \in K$. Per ogni punto a di *Int* A, si ha che $|\dot{A} \star L(A,K)|$ è un link di a in K.

Sugg. Si utilizzi una suddivisione pseudobaricentrica con a centro di suddivisione.

Invarianza topologica del link Nella nozione di link per un poliedro immerso in $\mathbb{R}^n$ abbiamo sfruttato il fatto che un poliedro P immerso ha in ogni suo punto a una struttura *conica* ovvero esiste un intorno U di P per cui avviene che, dato comunque un punto $b \in U$ il segmento $[b,a]$ di estremi a,b è interamente contenuto in P.

Altrimenti detto prendendo $a = 0$ per sepmlicità, abbiamo un intorno sferico che interseca P in un cono ovvero un insieme stabile per le omotetie $x \to \lambda x,\ \lambda < 1$.

Formalizziamo questa discussione. Sia L un link di a in P (pensato come poliedro immerso), prendiamo $a = 0$ per semplicità di notazioni. Sia ϵ la distanza di L da 0. Dalla definizione di link, un vettore $v \neq 0$ con $|v| < \epsilon$ è contenuto in P se e solo se v è contenuto in un segmento di estremi $0, x$ con $x \in L$, inoltre due vettori di L non sono mai proporzionali. Ne segue che

7.5 Proposizione. *La applicazione $p : x \to \frac{x}{|x|}$, $p : L \to S^{n-1}$ è un omeomorfismo fra L ed il link topologico di a in P, tale applicazione è detta proiezione radiale.*

Prendendo ora due links poliedrali L_1, L_2 di a in P componendo gli omeomorfismi con il link topologico abbiamo di nuovo un omeomorfismo di L_1 ed L_2 che ancora chiameremo proiezione radiale.

Un caso notevole si ottiene quando L_1 è il link relativo ad una triangolazione T_1 mentre L_2 è il link relativo ad una triangolazione T_2 che suddivide T_1 in questo caso si ha la notevole

7.6 Proposizione. *La proiezione radiale $h: L_2 \to L_1$ trasforma i simplessi della triangolazione T_2 ristretta ad L_2 in simplessi che suddividono la triangolazione T_1 ristretta ad L_1.*

Dim. Sia Δ un qualunque simplesso di T_1 in L_1, per ipotesi $a * \Delta$ è triangolato dai simplessi della triangolazione T_2 che sono contenuti in $a * \Delta$, ne segue che, la proiezione radiale $p : L_2 \to L_1$ ristratta ad $L_2 \cap a * \Delta$ è un omeomorfismo di tale poliedro con il simplesso Δ e, dalla definizione di tale proiezione, segue facilmente che essa preserva la convessità e trasforma simplessi in simplessi.

Contrariamente alla nostra intuizione, la proiezione radiale $h: L_2 \to L_1$ non è una funzione PL anche se trasforma simplessi in simplessi! Per esempio, nel caso semplice illustrato in **figura**

Figura 3

il grafico di h è un arco di iperbole.

L'errore di credere che la proiezione radiale fosse PL fu fatto cosí ripetutamente, fin da Alexander, che Zeeman lo battezzò come lo *sbaglio standard* (the standard mistake). Tuttavia è semplice dare una buona approssimazione di h che sia una funzione PL. Nell'esempio di sopra basta mandare a_1 in a_2, b_1 in b_2 ed estendere linearmente ad un'applicazione $h': [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$, che è non solo PL, ma addirittura lineare.

Nella dimostrazione precedente dovremmo trattare il confronto di due links generati da due diverse immersioni e quindi provare che la struttura conica locale di un poliedro è in effetti indipendente dalla immersione, piuttosto di fare questo che lasciamo come esercizio, passiamo direttamente, sfruttando la proposizione precedente che lega la nozione di link PL con quella simpliciale a dimostrare:

7.7 Teorema. *(Invarianza PL del link). Se L_1, L_2 sono due link di a in P, allora L_1 è PL-omeomorfo a L_2.*

Dim. In base alla Prop. 3.1 e al fatto che due triangolazioni di P ammettono sempre una suddivisione simpliciale comune, è sufficiente dimostrare che

$$|L(a, K')| \approx_{PL} |L(a, K)|$$

per $K' \lhd K$ una suddivisione. Sia h la proiezione radiale tra i due link. Poiché h è un omeomorfismo e trasforma simplessi in simplessi

$$M = \{h(A) : A \in L(a, K')\}$$

è una suddivisione simpliciale di $L(A, K)$ e, per costruzione, h manda simplessi di $L(a, K')$) sopra simplessi di M omeomorficamente. Quindi h determina un isomorfismo simpliciale $h' \colon L(a, K') \to M$ mediante restrizione ai vertici ed estensione lineare ai simplessi.

