

1 Complessi simpliciali

NOTA In questo paragrafo discutiamo i fondamenti della teoria simpliciale che storicamente è stata alla base dello sviluppo dei metodi omologici e che rispecchia alcuni degli aspetti topologicamente più fini della teoria.

STRUTTURE AFFINI Una *struttura affine* di dimensione n su un insieme E consiste nel dare una azione semplicemente transitiva dello spazio euclideo \mathbb{R}^n su E ossia una funzione $(v, p) \rightarrow v + p$, $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in E$ con

$$0 + p = p. \quad v + (w + p) = (v + w) + p$$

per cui dato un punto $p \in E$ a piacere l'applicazione $\mathbb{R}^n \rightarrow E$, $v \rightarrow v + p$ è biunivoca e quindi si ottiene una identificazione fra i due insiemi. In questo caso diciamo che p è fissato come *origine* dello spazio affine.

In E non sono definite intrinsecamente le operazioni di spazio vettoriale ma, si può considerare la differenza $p - q$ fra due punti che per definizione è il vettore v per cui $p = v + q$ e si può fare la costruzione seguente. Dati punti p_i , $i = 1, \dots, n \in E$, fissata una origine O essi vengono rappresentati da vettori $v_i \in \mathbb{R}^n$, per cui $p_i = v_i + O$.

Cambiando l'origine in P i punti vengono rappresentati da nuovi vettori $v_i + w$ con $O = w + P$.

Dati numeri t_i con $\sum t_i = 1$ il punto $p = (\sum_i t_i v_i) + O$ non dipende dalla scelta dell'origine, infatti dato un vettore w qualunque $\sum_i t_i (v_i + w) + P = (\sum_i t_i v_i) + (w + P)$.

Si indica con $p = \sum_i t_i p_i$ e viene detto combinazione affine dei punti p_i .

Il gruppo affine è il gruppo delle trasformazioni di \mathbb{R}^n generato dalle trasformazioni lineari e dalle traslazioni, tale gruppo opera naturalmente su E e, dalle formule precedenti segue che, se T è una trasformazione affine

$$T\left(\sum_i t_i p_i\right) = \sum_i t_i T(p_i)$$

Un sottospazio affine di E di dimensione k è un insieme della forma $V + p$ con V sottospazio vettoriale k -dimensionale di \mathbb{R}^n .

Dati $k + 1$ punti $p_i \in E$ è facile vedere che l'insieme

$$\langle p_0, \dots, p_k \rangle := \left\{ \sum_{i=0}^k t_i p_i \mid \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}$$

è un sottospazio affine di dimensione $\leq k$.

$\langle p_0, \dots, p_k \rangle$ è il minimo sottospazio affine contenente i punti p_i ed è detto *spazio generato* dai punti dati.

1.1 DEFINIZIONE. I punti p_0, \dots, p_k si dicono *indipendenti* se $\dim \langle p_0, \dots, p_k \rangle = k$.¹

In questo caso ogni punto $p \in \langle p_0, \dots, p_k \rangle$ si esprime in modo unico nella forma $p = \sum_i t_i p_i$, $\sum_i t_i = 1$. I numeri t_i sono dette *coordinate baricentriche* di p nel riferimento affine dato dai punti p_i .

Le nozioni affini sono legate ad un'altro importante concetto geometrico quello di *convessità*.

Ricordiamo che un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice *convesso* se, dati comunque due punti $p, q \in A$ il segmento $tp + (1 - t)q$, $t \leq 1$ di estremi p, q è interamente contenuto in A . È facile vedere che una intersezione qualunque di insiemi convessi è convesso e quindi, dato comunque un insieme B esiste un minimo insieme convesso contenente B e detto *inviluppo convesso* di B .

Figura 1

1.2 Esercizio a) L'inviluppo convesso dei punti p_i , $i = 1, \dots, k$ è l'insieme dei $p = \sum_{i=1}^k t_i p_i$, $0 \leq t_i$, $\sum_i t_i = 1$. Il diametro² di tale insieme è il massimo delle distanze fra i punti p_i .

È importante, come vedremo in particolare nello studio della topologia PL, ma anche per fare delle semplici induzioni generalizzare il precedente esercizio:

¹I punti p_i , $i = 0, 1, \dots, k \in \mathbb{R}^n$ sono indipendenti se e solo se i vettori $v_i = p_i - p_0$, $i = 1, \dots, k$ sono linearmente indipendenti.

²Il diametro di un insieme X è il sup fra le distanze delle coppie di punti di X .

b) Dati k insiemi convessi A_i l'involuppo convesso di $\cup_{i=1}^k A_i$ è l'insieme

$$(1.3) \quad A_1 * A_2 * \cdots * A_k := \left\{ \sum_{i=1}^k t_i p_i, \ 0 \leq t_i, \ \sum_i t_i = 1 \mid p_i \in A_i. \right\}$$

1.4 DEFINIZIONE. In generale, dati insiemi $A_i \subset \mathbb{R}^n$ non necessariamente convessi, l'insieme $A_1 * A_2 * \cdots * A_k$ definito da 1.1 è detto *join* degli insiemi A_i .³

Gli insiemi A_i si dicono *indipendenti* o *congiungibili* se la espressione di un punto del join come $\{\sum_{i=1}^k t_i p_i, \ 0 \leq t_i, \ \sum_i t_i = 1 \mid p_i \in A_i.\}$ è unica (pur di pensare a $0p = 0$).

Si osservi che l'operazione di join fra sottoinsiemi di \mathbb{R}^n è associativa.

Figura 2

SIMPLESSI

1.5 DEFINIZIONE.

- (1) Dati $k + 1$ punti $p_i, \ i = 0, \dots, k$ indipendenti il loro involuppo convesso $\sigma := p_0 * p_1 * \cdots * p_k$ è detto **simpletso** k -**dimensionale** generato dai vertici p_i .
- (2) Dato un simpletso Γ_k generato dai vertici $p_i, \ i = 0, \dots, k$ ed un suo punto $p = \sum_{i=0}^k t_i p_i$ definiamo il suo **supporto** $\text{supp}(p)$ come il sottoinsieme di $0, 1, \dots, k$ (o dei corrispondenti vertici) formato dagli indici i per cui $t_i \neq 0$.
- (3) Dato un sottoinsieme $J \subset \{0, 1, \dots, k\}$ definiamo $\Gamma_k^J := \{p \in \Gamma_k \mid \text{supp}(p) = J\}$. Un tale insieme è detto **faccia aperta** di Γ_k .

Chiaramente Γ_k è l'unione disgiunta delle sue facce aperte. Inoltre per la chiusura si ha che:

$$(1.6) \quad \bar{\Gamma}_k^J := \cup_{K \subset J} \Gamma_k^K.$$

è il simpletso generato dai vertici $p_i, \ i \in J$, un tale simpletso è detto una **faccia** di Γ_k .

³In seguito daremo una definizione intrinseca di join di due spazi

Nello spazio \mathbb{R}^{n+1} indichiamo con e_i , $i = 0, \dots, n$ i vettori della base canonica (e_i ha coordinate 0 tranne all' $i + 1$ posto dove vale 1).

- (4) Il **simpleso standard n -dimensionale** Δ_n è l'involuppo convesso dei punti e_i , $i = 0, \dots, n$.

Figura 3

Se decomponiamo l'insieme dei $k + 1$ vertici di un simpleso σ in due parti disgiunte di cardinalità $a + 1$, $b + 1$ | $a + b + 1 = k$ otteniamo due *facce opposte*, indichiamole con σ_1 , σ_2 .

Per costruzione i due semplici σ_i sono indipendenti (cfr. def 1) e $\sigma = \sigma_1 * \sigma_2$.

Un caso particolare di cui faremo uso per ragionamenti induttivi si ha quando σ_1 si riduce ad un vertice, ad esempio $p_0 * p_1 * \dots * p_k = p_0 * (p_1 * \dots * p_k)$.

Dato un simpleso σ l'unione delle sue facce proprie viene detto *bordo* di σ e denotato con il simbolo $\dot{\sigma}$, è evidentemente il complementare della faccia aperta di σ formata dai punti in cui tutte le coordinate baricentriche sono non nulle, detta *l'interno* di σ .

1.7 Esercizio Preso comunque un punto p nell'interno di σ provare che p e $\dot{\sigma}$ sono congiungibili (def 1.1) e che $\sigma = p * \dot{\sigma}$.

Figura 4

COMPLESSI SIMPLICIALI
topologia combinatoria.

Cominciamo a discutere una delle nozioni fondamentali di

1.8 DEFINIZIONE.

- (1) Un **complesso simpliciale** K immerso in \mathbb{R}^n , è un insieme di semplici di \mathbb{R}^n , tale che
- (a) ogni faccia di un semplice di K stia in K .
 - (b) l'intersezione di due qualsiasi semplici di K sia una faccia (possibilmente vuota) di entrambi (**figura 4**).
 - (c) L'insieme K è localmente finito ovvero per ogni punto p dello spazio esiste un intorno U di p che interseca solo un numero finito di elementi di K .

Figura 5

L'insieme dei vertici, dei segmenti e dei triangoli indicati nella figura forma un complesso simpliciale. Se da tale insieme togliamo un qualsiasi vertice, esso cessa di essere un complesso simpliciale, perché la (a) non è verificata. Così pure, se aggiungiamo il 2-simplesso (a b c), la (b) non è verificata.

La **dimensione di** K , scritta $\dim K$, è la massima dimensione dei semplici che compaiono in K .

L'unione, in \mathbb{R}^n , dei semplici di K si indica con $|K|$ e si chiama lo **spazio sostegno** o **supporto** di K . Si noti che, mentre K è un insieme di semplici di \mathbb{R}^n , $|K|$ è uno spazio topologico. Inoltre $|K_1| = |K_2|$ non implica $K_1 = K_2$ (**figura 5**).

Figura 6

1.9 Esercizio Se $|K|$ è compatto allora K è un insieme finito di semplici.

(sugg) Si costruisca altrimenti un punto di accumulazione dei vertici.

Un sottoinsieme L di K , che sia a sua volta un complesso simpliciale, si dice un **sotto-complesso** di K , evidentemente $|L| \subset |K|$.

Esempi:

- (a) Se σ è un semplice di un complesso K , l'insieme $\bar{\sigma}$, costituito da σ e da tutte le sue facce proprie, è un sottocomplesso di K . Così pure, l'insieme $\dot{\sigma}$ delle facce proprie di σ è un sottocomplesso di K (e anche di $\bar{\sigma}$).
- (b) L'insieme dei semplici di K di $\dim \leq p$ è un sottocomplesso di K , detto il **p-scheletro** di K e denotato con $K^{(p)}$.

In particolare $K^{(0)}$ è l'insieme dei vertici di K .

L'aspetto importante dell'approccio combinatorio consiste nel trasformare problemi geometrici in problemi combinatori che, almeno teoricamente, si risolvono tramite espliciti algoritmi.

Proponiamo al lettore di analizzare combinatoriamente il gruppoide ed il gruppo di omotopia, usi il Teorema di approssimazione simpliciale del Cap. 5.

Dato un complesso simpliciale K e due vertici a, b definiremo cammino combinatorio da a a b una successione di vertici $a = a_0, a_1, \dots, a_k = b$ per cui $a_i a_{i+1}$ sia sempre un 1-simplesso. Denotiamo con $C(a, b)$ tale insieme, abbiamo una ovvia composizione $C(a, b) \times C(b, c) \rightarrow C(a, c)$ per 3 vertici.

Nell'insieme $C(a, b)$ consideriamo la relazione di equivalenza R dedotta dalle seguenti mosse elementari:

- i) Una successione $\dots x, a, b, a, y \dots$ è equivalente a $\dots x, a, y \dots$
- ii) Se abc sono vertici di un 2 semplice in K una successione $\dots x, a, b, y \dots$ è equivalente a $\dots x, a, c, b, y \dots$

Figura 7

1.10 Esercizio Provare che per ogni coppia di vertici a, b si identifica $C(a, b)/R = \pi_1(|K|, a, b)$. In particolare presentare il gruppo di omotopia di $|K|$.

Si noti che da questo esercizio discende il fatto importante che il gruppo di omotopia di $|K|$ dipende soltanto dallo scheletro 2-dimensionale e non dai semplici di dimensione > 2 .

Una nozione a priori più generale e che sarà studiata in dettaglio nel capitolo sulla topologia PL è quella di **poliedro**.

1.11 DEFINIZIONE. *Un poliedro (finito) in \mathbb{R}^n è un sottoinsieme $P \subset \mathbb{R}^n$ unione di un numero finito di semplici.*⁴

Nella definizione di poliedro nessuna ipotesi è stata fatta sulla posizione reciproca dei semplici. Peraltro è evidente che un insieme può essere descritto come unione di semplici in infiniti modi e pertanto conviene porre una ulteriore definizione:

1.12 DEFINIZIONE. *Dato un insieme $X \subset \mathbb{R}^n$ ed un complesso simpliciale K per cui $X = |K|$ si dice che K è una triangolazione di X .*

Se esiste una triangolazione di X allora si dice che X è triangolabile.

Uno dei risultati importanti di topologia PL sarà il:

1.13 TEOREMA. *Ogni poliedro è triangolabile.*

La topologia PL sfrutterà a pieno un altro Teorema importante, ovvero che i poliedri formano una categoria, la *Categoria PL* definendo come morfismi fra due poliedri A, B quelle funzioni $f : A \rightarrow B$ il cui grafo $\Gamma(f) \subset A \times B$ è ancora un poliedro.

Vi sono molti oggetti geometrici, come sfere, varietà, insiemi algebrici immersi in \mathbb{R}^n che, essendo *curvi* non sono triangolabili secondo la nostra definizione ma a cui si vogliono applicare i metodi della topologia combinatoria. Per questi si utilizza una definizione astratta di triangolazione:

1.14 DEFINIZIONE. *Una **triangolazione** di uno spazio topologico X è un omeomorfismo $f : |K| \rightarrow X$, dove K è un complesso simpliciale.*

Quando la particolare f sia chiara dal contesto o irrilevante, si omette dalle notazioni e si dice semplicemente che K è una triangolazione di X .

La nozione di triangolazione è in realtà una nozione sottile in quanto vi sono in generale infinite triangolazioni di uno spazio e, se si segue questo punto di vista, vanno studiate le relazioni fra triangolazioni diverse. Questa analisi sarà oggetto del capitolo sulla topologia PL.

Esempio – La proiezione radiale $r : |\dot{\sigma}| \rightarrow S^n$ dal baricentro, dà un omeomorfismo tra S^n e $|\dot{\sigma}|$, dove σ è un $(n + 1)$ -simpleso inscritto in S^n . Pertanto le sfere sono triangolabili (**figura 6**).

⁴Più in generale un poliedro localmente finito è un unione di una famiglia di semplici con la condizione che, per ogni punto di \mathbb{R}^n esiste un intorno U che incontra solo un numero finito dei semplici dati.

Figura 8

L'utilità del concetto di triangolazione risiede nel fatto che molte classi di spazi che appaiono in geometria sono triangolabili, purtroppo è in generale solo attraverso Teoremi difficili che si prova questa proprietà. Non è possibile in poche pagine provare questi Teoremi ma è importante conoscere la loro esistenza in una forma abbastanza precisa. Pertanto discutiamone alcuni:

Varietà differenziabili.

Mettiamoci nel caso compatto per utilizzare le nozioni già introdotte.

1.15 TEOREMA. *Data una varietà differenziabile M con bordo $\delta(M)$ esiste una triangolazione $u : |K| \rightarrow M$ tale che.*

a) *Il bordo di M corrisponde ad un sottocomplesso di $|K|$.*

b) *Se M è di classe C^∞ la restrizione di u ad ogni semplice di $|K|$ è una funzione C^∞ .*

Si può definire più in generale la nozione di varietà topologica come uno spazio di Hausdorff X a base numerabile e localmente omeomorfo ad \mathbb{R}^n .⁵

In generale anche se X è compatto non è detto che sia triangolabile, al contrario del caso C^∞ . Lo è nel caso $n = 2$.

1.16 TEOREMA. *Ogni superficie topologica è triangolabile.*

Un'altra classe di spazi triangolabili è la classe delle varietà algebriche reali o complesse e più in generale gli spazi semialgebrici questa classe è interessante anche perché contiene molti spazi *singolari* esclusi quindi dalla classe delle varietà differenziabili o topologiche.

Ricordiamo le definizioni principali ed il teorema di triangolazione.

1.17 DEFINIZIONE. *Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n si dice semialgebrico se è unione finita di insiemi X_i ciascuno dei quali sia definito da un numero finito di equazioni e disequazioni polinomiali*

$$X_i := \{p \in \mathbb{R}^n \mid f_i(p) = 0, g_j(p) > 0\}, f_i(X), g_j(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n].$$

Per costruzione un poliedro è un caso speciale di insieme semialgebrico in quanto è dato come unione di semplici definiti da equazioni e disequazioni lineari.

Gli insiemi semialgebrici formano una categoria prendendo come morfismi quelle funzioni continue $f : X \rightarrow Y$ per cui il grafico sia esso stesso un insieme semialgebrico.

Si ha allora il fondamentale

1.18 TEOREMA. *Dato un insieme semialgebrico compatto X e un numero finito di sottoinsiemi semialgebrici X_i di X esiste una triangolazione semialgebrica di X (cioè un omeomorfismo semialgebrico fra un complesso simpliciale $|K|$ ed X) tale che ogni insieme X_i sia unione di facce aperte di semplici di $|K|$.*

È essenziale confrontare diversi spazi triangolati e quindi dare un contenuto categorico alla definizione di complesso simpliciale e definire quindi la nozione di *morfismo simpliciale*.

⁵questa è la definizione di varietà senza bordo

1.19 DEFINIZIONE. Una applicazione $\phi : |\mathcal{K}_1| \rightarrow |\mathcal{K}_2|$ si dice *simpliciale* se ϕ manda i vertici di \mathcal{K}_1 nei vertici di \mathcal{K}_2 e se, dato un semplice di \mathcal{K}_1 di vertici p_0, \dots, p_k gli elementi $\phi(p_i)$ sono vertici di un semplice di \mathcal{K}_2 e sui semplici corrispondenti

$$\phi\left(\sum t_i p_i\right) = \sum t_i \phi(p_i).$$

COMPLESSI COMBINATORI Vogliamo estrarre ora l'aspetto combinatorio della nozione di complesso simpliciale.

Dato un complesso simpliciale \mathcal{K} esso individua l'insieme \mathcal{V} dei suoi vertici e l'insieme \mathcal{S} dei sottoinsiemi dell'insieme \mathcal{V} dei vertici che sono vertici di semplici di \mathcal{K} . Questa coppia \mathcal{V}, \mathcal{S} si dice *scheletro* del complesso simpliciale, le sue proprietà formali sono estraibili dalla prossima definizione.

Supponiamo di dare un insieme \mathcal{V} , ed un insieme \mathcal{S} di parti finite di \mathcal{V} .

1.20 DEFINIZIONE.

- (1) La coppia $\mathcal{C} := (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ si dice un **complesso simpliciale combinatorio** se valgono le seguenti proprietà:
 - a) Per ogni $v \in \mathcal{V}$ si ha $\{v\} \in \mathcal{S}$.
 - b) Se $A \in \mathcal{S}$ e $B \subset A$ allora $B \in \mathcal{S}$.
- (2) In questo caso \mathcal{V} è detto insieme dei **vertici** di \mathcal{C} e \mathcal{S} insieme dei **simplessi**.
Se $A \in \mathcal{S}$ ha $k+1$ elementi si dice che A è un *simpleso k -dimensionale*.
- (3) La massima dimensione dei semplici di \mathcal{S} è detta *dimensione di \mathcal{C}* .
- (4) Dati due complessi simpliciali combinatori $\mathcal{C}_1 := (\mathcal{V}_1, \mathcal{S}_1)$ e $\mathcal{C}_2 := (\mathcal{V}_2, \mathcal{S}_2)$ un *morfismo simpliciale* è una applicazione $f : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ tale che, per ogni $A \in \mathcal{S}_1$ si abbia $f(A) \in \mathcal{S}_2$.

Abbiamo definito un complesso simpliciale in modo combinatorio, in effetti usando la nozione data di morfismo abbiamo definito la *categoria* dei complessi simpliciali.⁶

La definizione è stata data in modo tale che lo scheletro di un complesso simpliciale geometrico è un complesso simpliciale combinatorio. Proviamo il viceversa.

Un complesso simpliciale geometrico K immerso in \mathbb{R}^n si dice **realizzazione geometrica** di un complesso simpliciale combinatorio \mathcal{C} se i vertici ed i semplici di K sono in corrispondenza biunivoca (preservante le inclusioni) con quelli di \mathcal{C} ovvero se \mathcal{C} è lo scheletro di K .

⁶Un esempio notevole è il seguente. Supponiamo di avere dato un ricoprimento $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ di uno spazio X , esso definisce un complesso simpliciale detto *nervo del ricoprimento* come segue. Si prende A come insieme dei vertici e come semplici si prendono tutti i sottoinsiemi finiti $S \subset A$ tali che $\bigcap_{i \in S} U_i \neq \emptyset$. Questo complesso si utilizza per approssimare uno spazio topologico qualunque con uno spazio triangolato.

1.21 Esercizio Un morfismo simpliciale $\phi : |\mathcal{K}_1| \rightarrow |\mathcal{K}_2|$ è individuato univocamente da un morfismo dei corrispondenti scheletri.

Un punto cruciale della teoria consiste nell'osservare che, dato comunque un complesso simpliciale combinatorio \mathcal{C} possiamo sempre associargli in modo essenzialmente canonico una realizzazione geometrica.

Supponiamo per semplicità \mathcal{V} finito. Il caso infinito si ottiene con un passaggio al limite.⁷

Sia $N = \#\mathcal{V}$ la cardinalità di \mathcal{V} ed identifichiamo \mathcal{V} con l'insieme dei punti e_i vertici del simpleso standard $N - 1$ -dimensionale.