♣

Il precedente teorema si può riformulare come segue:

Dato un poliedro P congiungibile con 0, il cono solido infinito da esso generato è per definizione

$$C_0^\infty(P) := \{tp| \ t \geq 0, \ p \in P\}.$$

Supponiamo di dare due poliedri $P_1, \ P_2$ nello spazio $\mathbb{R}^n$ che siano entrambi congiungibili con l'origine e che generino lo stesso cono solido infinito, allora vi è una proiezione radiale $h : P_1 \to P_2$ che è un omeomorfismo, vogliamo provare che allora

Corollario. *Si può costruire una nuova proiezione, detta pseudoradiale che ne stabilisce un omeomorfismo PL.*

Dim. A meno di omotetia si può assumere che il cono (finito) su P_1 contenga quello su P_2, dunque P_1, P_2 sono due link di 0 in $C(P_1)$ e l'asserto segue dal teorema.

Si noti che una proiezione pseudoradiale fra P_1, P_2 è determinata dai seguenti dati:
Due triangolazioni $K_1, \ K_2$ di P_1, P_2 per cui i simplessi di P_1 immagine tramite la proiezione radiale h dei simplessi di K_2 siano una suddivisione di K_1.

Si noti anche che, in modo ovvio, più si infittiscono le due triangolazioni e più la corrispondente proiezione pseudoradiale approssima la proiezione radiale.

Invarianza PL dei link Riassumendo i vari ingredienti, ricaviamo la seguente versione finale dell'invarianza PL dei link.

Teorema. *Siano L_1, L_2 due link di a in P (poliedro in $\mathbb{R}^n$) ed $h \colon L_1 \to L_2$ la proiezione radiale.*

Se K_i è una triangolazione di L_i, esiste $K_1' \lhd K_1$, tale che, per ogni $A \in K_1'$, $h(A)$ è un simplesso e l'insieme dei simplessi $h(A), \ A \in K_1'$ formano una suddivisione K_2' di K_2.

Se $h' \colon L_1 \to L_2$ è l'estensione lineare della restrizione di h ai vertici, $h' \colon K_1' \to K_2'$ è un isomorfismo simpliciale e, inoltre, $h'(A) = h(A)$ per ogni $A \in K_1'$.

L'isomorfismo h' viene comunemente chiamato *una proiezione pseudoradiale* e dipende dalla triangolazione K_1'.

Osservazione Si noti che più fitta è la suddivisione K_1' e maggiormente la corrispondente proiezione pseudoradiale approssima la proiezione radiale.

In base all'invarianza PL del link, se a è un punto di un poliedro P, è lecito scrivere $L(a, P)$ per denotare un qualsiasi link di a in P, o, meglio, il suo tipo di PL isomorfismo.

Ora finalmente arriviamo a provare che il link è, dal punto di vista PL, una nozione intrinseca che non dipende dalla immersione del poliedro.

Corollario. *Se $f: P \to Q$ è un PL omeomorfismo, risulta $L(a, P) \approx_{PL} L(f(a), Q)$ per ogni $a \in P$.*

Dim. Si triangolino P, Q in modo tale che f sia un isomorfismo simpliciale e a, $f(a)$ siano vertici. I link simpliciali di a ed $f(a)$ sono ora ovviamente isomorfi.

♣

Esercizio. Sia $a \in P$.
(a) $L(a \times 0, P \times [0, 1])$ è PL isomorfo ad un cono su $L(a, P)$
(b) $L(a \times 0, P \times [-1, 1])$ è PL isomorfo alla sospensione su $L(a, P)$ (**figure**)

Struttura PL delle celle

7.8 Teorema. *(PL omogeneità delle celle convesse) Date due n-celle A, B ed $x \in \partial A$, $y \in \partial B$, esiste un PL isomorfismo $f: \partial A \to \partial B$, con $f(x) = y$.*[1]

Dim. A meno di un isomorfismo lineare dello spazio ambiente, possiamo assumere $\langle A \rangle = \langle B \rangle = \mathbb{R}^n$ ed inoltre a meno di omotetia, che $Int\ A \subset B$. Sia $a \in Int\ A$. Allora, sia ∂A, che ∂B sono link di a in B. pertanto $\partial A \approx \partial B$. Inoltre, ruotando A, possiamo fare in modo che la proiezione radiale da a mandi x in y. A questo punto il risultato segue dal Teorema 3.3 prendendo x, y come vertici di K_1, K_2 triangolazioni di A, B rispettivamente.