Ogni simpleso $A \in \mathcal{S}$ individua una faccia di Δ_{N-1} e tale insieme di facce è chiaramente un sottocomplesso simpliciale del simpleso standard con scheletro \mathcal{C} . Il suo supporto è:

$$(1.22) \quad |\mathcal{C}| := \{p \in \Delta_N \mid \text{supp}(p) \in \mathcal{S}\} \subset \mathbb{R}^N.$$

In generale l'immersione che abbiamo data è poco economica, non è difficile provare che un complesso simpliciale di dimensione n si può immergere in \mathbb{R}^{2n+1} , diamo una breve indicazione di questo fatto lasciando i dettagli al lettore come esercizio:

a) Diciamo che i punti p_i , $i = 1, \dots, N$ nello spazio \mathbb{R}^k sono in *posizione generica* se, dati comunque $k + 1$ fra di essi, questi sono indipendenti.

Primo passo dell'esercizio, provare che, per ogni k, N esistono N punti in posizione generica in \mathbb{R}^k . (Sugg.) Una $N + 1$ -upla di punti in \mathbb{R}^k si rappresenta come una matrice $k \times N + 1$ a questa matrice aggiungere una ultima riga creando una matrice Y formata tutta da 1 e provare che i punti sono indipendenti è formata da punti in posizione generica se e solo se tutti i minori di ordine $k + 1$ di Y hanno rango $k + 1$.

b) Secondo passo. Dato un complesso simpliciale $\mathcal{C} := (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ su N vertici e di dimensione n scegliamo N punti generici p_i , $i = 1, \dots, N$ in \mathbb{R}^{2n+1} .

1.23 Esercizio La realizzazione geometrica $|\mathcal{C}|$ di \mathcal{C} si immerge omeomorficamente in \mathbb{R}^{2n+1} restringendo a $|\mathcal{C}|$ il morfismo $\sum_{i=0}^{N-1} t_i e_i \rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} t_i p_i$.⁸ Pertanto dato un complesso simpliciale \mathcal{C} di dimensione n esiste una sua realizzazione geometrica nello spazio \mathbb{R}^{2n+1} .

MORFISMI SIMPLICIALI In questa sezione complesso simpliciale significa complesso simpliciale combinatorio.

⁷Sia $X := \cup_i X_i$ unione crescente di sottoinsiemi, ciascuno con una struttura topologica tale che X_i sia sottospazio di X_{i+1} . Su X si mette la topologia in cui, A è aperto se e solo se $A \cap X_i$ è aperto per ogni i . Quindi una funzione $f : X \rightarrow Y$ a valori in uno spazio topologico Y è continua se e solo se $f|_{X_i}$ lo è per ogni i .

⁸Il tema delle immersioni in uno spazio ambiente si può trattare a vari livelli, quello che abbiamo descritto è un teorema di immersione PL (cioè piecewise-linear ovvero lineare a tratti). Vale un teorema generale di immersione topologica ed uno differenziale per spazi topologici risp. varietà differenziali di dimensione n nello spazio \mathbb{R}^{2n+1} . In genere non si può ridurre la dimensione a $2n$ (cf.).

Vi sono alcune semplici considerazioni da fare sui complessi simpliciali (combinatori). Abbiamo una ovvia nozione di sottocomplesso di un complesso \mathcal{C} , questo è un complesso $\mathcal{C}' := \{\mathcal{V}', \mathcal{S}'\}$ tale che $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}, \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$. Chiaramente la realizzazione geometrica di un sottocomplesso è un sottospazio.

Esempio Per ogni intero $k \leq \dim(\mathcal{C})$ l'insieme \mathcal{S}_k di tutti i semplici di \mathcal{S} di dimensione $\leq k$ danno luogo ad un sottocomplesso \mathcal{C}_k detto (insieme alla sua realizzazione geometrica) *scheletro k -dimensionale*.

Torniamo sulla nozione di *morfismo simpliciale* fra due complessi simpliciali $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, ovvero una applicazione $f : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ tale che, per ogni $A \in \mathcal{S}_1$ si ha $f(A) \in \mathcal{S}_2$. In questa definizione non richiediamo necessariamente che f sia iniettiva.

Un morfismo di complessi simpliciali induce una applicazione continua fra le due realizzazioni geometriche, indotta dalla formula (invitiamo il lettore di verificare che è ben posta ed indipendente dalla realizzazione scelta):

$$f\left(\sum_{v \in \mathcal{V}} t_v v\right) := \sum_{v \in \mathcal{V}} t_v f(v).$$

Abbiamo in effetti costruito un funtore dalla categoria dei complessi simpliciali con morfismi simpliciali agli spazi topologici con le applicazioni continue.

Poiché per definizione i vertici di un complesso sono i semplici di dimensione 0 d'ora in poi identificheremo un complesso simpliciale con il suo insieme dei semplici.

L'idea della topologia simpliciale è quella di tradurre proprietà geometriche di $|\mathcal{C}|$ in proprietà combinatorie. Ad esempio si osservi che le componenti connesse di $|\mathcal{C}|$ sono la realizzazione geometrica delle componenti connesse combinatorie definite dalla relazione di equivalenza sui vertici generata da $a \cong b$ se $\{a, b\}$ è un semplice.

Vi sono varie difficoltà in questo programma. La prima è che spazi assai semplici, come ad esempio lo spazio proiettivo, si descrivono con triangolazioni molto complicate; in molti casi poi non vale neanche la pena tentare di descrivere triangolazioni esplicite. La seconda difficoltà è nello stabilire confronti fra diverse triangolazioni per convincersi che le nozioni che introduciamo hanno un significato intrinseco. Questo punto lo rivedremo nel capitolo sulla topologia PL, per ora contentiamoci di una definizione e di una osservazione:

1.24 DEFINIZIONE. *Dati due complessi simpliciali \mathcal{K}, \mathcal{L} in \mathbb{R}^n diremo che \mathcal{L} è una suddivisione di \mathcal{K} se $|\mathcal{K}| = |\mathcal{L}|$ ed ogni semplice di \mathcal{K} è unione di semplici di \mathcal{L} .*

Vedremo in seguito esempi di suddivisioni, il più naturale si ottiene con il seguente procedimento induttivo:

Ricordiamo che (Esercizio 1.2) un semplice σ si può scrivere come join $p * \dot{\sigma}$ di un suo punto interno con il bordo, pertanto se in qualche modo abbiamo una suddivisione $\mathcal{K} := \{\sigma_i\}$ del bordo $\dot{\sigma} = \cup \sigma_i$, otteniamo $\sigma = \cup p * \sigma_i$, da cui una suddivisione di σ indicata con $p * \mathcal{K}$.⁹

⁹Formalmente i semplici di questa suddivisione sono $\{p\}$ tutti i semplici σ_i e tutti quelli della forma $p * \sigma_i$.

In particolare prendiamo, per ogni semplice A di \mathcal{K} un punto p_A nel suo interno e definiamo induttivamente la suddivisione $Sd(A) := p_A * Sd(\dot{A})$ dei semplici A di \mathcal{K} a partire da quelli 0 dimensionali (che non vengono ovviamente suddivisi).

Figura 9

La suddivisione appena descritta viene detta *pseudobaricentrica*.

Una convenzione che spesso si usa è quella di prendere come p_A proprio il baricentro di A ed in tal caso si parla di *suddivisione baricentrica*.

NERVO DI UN POSET Una ultima interessante osservazione. Vi è uno stretto legame fra la categoria dei complessi simpliciali e quella degli insiemi parzialmente ordinati *Posets* (cf. Cap 2.).

Ad ogni complesso simpliciale \mathcal{A} associamo il *poset* \mathcal{S} dei suoi semplici ordinati per inclusione, abbiamo un funtore da complessi simpliciali a posets.

Viceversa, dato un *poset* A si costruisce $\mathcal{N}(A)$, il complesso i cui vertici sono gli elementi di A ed i cui semplici sono i sottoinsiemi finiti di A totalmente ordinati.

1.25 **DEFINIZIONE.** $\mathcal{N}(A)$ si dice **nervo** del *poset* A .

La composizione di questi due funtori sostituisce ad un complesso simpliciale un nuovo complesso che è fondamentale nello studio geometrico e che si chiama *suddivisione baricentrica* lo studieremo in maggior dettaglio nel Cap. 5. Nel frattempo il Lettore verificherà:

1.26 Esercizio 1) La realizzazione geometrica del nervo del *poset* formato dai semplici di un complesso simpliciale \mathcal{A} è isomorfa, come complesso simpliciale, ad una qualunque suddivisione pseudobaricentrica di \mathcal{A} .

2) Si prenda l'esempio del Cap. 2 e se ne calcoli il nervo.

2 Omologia simpliciale e complessi di catene

NOTA Iniziamo ora il passaggio dalla combinatoria simpliciale all'algebra dei complessi di catene.

SIMPLESSI ORIENTATI L'approccio classico all'omologia parte dalla nozione di complesso simpliciale e triangolazione per arrivare ad una costruzione algebrica fondamentale, quella di *complesso di catene simpliciali* e della sua *omologia*.

Per farlo conviene introdurre una semplice nozione. Dato un insieme finito A con n elementi sia \mathcal{O}_A l'insieme degli $n!$ distinti ordinamenti totali di A .

Su \mathcal{O}_A opera evidentemente il gruppo delle permutazioni di A (gruppo simmetrico) in modo semplicemente transitivo.

Nel gruppo simmetrico si ha il sottogruppo delle permutazioni pari che opera dividendo \mathcal{O}_A in 2 orbite. Le due orbite si chiamano *orientamenti* di A .

Dato un ordinamento $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ indichiamo con (a_1, a_2, \dots, a_n) l'orientamento associato. La sequenza (a_1, a_2, \dots, a_n) viene detta **indicatrice** dell'orientamento.

Dato un complesso simpliciale \mathcal{C} definiamo il gruppo $C_k(\mathcal{C})$, i cui elementi sono detti *k-catene orientate*, come il gruppo libero avente come base i *k-simplessi orientati* modulo l'identificazione di un semplice orientato s con $-s'$ se s' è il medesimo semplice con l'orientazione opposta.

Può essere conveniente, dato $s := (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un semplice orientato $n - 1$ dimensionale ed un elemento a_0 tale che $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sia un semplice n dimensionale, indicare per il semplice orientato:¹⁰

$$(2.1) \quad (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) := a_0 s.$$

La successiva idea è quella di definire il bordo di una catena, si tratta di un omomorfismo di gruppi $C_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(\mathcal{C})$, definito, per ogni n , sui semplici orientati come segue:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \partial_n(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= \partial_n(a_0 s) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (a_0, a_1, a_2, \dots, \check{a}_i, \dots, a_n) = s - a_0 \partial_{n-1} s = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (a_0, a_1, \dots, \check{a}_i, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Usualmente, se non vi è ambiguità, scriveremo ∂ invece di ∂_n e verifichiamo che:

2.3 LEMMA. a) ∂ è ben definito.

b) ∂ è un differenziale cioè: $\partial \circ \partial = 0$.

DIM. a) Per la prima parte dobbiamo solo provare che la definizione è compatibile con le relazioni $s = -s'$ date cambiando l'orientamento. Poiché ogni permutazione è prodotto di trasposizioni su elementi consecutivi, dalla formula 1.1.2 per induzione ci limitiamo allo scambio dei primi due elementi.

¹⁰verificare che la definizione non dipende dalla indicatrice, è ben posta.

Consideriamo dunque $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = -(a_1, a_0, a_2, \dots, a_n)$ e scriviamo

$$\partial(a_0 a_1 s) = a_1 s - a_0 \partial(a_1 s) = a_1 s - a_0 s + a_0 a_1 \partial s = -\partial(a_1 a_0 s).$$

b) Proviamo la seconda per induzione

$$\begin{aligned} \partial^2(a_0 a_1 s) &= \partial(a_1 s - a_0 s + a_0 a_1 \partial s) = s - a_1 \partial s - s + a_0 \partial s + \partial(a_0 a_1 \partial s) = \\ &= -a_1 \partial s + a_0 \partial s + a_1 \partial s - a_0 \partial s + (a_0 a_1 \partial^2 s) = 0. \end{aligned}$$

COMPLESSI DI CATENE

Una delle idee fondamentali dell'algebra omologica consiste nell'estrarre un contenuto algebrico da queste idee, secondo la filosofia delle categorie:

2.4 DEFINIZIONE. *Un complesso algebrico di catene \mathcal{A} è una successione differenziale di gruppi (o moduli su un anello) cioè una successione*

$$\dots \rightarrow A_i \xrightarrow{\partial_i} A_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} A_{i-2} \xrightarrow{\partial_{i-2}} \dots$$

in cui i morfismi $\partial_i : A_i \rightarrow A_{i-1}$, detti differenziali verificano la condizione $\partial_{i-1} \partial_i = 0$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$.

Un morfismo f fra due complessi (di catene) $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ è una successione di morfismi $f_i : A_i \rightarrow B_i$ tali che $f_{i-1} \partial_i = \partial_i f_i$ per ogni i .

Diagrammaticamente si assume che commuti:

$$(2.5) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & A_i & \xrightarrow{\partial_i} & A_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & A_{i-2} & \xrightarrow{\partial_{i-2}} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & f_i & & f_{i-1} & & f_{i-2} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & B_i & \xrightarrow{\partial_i} & B_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & B_{i-2} & \xrightarrow{\partial_{i-2}} & \dots \end{array}$$

Abbiamo quindi definito la *Categoria dei complessi di catene*.

In genere si prendono come indici o tutti i numeri interi o solo gli interi non negativi.

La nostra strategia espositiva consiste nello sviluppare le proprietà formali dei complessi algebrici di catene illustrandoli man mano con gli esempi dei complessi simpliciali.

2.6 Esercizio Dato un morfismo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ fra due complessi di catene, definire il nucleo, immagine e conucleo come complessi di catene. Definire anche la nozione di sottocomplesso e quoziente di un complesso rispetto ad un sottocomplesso, provare il teorema di isomorfismo fra complessi $\mathcal{A}/\text{Ker } f = \text{Im}(f)$.

Dati due morfismi $f, g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ fra due complessi di catene definirne la somma $(f+g)_i := f_i + g_i$ e verificare che è un morfismo di catene.

Un'altra nozione utile è quella di somma diretta di complessi di catene. Dati complessi \mathcal{A}_α il complesso $\bigoplus_\alpha \mathcal{A}_\alpha$ è definito dai gruppi $A_i := \bigoplus_\alpha A_i^\alpha$ con differenziale ∂_i la somma diretta dei differenziali $\partial_{i,\alpha}$.

Sia ora dato un complesso di catene $\mathcal{A} := \dots \xrightarrow{\partial} A_i \xrightarrow{\partial} A_{i-1} \xrightarrow{\partial} A_{i-2} \xrightarrow{\partial} \dots$ poniamo

$$(2.8) \quad \begin{aligned} Z_i(\mathcal{A}) &:= \{a \in A_i \mid \partial a = 0\} \text{ i cicli di dimensione } i. \\ B_i(\mathcal{A}) &:= \{a \in A_i \mid a = \partial b, b \in A_{i+1}\} \text{ i bordi di dimensione } i. \end{aligned}$$

Per definizione di complesso si ha:

$$B_i(\mathcal{A}) \subset Z_i(\mathcal{A}), \forall i.$$

Poniamo

$$(2.9) \quad H_i(\mathcal{A}) := Z_i(\mathcal{A})/B_i(\mathcal{A}) \text{ l'omologia di dimensione } i.$$

Quando non sarà strettamente necessario scriveremo semplicemente Z_i, B_i , senza precisare il complesso di catene di cui si considera l'omologia.

Mettiamo in evidenza alcuni aspetti del linguaggio che si usa:

Due cicli $a, b \in Z_i$ si dicono *omologhi* quando $a - b \in B_i$. Ovvero, i due cicli differiscono per un bordo, o equivalentemente definiscono la medesima classe di omologia.

La nozione di omologia è una delle nozioni centrali della topologia algebrica e della algebra omologica, nel prossimo paragrafo cercheremo di iniziare a dare una idea intuitiva e geometrica del suo significato ma purtroppo, per procedere speditamente, è necessario anche abituarci a molte manipolazioni formali il cui contenuto intuitivo non sempre è evidente.

2.10 Esercizio Provare che la omologia di una somma diretta di complessi è la somma diretta delle corrispondenti omologie.

Se tutti i gruppi $H_i(\mathcal{A})$ sono nulli si dice che il complesso \mathcal{A} è *aciclico* ovvero che \mathcal{A} è una *successione esatta*.

Poiché questa nozione gioca un ruolo essenziale è bene metterla meglio in evidenza.

La nozione di esattezza si può dare per una successione di morfismi $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, una tale successione si dice esatta in B se il nucleo di g coincide con l'immagine di f .¹¹

Una successione lunga di morfismi $\dots A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \dots$ si dice esatta se è esatta in ogni suo punto.

RICAPITOLANDO. Un complesso è una successione esatta se e solo se ha omologia nulla.

Esercizi

$$(1) \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \text{ è esatta (in } A) \text{ se e solo se } f \text{ è iniettivo.}$$

¹¹in particolare $gf = 0$ e siamo in presenza di una parte di un complesso di catene

- (2) $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ è esatta (in B) se e solo se f è suriettivo.
 (3) $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ è esatta in A ed in B se e solo se f è un isomorfismo.
 (4) $0 \rightarrow A \rightarrow 0$ è esatta (in A) se e solo se $A = 0$.
 (5) Sia $A \xrightarrow{f} B \rightarrow C \xrightarrow{g} D$ esatta, g è iniettiva se e solo se f è suriettiva.
 (6) Se $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow C \xrightarrow{g} D$ è esatta e g è iniettiva f è un isomorfismo.
 (7) Se $A \xrightarrow{p} B \rightarrow C \xrightarrow{f} D \rightarrow 0$ è esatta e p è suriettiva f è un isomorfismo.

Un'altra proprietà utile è il

LEMMA DEI CINQUE 2.11. *Dato un diagramma commutativo*

$$(2.12) \quad \begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \cong \downarrow f_1 & & \cong \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \cong \downarrow f_4 & & \cong \downarrow f_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

con le righe esatte, se f_1, f_2, f_4, f_5 sono isomorfismi anche f_3 lo è.

SUGG. Inseguire il diagramma. □

Un caso speciale della successione esatta di omologia (2.21) è il:

LEMMA DEL SERPENTE 2.13. *Dato un diagramma commutativo*

$$(2.14) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con le righe esatte, esiste un morfismo $\delta : Ker f_3 \rightarrow Ker f_1$ che rende esatta la sequenza:

$$0 \rightarrow Ker f_1 \rightarrow Ker f_2 \rightarrow Ker f_3 \xrightarrow{\delta} Coker f_1 \rightarrow Coker f_2 \rightarrow Coker f_3 \rightarrow 0$$

DIM. Esercizio oppure vedere 2.21. □

Il passo successivo è la

2.15 PROPOSIZIONE. *L'omologia $H_i(\mathcal{A})$ è un funtore dalla categoria dei complessi di catene a quella dei gruppi.*

DIM. Se $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ è un morfismo di complessi ed $a \in Z_i(\mathcal{A})$, $b \in A_{i+1}$ si ha $\partial f(a) = f(\partial a) = 0$, $f(\partial b) = \partial f(b)$ quindi $f(Z_i(\mathcal{A})) \subset Z_i(\mathcal{B})$, $f(B_i(\mathcal{A})) \subset B_i(\mathcal{B})$.

Ne risulta indotto un omomorfismo:

$$(2.16) \quad H_i(f) := f_i : H_i(\mathcal{A}) := Z_i(\mathcal{A})/B_i(\mathcal{A}) \rightarrow H_i(\mathcal{B}) := Z_i(\mathcal{B})/B_i(\mathcal{B}).$$

Le proprietà di funtorialità sono immediate e lasciate al lettore.

Provare che, dati due morfismi di catene, f, g si ha $H_i(f + g) = H_i(f) + H_i(g)$.¹²

OMOLOGIA SIMPLICIALE Applichiamo le idee del paragrafo precedente al caso speciale del complesso delle catene simpliciali arrivando ad una delle idee importanti della topologia algebrica.

Ad ogni complesso simpliciale \mathcal{C} abbiamo assegnato un complesso di catene $C_*(\mathcal{C})$, il suo *complesso di catene simpliciali*.

Poiché i complessi simpliciali sono una categoria rispetto ai morfismi simpliciali ed anche i complessi di catene sono una categoria è importante rendere questa costruzione funtoriale.

Dato un morfismo $f : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ di complessi simpliciali, ed un simpleso orientato $s = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in C_n(\mathcal{C}_1)$, dobbiamo definire $f_*(s) \in C_n(\mathcal{C}_2)$.

Se i vertici $f(a_i)$ sono distinti poniamo $f_*(s) := (f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n))$, altrimenti, visto che l'insieme $\{f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ forma un simpleso di dimensione minore di n poniamo $f_*(s) := 0$.

Lasciamo al lettore la semplice verifica che $f_* : C_*(\mathcal{C}_1) \rightarrow C_*(\mathcal{C}_2)$ è un morfismo di catene.

Passiamo ora alla omologia. Dato un complesso simpliciale \mathcal{A} è definita la omologia del complesso $C_*(\mathcal{A})$ delle sue catene orientate.

2.17 DEFINIZIONE. *I gruppi $H_i(C_*(\mathcal{C}))$ di omologia del complesso delle catene simpliciali associato ad un complesso simpliciale \mathcal{C} vengono detti gruppi di **omologia simpliciale** di \mathcal{C} o per abuso di linguaggio della sua realizzazione geometrica $|\mathcal{C}|$.*

Se non vi è confusione scriveremo anche $H_i(\mathcal{C})$, o anche $H_i(|\mathcal{C}|)$, invece di $H_i(C_*(\mathcal{C}))$.

Dato un morfismo $f : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ di complessi simpliciali, il corrispondente morfismo di catene $f_* : C_*(\mathcal{C}_1) \rightarrow C_*(\mathcal{C}_2)$ induce un morfismo nei gruppi di omologia simpliciale.