♣

Prendendo $A \equiv B$ nel teorema vediamo che, dati comunque due punti x, y in ∂A, esiste un PL isomorfismo di ∂A, che porta x in y. Inoltre, prendendo il cono dell'isomorfismo $f: \partial A \to \partial B$, otteniamo un PL isomorfismo di A con B. Dunque:

Proposizione. *Due n-celle convesse sono PL isomorfe. Inoltre dati due punti x, y interni alle due celle e due punti u, v sul bordo, esiste un PL isomorfismo che manda x in y ed u in v.*

Si osservi che un qualunque omeomorfismo fra due celle preserva i bordi (cf.).

Sfere Dalla proposizione precedente segue che possiamo dare la seguente:

[1] Generalizzare a più punti?

7.9 DEFINIZIONE. *Una n-sfera PL (o, brevemente, una n-sfera) è un poliedro PL isomorfo alla frontiera di una $n+1$-cella. Un n-disco PL (o, brevemente, un n-disco) è un poliedro PL isomorfo ad una n-cella convessa.*

Esempi. Un cubo o un simplesso n-dimensionali sono n-dischi, i loro bordi sono $n-1$-sfere.

Vediamo la natura dei links nelle sfere e nei dischi.

7.10 PROPOSIZIONE. *Il link di un punto in una n-sfera è una $n-1$-sfera.*
Sia Δ un n-disco.
(a) Se $a \in \partial\Delta$, allora $L(a, \Delta)$ è un $n-1$-disco.
(b) Se $a \in Int\ \Delta$, allora $L(a, \Delta)$ è una $n-1$-sfera.

DIM. Basta dimostrarlo per una particolare n-sfera, per esempio per il bordo di un $n+1$-simplesso Δ di vertici $v_0, \dots, v_{n+1}$. Sia $x \in \partial\Delta$. Per il Teorema 3.4 esiste un PL isomorfismo di $\partial\Delta$, che porta x in un vertice v_i. Basta allora controllare il link simpliciale di v_i, il quale è il bordo della faccia opposta a v_i, pertanto una $n-1$-sfera.

In modo del tutto analogo si dimostra la seconda parte.

♣

LINKS IN PRODOTTI E JOINS

In questa sezione spesso scriveremo semplicemente $\approx$ invece di $\approx_{PL}$ per indicare un PL-omeomorfismo fra due poliedri.

7.11 PROPOSIZIONE. *Se vP, wQ sono coni:*

$$L(v \times w, vP \times wQ) \approx_{PL} P \star Q \tag{7.12}$$

DIM. Posto $C(P) = vP$ e $C(Q) = wQ$, assumiamo $C(P) \subset \mathbb{R}^m$ e $C(Q) \subset \mathbb{R}^n$. Quindi $C(P) \times C(Q) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, e possiamo assumere che (v, w) coincida con l'origine.

Si verifica facilmente che $C(P) \times C(Q)$ è un cono di vertice $(v, w) = 0$ e base $M = C(P) \times Q \cup P \times C(Q) \subset C(P) \times C(Q)$. Dunque M è un link di (v, w). Ora, P, Q sono senz'altro congiungibili in $\mathbb{R}^{m+n}$. Consideriamo la proiezione radiale dall'origine

$$h: P \star Q \to M$$

che si verifica è data da:

$$h((1-t)p + tq) = \begin{cases} (p, \frac{t}{1-t}q) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (\frac{1-t}{t}p, q) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

(**figura**)
e che è un omeomorfismo. Quindi h determina (corollario 3.2) una proiezione pseudoradiale che dà un PL isomorfismo $P \star Q \approx M$.