Per composizione abbiamo dunque costruito dei funtori omologia $H_i(\mathcal{A})$ dalla categoria dei complessi simpliciali alla categoria dei gruppi abeliani.

Il contenuto geometrico di queste nozioni può emergere solo lentamente, intuitivamente il bordo di una catena simpliciale è proprio il suo bordo geometrico (con le necessarie orientazioni) e dunque un ciclo è geometricamente la triangolazione di una porzione *chiusa o senza bordo* dello spazio.

Se un ciclo non è un bordo intuitivamente questo significa che circonda una regione in cui vi è un *buco* ed i gruppi di omologia si devono pensare come misure di *connessione superiore*.

¹²vedremo nel capitolo dedicato all'algebra omologica che la categoria dei complessi di catene è una categoria abeliana, in questo linguaggio questa proprietà di additività si esprime dicendo che i funtori H_k sono *additivi*.

La connessione (per archi) consiste nel poter unire sempre due punti con un arco, in uno spazio connesso per archi due punti sono sempre omologhi. La semplice connessione implica che un ciclo 1-dimensionale è un bordo (cf. cap. 5) e in generale l'idea è che questo si ripeta a dimensioni superiori. Questa discussione dovrebbe chiarirsi nel Cap. 5 con la teoria dei complessi cellulari.

È essenziale, per effettuare i calcoli espliciti, ampliare la costruzione del complesso di catene simpliciali alle coppie.

Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ è un sottocomplesso (simpliciale) il complesso di catene $C_*(\mathcal{A})$ è un sottocomplesso di catene di $C_*(\mathcal{B})$. Il complesso quoziente $C_*(\mathcal{B} - \mathcal{A}) := C_*(\mathcal{B})/C_*(\mathcal{A})$ è un complesso di catene che ha come base i semplici orientati in $\mathcal{B} - \mathcal{A}$, cioè in \mathcal{B} e non in \mathcal{A} .

Il bordo di un tale semplice (nel complesso quoziente) consiste della parte del suo bordo formata dai semplici in $\mathcal{B} - \mathcal{A}$, l'omologia di questo complesso è detta omologia della coppia ed indicata con il simbolo $H_i(\mathcal{B}, \mathcal{A})$.

Usualmente il legame formale fra questi tre complessi viene espresso scrivendo che

$$0 \rightarrow C_*(\mathcal{A}) \rightarrow C_*(\mathcal{B}) \rightarrow C_*(\mathcal{B} - \mathcal{A}) \rightarrow 0$$

è una *successione esatta* di complessi, lasciamo al prossimo paragrafo la formalizzazione di questo concetto e le sue conseguenze sulla omologia.

L'omologia simpliciale non avrebbe una importanza geometrica se non si potesse provare il :

Fatto fondamentale I gruppi di omologia simpliciale sono *invarianti topologici* della realizzazione geometrica di un complesso simpliciale.

Questo teorema è stato a lungo un ostacolo nello sviluppo della Teoria. L'approccio classico alla sua dimostrazione è via il teorema di approssimazione simpliciale. Noi seguiremo l'approccio della omologia singolare, che sviluppiamo nelle prossime sezioni.

Questa ha alcuni vantaggi sull'approccio simpliciale, ad esempio in questo approccio i gruppi di omologia sono funtori sulla categoria degli spazi topologici e delle funzioni continue. Proveremo il teorema di invarianza topologica nel §11.

Calcolare l'omologia simpliciale è piuttosto laborioso, specialmente perchè, dato uno spazio di cui si sappia, per ragioni teoriche, che è triangolabile, non è facile esibire una triangolazione oppure la triangolazione ha un numero molto grande di semplici. Il solo caso facile è il calcolo della omologia 0-dimensionale $H_0(\mathcal{C})$.

2.18 TEOREMA. *Dato un complesso simpliciale \mathcal{C} due vertici a, b sono omologhi se e solo se sono nella stessa componente connessa.*

$H_0(\mathcal{C})$ è un gruppo libero.

Scegliendo un vertice v_i in ogni componente connessa, le classi di omologia $[v_i]$ formano una base di $H_0(\mathcal{C})$.

Il rango di $H_0(\mathcal{C})$ (come gruppo libero) è il numero delle componenti connesse.

DIM. Se a, b sono vertici di un semplice (a, b) allora $b - a$ è un bordo. Se a, b sono nella stessa componente connessa ci sono semplici $s_i := (a_i a_{i+1})$, $i = 1, \dots, k$ con $a = a_1$, $b = a_{k+1}$ e $a - b$ è il bordo di $\sum_{i=1}^k s_i$.

Ne segue che, scelto un punto v_i in ogni componente connessa C_i una base dei cicli sia data dagli elementi $v_i - w$, $w \in C_i - v_i$ al variare di i da questo il teorema segue.

In particolare $H_0(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}$ se e solo se \mathcal{C} è connesso.

Il Teorema appena provato va integrato con il seguente:

2.19 Esercizio Dato un complesso simpliciale \mathcal{C} siano $\mathcal{C}_i|_{i=1, \dots, n}$ le sue componenti connesse.

Provare che $C_*(\mathcal{C}) = \bigoplus_{i=1}^n C_*(\mathcal{C}_i)$ come somma diretta di complessi di catene e che $H_k(\mathcal{C}) = H_k(C_*(\mathcal{C})) = \bigoplus_{i=1}^n H_k(C_*(\mathcal{C}_i)) = \bigoplus_{i=1}^n H_k(\mathcal{C}_i)$.

Per un complesso di catene simpliciali la 0 omologia non è mai nulla, questo è motivo di complicazioni inutili in moltei ragionamenti induttivi, conviene quindi estendere le nozioni date nel modo seguente

Completiamo il complesso delle catene simpliciali ponendo $C_{-1}(\mathcal{C}) := \mathbb{Z}$ e definendo $\partial : C_0(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$ con $\partial(\sum m_i v_i) := \sum m_i$. Si ottiene un nuovo complesso di catene

$$\cdots \rightarrow C_k \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

denotato con $C_*^\#(\mathcal{C})$ e detto complesso *aumentato* di \mathcal{C} .

La sua omologia è detta *omologia ridotta* di \mathcal{C} ed indicata con $H_i^\#(\mathcal{C})$.

Si noti che

$$H_i^\#(\mathcal{C}) = H_i(\mathcal{C}), \quad \forall i > 0$$

per $i = 0$ si ha $H_0^\#(\mathcal{C}) = 0$ se e solo se \mathcal{C} è connesso. In generale si ha una successione esatta

$$0 \rightarrow H_0^\#(\mathcal{C}) \rightarrow H_0(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Se la omologia ridotta di un complesso simpliciale è tutta nulla si dice che il complesso è aciclico.

SUCCESSIONE ESATTA

Siano dati tre complessi $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ e morfismi $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{C} \rightarrow 0$.

Diciamo che tale successione è esatta se le colonne del diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & A_{i+2} & \longrightarrow & A_{i+1} & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & A_{i-1} & \longrightarrow & A_{i-2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & & \\
 (2.20) & \dots & \longrightarrow & B_{i+2} & \longrightarrow & B_{i+1} & \longrightarrow & B_i & \longrightarrow & B_{i-1} & \longrightarrow & B_{i-2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p & & \\
 \dots & \longrightarrow & C_{i+2} & \longrightarrow & C_{i+1} & \longrightarrow & C_i & \longrightarrow & C_{i-1} & \longrightarrow & C_{i-2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

sono tutte esatte.

La definizione è motivata dalla costruzione simpliciale per una coppia

$$0 \rightarrow C_*(\mathcal{A}) \rightarrow C_*(\mathcal{B}) \rightarrow C_*(\mathcal{B} - \mathcal{A}) \rightarrow 0$$

è un tipico esempio di successione esatta di complessi.

Data una tale successione esatta abbiamo, per funtorialità e per ogni i morfismi $H_i(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_i(\mathcal{B}) \xrightarrow{p_*} H_i(\mathcal{C})$ vogliamo definire un morfismo

$$\delta : H_i(\mathcal{C}) \rightarrow H_{i-1}(\mathcal{A})$$

che connetta fra di loro questi pezzi e che per questa ragione viene detto *morfismo di connessione* e per il quale valga il seguente:

2.21 TEOREMA. *La successione lunga*

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(\mathcal{B}) \xrightarrow{p_*} H_{i+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{c} H_i(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_i(\mathcal{B}) \xrightarrow{p_*} H_i(\mathcal{C}) \xrightarrow{c} H_{i-1}(\mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

è esatta.

DIM. Il lettore dovrebbe passo passo immaginare cosa vuol dire la definizione nel caso della successione esatta della coppia in cui tutto ha un significato geometrico.

Prendiamo un ciclo $a \in Z_i(\mathcal{C})$, per la suriettività di p si ha $a = p(b)$ per qualche $b \in B_i$.

Prendiamone il bordo $\partial b \in B_{i-1}$, poichè $p\partial(b) = \partial p(b) = \partial a = 0$ si ha $\partial b = i(c)$ per l'esattezza della colonna in B_{i-1} . Infine $i(\partial c) = \partial i(c) = \partial^2(b) = 0$ da cui $\partial c = 0$ per l'esattezza in A_{i-1} .

Si tratta di provare che la classe di c in $H_{i-1}(\mathcal{A})$ non dipende dalla scelta di b e che se a è un bordo anche c è un bordo, in modo tale che, ponendo

$$\delta([a]) := [c]$$

l'applicazione richiesta δ è ben definita (si vede subito che è un morfismo).

Fatto questo va verificata, in ogni punto, l'esattezza della successione lunga.

Convieni illustrare tutti questi passi sul diagramma, facendo il *diagram chasing*. Ad esempio il calcolo prima fatto si illustra come

$$\begin{array}{ccccc} & & c & \xrightarrow{\partial} & \partial c \\ & & \downarrow i & & \downarrow i \\ b & \xrightarrow{\partial} & \partial b = i(c) & \xrightarrow{\partial} & 0 \\ \downarrow p & & & & \\ a = p(b) & & & & \end{array}$$

Per provare che è ben posta ispezioniamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & c + \partial u \\ & & \downarrow i \\ b + i(u) & \xrightarrow{\partial} & \partial b + \partial(i(u)) = i(c + \partial u) \\ \downarrow p & & \\ a = p(b) & & \end{array}$$

Per provare che $\delta \circ p_* = 0$ basta osservare che se b è un ciclo $\partial b = 0$ per l'esattezza in $H_i(\mathcal{C})$ se dalla costruzione data $c = \partial f$ è un bordo si ha

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\partial} & \partial f = c \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ b & \xrightarrow{\partial} & \partial b = i(\partial f) \\ \downarrow p & & \\ a = p(b - i(f)) & & \end{array}$$

da cui la classe di a proviene dalla classe di $b - i(f)$ che è un ciclo. Per completare la dimostrazione del teorema bisogna finire le verifiche della esattezza in altri 2 punti che lasciamo al lettore. \square

Ne deduciamo pertanto il corollario: Dato un complesso simpliciale \mathcal{C} ed un sottocomplesso \mathcal{A} abbiamo una **successione esatta lunga di omologia della coppia**

$$(2.22) \quad \dots \rightarrow H_i(\mathcal{A}) \rightarrow H_i(\mathcal{C}) \rightarrow H_i(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow H_{i-1}(\mathcal{A}) \rightarrow H_{i-1}(\mathcal{C}) \rightarrow H_{i-1}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

2.23 Esercizio Sia data una successione esatta di complessi di catene $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$.

Se \mathcal{A} è aciclico si ha $H_i(\mathcal{B}) = H_i(\mathcal{C})$ per ogni i .

Se \mathcal{C} è aciclico si ha $H_i(\mathcal{B}) = H_i(\mathcal{A})$ per ogni i .

Se \mathcal{B} è aciclico si ha $H_i(\mathcal{C}) = H_{i-1}(\mathcal{A})$ per ogni i .

Osserviamo infine la funtorialità del morfismo di connessione.

Date due successioni esatte di complessi

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{C} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathcal{A}' \xrightarrow{i'} \mathcal{B}' \xrightarrow{p'} \mathcal{C}' \rightarrow 0$$

un morfismo fra tali successioni esatte è un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{i} & \mathcal{B} & \xrightarrow{p} & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \xrightarrow{i'} & \mathcal{B}' & \xrightarrow{p'} & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in cui tutti i morfismi dati sono morfismi di complessi.

In questo caso consideriamo i due morfismi di connessione $H_i(\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(\mathcal{A})$ e $H_i(\mathcal{C}') \xrightarrow{\delta'} H_{i-1}(\mathcal{A}')$ si verifica facilmente che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_i(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\delta} & H_{i-1}(\mathcal{A}) \\ \downarrow h_* & & \downarrow f_* \\ H_i(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\delta'} & H_{i-1}(\mathcal{A}') \end{array}$$

è commutativo da cui un grande diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} \longrightarrow & H_{i+1}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & H_i(\mathcal{A}) & \longrightarrow & H_i(\mathcal{B}) & \longrightarrow & H_i(\mathcal{C}) & \longrightarrow & H_{i-1}(\mathcal{A}) \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \longrightarrow & H_{i+1}(\mathcal{B}') & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathcal{C}') & \longrightarrow & H_i(\mathcal{A}') & \longrightarrow & H_i(\mathcal{B}') & \longrightarrow & H_i(\mathcal{C}') & \longrightarrow & H_{i-1}(\mathcal{A}') \dots \end{array}$$

delle due successioni esatte lunghe di omologia.

3 Qualche calcolo in omologia simpliciale

Vogliamo iniziare a fare qualche calcolo di omologia simpliciale. Premettiamo un passo formale.

3.1 DEFINIZIONE. *Dato un complesso di catene C_i una famiglia di applicazioni $s_i : C_i \rightarrow C_{i+1}$, per ogni i , per cui $\partial_{i+1}s_i + s_{i-1}\partial_i = 1_i$ viene detta una **omotopia contraente** per il complesso.*

3.2 LEMMA. *Se esiste una omotopia contraente allora il complesso ha tutta l'omologia nulla ovvero è aciclico.*

DIM. La formula implica immediatamente che, se $x \in C_i(\mathcal{C})$ è un ciclo allora $x = (\partial_{i+1}s_i + s_{i-1}\partial_i)x = \partial_{i+1}s_ix$ quindi x è anche un bordo e la omologia è sempre nulla. \square

3.3 Esercizio Dato un complesso in cui i gruppi C_i sono tutti gruppi abeliani liberi allora il complesso è aciclico se e solo se possiede una omotopia contraente.

La controparte geometrica di questa nozione viene dalla seguente:

3.4 DEFINIZIONE. *Un complesso simpliciale \mathcal{C} si dice un **cono** su un suo vertice v_0 se soddisfa la seguente proprietà:*

Dato comunque un simpleso A di \mathcal{C} si ha che $A \cup \{v_0\}$ è un simpleso di \mathcal{C} .

3.5 Esercizio Un complesso simpliciale è un cono su ciascuno dei suoi vertici se e solo se è un simpleso.

3.6 PROPOSIZIONE. *Se \mathcal{C} è un cono su un suo vertice $H_i(\mathcal{C}) = 0, \forall i > 0, H_0(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}$ ovvero $H_i^\#(\mathcal{C}) = 0, \forall i$.*

DIM. Basta provare che la omologia ridotta è sempre 0.

Costruiamo dunque una omotopia contraente s per il complesso di catene aumentato:

Per $1 \in C_{-1}$ poniamo $s(1) := -(v_0)$. Dato un simpleso orientato x se v_0 è uno dei vertici di x poniamo $sx := 0$ altrimenti poniamo $sx := v_0x$.

Verifichiamo la proprietà della omotopia contraente, se $x = v_0t$ si ha

$$(\partial s + s\partial)x = s\partial x = s(t - v_0\partial t) = v_0t = x$$

altrimenti

$$(\partial s + s\partial)x = \partial v_0x + v_0\partial x = x - v_0\partial x + v_0\partial x = x$$

COROLLARIO. *In particolare per il simplesso standard Δ_n si ha $H_*^\#(\Delta_n) = 0$.*

Vogliamo ora discutere alcune costruzioni sui complessi simpliciali di natura combinatoria. La situazione che si incontra è la seguente. Alcune semplici costruzioni geometriche hanno una controparte combinatoria complicata, mentre alcune semplici costruzioni combinatorie hanno una interpretazione geometrica non evidente. Ma con un poco di esperienza si vede che in effetti si può passare da un linguaggio all'altro.

La prima costruzione è quella di *unione* $\mathcal{A} \amalg \mathcal{B}$ di due complessi simpliciali $\mathcal{A} := \{(\mathcal{V}, \mathcal{S}); \mathcal{B} := \{\mathcal{W}, \mathcal{T}\}$.¹³

Si prende come insieme dei vertici l'unione disgiunta $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$, come insieme dei simplessi si prende $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$. È evidente che la realizzazione geometrica della unione è l'unione disgiunta delle due realizzazioni.

Per quanto riguarda il complesso di catene simpliciale e l'omologia evidentemente

$$C_k(\mathcal{A} \amalg \mathcal{B}) = C_k(\mathcal{A}) \oplus C_k(\mathcal{B})$$

$$H_k(\mathcal{A} \amalg \mathcal{B}) = H_k(\mathcal{A}) \oplus H_k(\mathcal{B})$$

L'incollamento. Siano dati due sottocomplessi simpliciali \mathcal{A} , \mathcal{B} di un complesso simpliciale \mathcal{K} e supponiamo che $\mathcal{K} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, (come insieme di simplessi) poniamo inoltre $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ un sottocomplesso di \mathcal{A}, \mathcal{B} . Pensiamo che \mathcal{K} si ottenga *incollando* \mathcal{A}, \mathcal{B} lungo \mathcal{C} .

Questa costruzione si può anche fare astrattamente.

Siano dati tre complessi simpliciali \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} ed un isomorfismo di \mathcal{C} con un sottocomplesso \mathcal{C}_1 di \mathcal{A} ed un isomorfismo di \mathcal{C} con un sottocomplesso \mathcal{C}_2 di \mathcal{B} , allora possiamo costruire una unione dei due complessi \mathcal{A} , \mathcal{B} lungo \mathcal{C} che denoteremo con

$$\mathcal{A} \amalg_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$$

i vertici di tale complesso si ottengono attaccando i vertici di \mathcal{A} con quelli di \mathcal{B} lungo i vertici di \mathcal{C} ed i simplessi sono semplicemente quelli di \mathcal{A} e quelli di \mathcal{B} (la compatibilità è assicurata dalla identificazione dei due sottocomplessi), per costruzione \mathcal{C} viene identificato alla intersezione di \mathcal{A} e \mathcal{B} .

È un facile esercizio provare che lo spazio sostegno $|\mathcal{A} \amalg_{\mathcal{C}} \mathcal{B}|$ si ottiene incollando i due spazi sostegno $|\mathcal{A}|$, $|\mathcal{B}|$ lungo $|\mathcal{C}|$.

Per quanto riguarda i corrispondenti complessi di catene simpliciali e le omologie abbiamo una importante costruzione, la *successione esatta di Mayer Vietoris*.

¹³Il simbolo \amalg si usa per evidenziare formalmente che la costruzione è quella insiemistica di unione disgiunta. ovvero prima di fare l'unione di due insiemi se ne fanno due copie disgiunte!

Iniziamo osservando che, se X è un insieme e \mathbb{Z}^X indica il gruppo libero con base X allora posto $X = A \cup B$ abbiamo una successione esatta corta di gruppi liberi:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{A \cap B} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}^A \oplus \mathbb{Z}^B \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^{A \cup B} \rightarrow 0$$

dove sugli elementi delle basi abbiamo

$$x \in A \cap B, i(x) = (x, -x); \quad x \in A, y \in B \quad p((x, y)) = x + y.$$

Applichiamo questa idea ai semplici orientati. Per ogni k prendiamo per A, B gli insiemi dei semplici orientati dei complessi \mathcal{A}, \mathcal{B} evidentemente $X = A \cup B$ è l'insieme dei semplici orientati di $\mathcal{K} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ mentre $A \cap B$ è quello di $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

Dalla osservazione precedente otteniamo, per ogni k , una successione esatta di catene $0 \rightarrow C_k(\mathcal{C}) \rightarrow C_k(\mathcal{A}) \oplus C_k(\mathcal{B}) \rightarrow C_k(\mathcal{K}) \rightarrow 0$.

Per definizione $C_*(\mathcal{A}) \oplus C_*(\mathcal{B}) \rightarrow C_*(\mathcal{K})$ è costruito mandando i semplici orientati di \mathcal{A} e di \mathcal{B} nei corrispondenti semplici di \mathcal{K} mentre il nucleo di questo morfismo si identifica con $C_*(\mathcal{C})$ che si immerge in $C_*(\mathcal{A}) \oplus C_*(\mathcal{B})$ mandando un semplice orientato a in $(a, -a)$.

Si verifica immediatamente la compatibilità con il bordo. Si ha quindi una successione esatta di complessi:

$$(3.7) \quad 0 \rightarrow C_*(\mathcal{C}) \rightarrow C_*(\mathcal{A}) \oplus C_*(\mathcal{B}) \rightarrow C_*(\mathcal{K}) \rightarrow 0$$

o esplicitamente

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & C_{i+2}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) & \xrightarrow{i} & C_{i+2}(\mathcal{A}) \oplus C_{i+2}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{p} & C_{i+2}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & C_{i+1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) & \xrightarrow{i} & C_{i+1}(\mathcal{A}) \oplus C_{i+1}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{p} & C_{i+1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(3.8) & \longrightarrow & C_i(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) & \xrightarrow{i} & C_i(\mathcal{A}) \oplus C_i(\mathcal{B}) & \xrightarrow{p} & C_i(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & C_{i-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) & \xrightarrow{i} & C_{i-1}(\mathcal{A}) \oplus C_{i-1}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{p} & C_{i-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & C_{i-2}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) & \xrightarrow{i} & C_{i-2}(\mathcal{A}) \oplus C_{i-2}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{p} & C_{i-2}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

In modo identico si procede per i complessi aumentati ottenendo una successione esatta $0 \rightarrow C_*^\#(\mathcal{C}) \rightarrow C_*^\#(\mathcal{A}) \oplus C_*^\#(\mathcal{B}) \rightarrow C_*(\mathcal{K}) \rightarrow 0$.