♣

La proposizione è una generalizzazione dell'esercizio 3.3. Da essa segue subito:

Corollario. *Se P, Q sono poliedri ed $a \in P$, $b \in Q$, allora*

(7.13) $$L((a,b), P \times Q) = L((a,b), |S(a,P)| \times |S(b,Q)|) \approx L(a,P) \star L(b,Q).$$

7.14 Proposizione. *In $P \star Q$:*
(1) *Se $a \in P$:*

(7.15) $$L(a, P \star Q) \approx L(a,P) \star Q.$$

(2) *Se $x \in P \star Q - (P \cup Q)$:*

(7.16) $$L(x, P \star Q) \approx S^0 \star L(a,P) \star L(b,Q)$$

dove $x \in [a,b]$, con $a \in P$, $b \in Q$.

Dim. Utilizziamo due triangolazioni $|K| = P$, $|J| = Q$, cosicché $P \star Q = |KJ|$ e supponiamo a, b vertici di K, J risp.

(1) Nella formula combinatoria **(C2)** del §1.1, si prenda $A = a$, $B = \emptyset$:

(7.17) $$L(a, KJ) = L(a,K) \star L(\emptyset, J) = L(a,K) \star J.$$

(2) Nella medesima formula si prenda $A = a$, $B = b$:

(7.18) $$L([a,b], KJ) = L(a,K) \star L(b,J)$$

Applicando l'esempio-esercizio **2.1** con $A = [a,b]$, otteniamo che:

$$|(\{a\} \cup \{b\}) \star L([a,b], KJ)| \approx L(x, |KJ|)$$

Quindi, per la :

$$L(x, P \star Q) \approx S^0 \star |L(a,K)| \star |L(b,K)|$$

La proposizione è dimostrata.

♣

Notiamo un importante caso speciale della precedente Proposizione. Supponiamo $Q = v$ si riduca ad un punto, così che $P \star Q = C(Q)$ è il cono su P. Preso un punto $p \in P \subset C(P)$ dalla (1) otteniamo

(7.19) $$L(p,\ C(P)) = C(L(p,\ P))$$

invece se $a \in C(P)$ è interno al segmento pv, $p \in P$ abbiamo

(7.20) $$L(a,\ C(P)) = S^0 \star L(p,\ P) = \Sigma\, L(p,P)$$

Un'ulteriore conseguenza di questa analisi è la seguente osservazione.

Sia P un poliedro $a \in P$, L, L, $La - L$ un punto un suo link ed un suo intorno conico aperto.

Per costruzione La è PL isomorfo al cono su L di vertice a, in particolare un punto $x \in La - L$ distinto da a si trova in un unico segmento ab, $b \in L$.

Indichiamo con S^j una j-sfera PL e con B^j un j-disco PL.

7.21 PROPOSIZIONE.
(a) $S^p \star S^q \approx S^{p+q+1}$
(b) $B^p \star B^q \approx B^{p+q+1}$
(c) $S^p \star B^q \approx B^{p+q+1}$.

DIM.
(a) Sia $I^j \approx [-1,1]^j$. Allora

$$S^p \star S^q \approx L(0, I^{p+1}) \star L(0, I^{q+1}) \approx L(0, I^{p+q+2}) \approx \partial I^{p+q+2} \approx S^{p+q+1}.$$

(b) Per l'invarianza PL del join possiamo assumere che B^p, B^q siano simplessi, da cui il risultato segue immediatamente.
(c) Se $p = 0$ basta prendere come $B^0 = v$ il baricentro di un simplesso B^{p+1} di cui S^p è il bordo. In generale dalla associatività del join e da (b) segue che

$$S^p \star B^{q+1} \approx S^p \star (v \star B^q) \approx (S^p \star v) \star B^q \approx B^{p+1} \star B^q \approx B^{p+q+1}$$

ancora da (b).

COROLLARIO.
(a) *Se $P \star Q$ è una PL sfera, allora entrambi P e Q sono PL sfere.*
(b) *Se $P \star Q$ è un PL disco, allora ciascuno tra P e Q è una PL sfera o un PL disco.*[2]

DIM. Per provare (a) sia $a \in P$. Allora $L(a, P \star Q)$ è una sfera perché $P \star Q$ è una sfera. Ma $L(a, P \star Q) \approx L(a, P) \star Q$. Procedendo induttivamente sulla dimensione di $P \star Q$, possiamo assumere che Q sia una sfera. Per un argomento simmetrico anche P é una sfera. La parte (b) si prova nello stesso modo.

♣

[2]escludendo evidentemente che entrambi siano PL sfere.