Da questa successione esatta di complessi si deduce quindi, utilizzando il teorema sulla successione esatta lunga, una delle successioni esatte importanti per il calcolo della omologia, la successione esatta di Mayer Vietoris.

$$(3.10) \quad \begin{array}{ccccccc}
\cdots & \rightarrow & H_i(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) & \rightarrow & H_i(\mathcal{A}) \oplus H_i(\mathcal{B}) & \rightarrow & H_i(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \rightarrow \\
& & \rightarrow & H_{i-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) & \rightarrow & H_{i-1}(\mathcal{A}) \oplus H_{i-1}(\mathcal{B}) & \rightarrow & H_{i-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \rightarrow \cdots
\end{array}$$

Dalle osservazioni precedenti segue che vi è una analoga successione esatta per la omologia ridotta.

L'uso che si fa della successione di Mayer Vietoris è quello di calcolare l'omologia di uno spazio a partire da quella di suoi *pezzi* più semplici, tenendo conto della geometria di come sono messi insieme.

Un primo esempio importante è il seguente che si verifica immediatamente a partire dalle definizioni e dalle proprietà delle successioni esatte.

3.11 PROPOSIZIONE. *Siano dati \mathcal{A}, \mathcal{B} due sottocomplessi di un complesso simpliciale:*

(1) *Se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono aciclici (ad esempio due coni) si ha*

$$H_i^\#(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = H_{i+1}^\#(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}), \quad \forall i.$$

(2) *Se $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è aciclico si ha:*

$$H_i^\#(\mathcal{A}) \oplus H_i^\#(\mathcal{B}) = H_i^\#(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}), \quad \forall i.$$

(3) *Se $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è aciclico si ha:*

$$H_i^\#(\mathcal{A}) \oplus H_i^\#(\mathcal{B}) = H_i^\#(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}), \quad \forall i.$$

(4) *Se \mathcal{A} e $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ sono aciclici si ha:*

$$H_i^\#(\mathcal{B}) = H_i^\#(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}), \quad \forall i.$$

Ora siamo pronti per il primo calcolo non banale, quello della omologia della sfera, per ora non avendo ancora un teorema di invarianza topologica prendiamo come modello della sfera $S_n := \dot{\Delta}_{n+1}$, il bordo del simpleso standard $n + 1$ dimensionale.

Indichiamo per abuso di notazione con $\Delta_{n+1} := (0, 1, \dots, n + 1)$, il corrispondente simpleso orientato che induce un ciclo nella coppia Δ_{n+1}, S^n mentre il suo bordo $\partial(\Delta_{n+1})$ è un ciclo in S^n .

3.12 TEOREMA.

$$\begin{aligned} H_i^\#(\dot{\Delta}_{n+1}) &= 0, & i \neq n; & & H_n^\#(\dot{\Delta}_{n+1}) &= \mathbb{Z} \\ H_i(\Delta_{n+1}, \dot{\Delta}_{n+1}) &= 0, & \forall i \neq n + 1, & & H_{n+1}(\Delta_{n+1}, \dot{\Delta}_{n+1}) &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Un generatore di $H_n^\#(\dot{\Delta}_{n+1})$ è dato dalla classe di $\partial(\Delta_{n+1})$.

Un generatore di $H_{n+1}(\Delta_{n+1}, \dot{\Delta}_{n+1})$ è dato dal ciclo (Δ_{n+1}) .

DIM. Per $n = 0$ questo è un ovvio calcolo, il complesso aumentato di $S^0 = \{a, b\}$ è

$$\dots 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

In generale prendiamo i due sottocomplessi di $\dot{\Delta}_{n+1}$ formati rispettivamente da Δ_n e da tutti i simplessi distinti da $(0, 1, \dots, n - 1)$ ovvero il join $\dot{\Delta}_n * n$.

I due complessi sono entrambi coni e la loro intersezione è $\dot{\Delta}_n$.

Applichiamo la proposizione precedente ed otteniamo gli isomorfismi

$$(3.13) \quad H_i^\#(\dot{\Delta}_{n+1}) = H_{i-1}^\#(\dot{\Delta}_n).$$

Esplicitamente il ciclo $\partial(0, 1, \dots, n+1) = (\partial(1, \dots, n+1), n+1) + (-1)^n(0, 1, \dots, n)$ proviene dalla coppia

$$((-1)^n(0, 1, \dots, n), (\partial(0, 1, \dots, n), n+1)) \in C_n(\Delta_n) \oplus C_n(\dot{\Delta}_n * n).$$

Seguiamo la costruzione dell'omomorfismo di connessione, applichiamo quindi il bordo a questa coppia ottenendo

$$((-1)^n \partial(0, 1, \dots, n), \partial(\partial(0, 1, \dots, n), n+1)) = ((-1)^n \partial(0, 1, \dots, n), (-1)^{n-1}(\partial(0, 1, \dots, n)))$$

che è immagine nel morfismo $C_n(\dot{\Delta}_n) \rightarrow C_n(\Delta_n) \oplus C_n(\dot{\Delta}_n * n)$ della classe $(-1)^n \partial(0, 1, \dots, n)$. Si conclude per induzione.

Per la coppia, usando il fatto che Δ_{n+1} è un cono si ha che $H_{n+1}(\Delta_{n+1}, \dot{\Delta}_{n+1}) = H_n^\#(\dot{\Delta}_{n+1})$ tramite l'omomorfismo di connessione, ma è immediato che la classe del ciclo dato da $(\Delta_{n+1}) \in C_{n+1}(\Delta_{n+1}, \dot{\Delta}_{n+1})$ va, tramite l'omomorfismo di connessione, nella classe di $\partial(\Delta_{n+1})$.

Possiamo usare la precedente proposizione per molti altri calcoli che in gran parte lasciamo come esercizi.

Mettiamoci nelle stesse notazioni \mathcal{A}, \mathcal{B} sottocomplessi di un complesso dato. L'obiettivo è di calcolare l'omologia di $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$

Supponiamo che \mathcal{A} sia un semplice e $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ sia un cono, pertanto entrambi aciclici. Abbiamo visto che $H_i^\#(\mathcal{B}) = H_i^\#(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, $\forall i$.

\mathcal{B} si ottiene dal complesso unione *cancellando* il semplice \mathcal{A} ed ha la stessa omologia dell'unione. Quindi questo è un metodo di semplificazione (togliere un opportuno semplice) che non cambia l'omologia. Si noti però che l'ipotesi che $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ sia un cono è assolutamente cruciale.

Si può usare lo stesso metodo anche per aggiungere un semplice e poi magari semplificarne un altro, questo da luogo ad una relazione di equivalenza che diremo *semplice* fra complessi simpliciali che non muta l'omologia.

Ad esempio prendiamo un *segmento* S triangolato si ha che, semplificando un semplice alla volta $H_i^\#(S) = 0$, $\forall i$.

Figura 10

Quando avremo introdotto la omologia singolare e studiato le sue proprietà il calcolo della omologia verrà fatto in modo più geometrico usando la invarianza topologica ed omotopica, ma al momento il lettore può esercitarsi con le idee che abbiamo dato:

3.14 Esercizio Sia dato un complesso simpliciale nel piano, provare che, mediante l'equivalenza semplice si può ridurre ad un insieme poligonali, se poi si usano anche suddivisioni si arriva a *bouquets* di poligonali chiuse:

Figura 11

Dato un poligono P di vertici a_0, a_1, \dots, a_n e semplici $(a_i, a_{i+1}), i = 0, \dots, n \bmod n, n+1 = 0$ applichiamo la successione di Mayer Vietoris usando come sottocomplessi un segmento ed il suo *complemento*, entrambi aciclici. L'intersezione è formata da 2 punti (siano $\{a, b\}$) la cui omologia ridotta è solo $H_0^\#(\{a, b\}) = \mathbb{Z}$.

Quindi $H_i^\#(P) = 0, \forall i \neq 1$ mentre $H_1(P) = \mathbb{Z}$ con generatore il ciclo $[P] := \sum_{i=0}^n (a_i, a_{i+1})$.

Consideriamo la coppia Q, P dove Q è il quadrato e P il suo bordo, segue da quanto visto e dalla successione della coppia che $H_i(Q, P) = 0, \forall i \neq 2$ mentre

$H_2(Q, P) = \mathbb{Z}$ con generatore la somma di tutti i triangoli equiorientati $(abd) + (bcd)$. Questo è un ciclo relativo che. come catena in Q ha bordo il ciclo $[P] = (ab) + (bc) + (cd) + (da)$ generatore di $H_1(P)$.

Figura 12

Una simile analisi ci permette di calcolare l'omologia delle superfici viste come un quadrato con alcune identificazioni al bordo. Nella figura seguente descriviamo simbolicamente il *toro* cioè la superficie della ciambella. Si ottiene da un quadrato incollando i

lati opposti secondo l'orientamento indicato simbolicamente da $xyx^{-1}y^{-1}$, cioè ad esempio il lato ab si identifica con dc nell'ordine dato. Per triangolare il toro bisogna partire da una triangolazione abbastanza fitta del quadrato in modo tale che anche dopo fatte le identificazioni la triangolazione sussista.

Figura 13

Si possono anche considerare le identificazioni $xyx^{-1}y$. $xyxy$ che creano due superfici non orientate, la prima si identifica alla *bottiglia di Klein* e la seconda al *piano proiettivo*.

Si noti però che, se si vuole costruire fisicamente la superficie con un foglio di carta questo riesce solo nel caso del toro, la ragione non banale che spiegheremo sempre con le teorie omologiche, è che né la bottiglia di Klein né il piano proiettivo si possono immergere nello spazio tridimensionale (ma si possono immergere in \mathbb{R}^4).

3.15 Esercizio L'omologia ridotta della bottiglia di Klein e del piano proiettivo è 0 tranne che in dimensione 1.

Per la bottiglia di Klein K si ha $H_1^\#(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(2)$, per il piano proiettivo P si ha $H_1^\#(P) = \mathbb{Z}/(2)$.

Torniamo al calcolo della omologia. Prima di tutto occorre calcolare l'omologia di un *bouquet* di poligoni P_i , $i = 1, \dots, k$. Questo è il complesso simpliciale $\vee_{i=1, \dots, k} P_i$, che si ottiene prendendo un vertice di ogni poligono ed attaccando tutti i poligoni per tali vertici e.g.:

Dalla successione di Mayer Vietoris segue facilmente che $H_i^\#(\vee_i P_i) = 0$, $\forall i \neq 1$ mentre $H_1(\vee_i P_i) = \oplus_{i=1, \dots, k} \mathbb{Z}[P_i]$ (con generatori i cicli $[P_i]$).

La analisi fatta per il toro etc. si estende in realtà ad ogni superficie compatta, con o senza bordo.

Tali superfici sono triangolabili (cfr.) ed ammettono infatti una completa classificazione e descrizione esplicita. Rimandando a () per i dettagli.

Sia dunque Σ una superficie compatta e triangolata da un complesso simpliciale K .

La prima cosa che va provata è che K è formato da semplici di dimensione al più 2, che ogni vertice è contenuto in almeno un semplice di dimensione 2 e che in effetti ogni 1-simplesso è contenuto in 2 semplici bidimensionali se non è nel bordo ed altrimenti in un solo semplice bidimensionale.

Il secondo passo consiste nel considerare che, invece di pensare alla superficie come ottenuta attaccando prima gli 1 semplici ai vertici e poi i due semplici si può pensare di attaccare uno dopo l'altro i due semplici ma ad ogni passo attaccare solo un lato del nuovo due semplice al poligono già costruito riservandosi di effettuare tutte le ulteriori identificazioni solo alla fine di questa procedura. Si arriva in tal modo ad un poligono con un certo numero N di lati, questi lati vanno ora attaccati a due a due secondo una precisa regola. Questa regola viene espressa, come nel caso delle superfici già viste, da una parola di N lettere corrispondenti nell'ordine ai lati, dove due lati che si devono incollare vengono indicati con la medesima lettera e con un esponente -1 nel caso in cui le orientazioni (indotte percorrendo in senso antiorario il bordo del poligono) non coincidano nell'incollamento.

La regola che si ottiene si può modificare *tagliando e riincollando* come nell'esempio seguente $abca^{-1}b^{-1}$ e $cbxb^{-1}x^{-1}$ sono le due parole. La seconda si ottiene dalla prima formalmente con la regola $abca^{-1}b^{-1} = abxx^{-1}ca^{-1}b^{-1} = x^{-1}ca^{-1}abxb^{-1} = x^{-1}cbxb^{-1} = cbxb^{-1}x^{-1}$

Figura 14

Il Teorema afferma che con una sequenza finita di manipolazioni di questo tipo si arriva ad una legge di incollamento del tipo

$$x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \dots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}z_1z_1z_2z_2 \dots z_kz_k$$

nel caso senza bordo e invece con ulteriori variabili nel caso generale.

La superficie è orientabile se e solo se $k = 0$.

Indichiamo con P il poligono B il suo bordo, Σ la superficie e A l'immagine del bordo in Σ . Triangolando il poligono in modo tale che si abbia ancora una triangolazione dopo fatte le identificazioni, si associa in modo naturale ad ogni lato x del bordo un ciclo $[x]$ nella superficie.

Per costruzione i semplici di $P - B$ sono identici a quelli di $\Sigma - A$ e quindi l' H_1 di A è libero sulle classi $[x_i]$, $[y_i]$, $[z_i]$ e l'immagine del ciclo fondamentale di $H_2(\Sigma, A)$ è $2 \sum_i [z_i]$.

Se ne deduce

$$\begin{cases} H_1(\Sigma) = \mathbb{Z}^{2g} & \text{se } k = 0 \\ H_1(\Sigma) = \mathbb{Z}^{2g+k-1} + \mathbb{Z}/(2) & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

(controllare!!!!)

Infine per $H_2(\Sigma)$ si vede facilmente che, se $k = 0$ la somma dei triangoli di Q equiorientati è un ciclo in Σ e genera $H_2(\Sigma)$, la superficie è orientata.

Se $k > 0$ $H_2(\Sigma) = 0$ e la superficie non è orientabile.

COSTRUZIONI NOTEVOLI Ora iniziamo alcune costruzioni simpliciali importanti che hanno una controparte topologica.

Il Join La prima nuova costruzione notevole e suggerita proprio dalla struttura simpliciale, è quella di *join* $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ di due complessi simpliciali \mathcal{A}, \mathcal{B} .

Si suppone che i semplici dei due complessi siano disgiunti e si prendono come semplici di $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ le unioni $A \cup B$ dove A è un semplice in \mathcal{A} e B un semplice in \mathcal{B} .¹⁴

Dati due semplici orientati $u := (a_0, \dots, a_m), v := (b_0, \dots, b_n)$ di dimensioni m, n in $\mathcal{A}; \mathcal{B}$ indicheremo con $u * v := (a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n)$ la unione con l'orientamento indotto, (è un semplice di dimensione $m + n + 1$).

Passiamo ora al complesso di catene del Join e concentriamoci sulla coppia $\mathcal{A} * \mathcal{B} - (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ che ha come base i semplici $u * v$.

Dalla formula per il bordo di un semplice segue immediatamente che

$$(3.16) \quad \partial(u * v) = \partial(u) * v + (-1)^{m+1} u * \partial(v)$$

Vedremo come questa formula sia legata alla nozione di *prodotto tensoriale* di complessi.

Dal punto di vista geometrico il join si descrive a vari livelli di generalità. In 1.1 Definizione 2 due semplici $X := (v_0, \dots, v_k), Y := (w_0, \dots, w_h)$ di \mathbb{R}^n si dicono congiungibili se i punti $(v_0, \dots, v_k, w_0, \dots, w_h)$ sono indipendenti. In questo caso il join $X \star Y$ è il semplice $(v_0, \dots, v_k, w_0, \dots, w_h)$.

3.17 DEFINIZIONE. *Due complessi simpliciali \mathcal{A}, \mathcal{B} in \mathbb{R}^n si dicono congiungibili se ogni semplice A di \mathcal{A} è congiungibile ad ogni semplice B di \mathcal{B} ed i semplici $A * B$ formano un complesso simpliciale.*

Si osservi che la definizione di congiungibilità è stata data in modo da assicurare che il complesso simpliciale formato dai semplici $A * B$ è una realizzazione geometrica del join degli scheletri di \mathcal{A}, \mathcal{B} .

¹⁴Per convenzione ammettiamo anche che uno dei due semplici possa essere vuoto.

In effetti la congiungibilità è una condizione geometrica sui sostegni dei complessi, per spiegarlo prima di tutto supponiamo che $X, Y \subset \mathbb{R}^N$ siano due spazi topologici contenuti nello spazio \mathbb{R}^N , abbiamo una evidente applicazione di $F : X \times Y \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ data da $F(x, y, t) := tx + (1 - t)y$.

Evidentemente questa applicazione è costante sulle classi della relazione di equivalenza (R.)

$$(x_1, y, 0) \cong (x_2, y, 0), \forall y \in Y, \forall x_1, x_2 \in X; \quad (x, y_1, 1) \cong (x, y_2, 1), \forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y$$

I due insiemi X, Y sono congiungibili se in effetti viceversa:

$$F(x, y, t) = F(x', y', t') \iff (x, y, t) \cong (x', y', t').$$

Questo suggerisce di costruire in generale, dati due spazi X, Y , uno spazio topologico $X * Y$ (Join di X ed Y) come quoziente di $X \times Y \times I$ modulo la relazione di equivalenza R .

Per ogni coppia $X, Y \subset \mathbb{R}^N$ si ha che la applicazione F prima definita si fattorizza $F : X \times Y \times [0, 1] \rightarrow X * Y \xrightarrow{\overline{F}} \mathbb{R}^N$.

In generale non possiamo dire che l'immagine di F sia omeomorfa al join, in quanto, \overline{F} non è necessariamente iniettiva.

Se \overline{F} è un omeomorfismo diremo che X ed Y sono *congiungibili* in \mathbb{R}^N .

3.18 PROPOSIZIONE. *La congiungibilità di due complessi simpliciali \mathcal{A}, \mathcal{B} data dalla definizione precedente è equivalente alla congiungibilità geometrica dei loro sostegni $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|$.*

Esempio In $\mathbb{R}^{n+m+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ prendiamo $X := \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}^n\}$, $Y := \{(0, 1, y), y \in \mathbb{R}^m\}$. X ed Y sono congiungibili.

OSSERVAZIONE. Da un punto di vista topologico, partiamo dalla coppia $X * Y, X \cup Y$ e identifichiamo $X \cup Y$ ad un punto. Si ha lo stesso spazio che si ottiene da $X \times Y \times I$ identificando le due basi $X \times Y \times \{0\} \cup X \times Y \times \{1\}$ ad un punto.

Dalle osservazioni precedenti dovrebbe essere chiaro che formalmente possiamo indicare il punto del join associato alla terna x, y, t con l'espressione $tx + (1 - t)y$.

La costruzione del join è associativa

$$(3.19) \quad (X * Y) * Z = X * (Y * Z)$$

questo è immediato per i complessi simpliciali ed in generale segue dalla semplice identità

$$s(tx + (1 - t)y) + (1 - s)z = stx + (1 - st)\left(\frac{s(1 - t)}{1 - st}y + \frac{1 - s}{1 - st}z\right)$$

purché ci si convinca che questa funzione si estende per continuità ad $s = t = 1$.

3.20 Esercizio Dati n insiemi X_i in \mathbb{R}^m si definisca per essi la proprietà di essere congiungibili e si descriva $X_1 * X_2 * \dots * X_n$.

SUGG. Si considerino i punti $\sum_{i=1}^n t_i x_i$ con $t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$ e con $x_i \in X_i$.

Due casi particolari. Si possono trattare sia simplicialmente che topologicamente
Il cono Per uno spazio topologico X il cono $C(X)$ è definito come il join con uno spazio ridotto ad un punto $C(X) := v * X$.

Per un complesso simpliciale si procede nel medesimo modo. Si prende un complesso simpliciale Sia $\mathcal{B} := \{v_0\}$ con un unico vertice. Il join di $\{v_0\}$ con \mathcal{A} è detto *cono* su \mathcal{A} ed indicato con $C(\mathcal{A})$. I suoi simplessi sono A i simplessi di $a \in \mathcal{A}$ i loro coni $v_0 * a$ ed il *vertice* v_0 .

Chiaramente $C(\mathcal{A})$ è un cono di vertice v_0 secondo la definizione data in 5.4. e la realizzazione geometrica di $C(\mathcal{A})$ è il cono nel senso topologico della realizzazione geometrica di \mathcal{A} .

La sospensione La sfera S^0 è per definizione il complesso 0-dimensionale di vertici v_0, v_1 . Il join di S^0 con X è detto *sospensione* di X ed indicato $S(X) := S^0 * X$. Questa costruzione si può fare come prima o topologica o simpliciale.

Si verifica immediatamente che $S(X)$ è unione dei due coni $v_0 * X$, $v_1 * X$ su X attaccando le due basi isomorfe ad X . Dalla Proposizione 5.4 deduciamo

3.21 PROPOSIZIONE (ISOMORFISMO DI SOSPENSIONE). $H_i^\#(X) = H_{i+1}^\#S(X)$, $\forall i$.

Figura 15

3.22 Esercizio Esplicitare l'isomorfismo di sospensione per i complessi in figura.

Definiamo $S(S^{n-1}) = S^n$, si verifica facilmente che S^n è omeomorfa alla n -sfera e vedremo che come poliedro è equivalente al bordo del semplice Δ_{n+1} .

Inoltre se ripetiamo la costruzione di sospensione ed utilizziamo la associatività del join otteniamo

$$(3.23) \quad S^k(X) = S^{k-1} * X.$$

Se X è la realizzazione geometrica di un complesso \mathcal{A} i simplessi della sospensione sono, oltre ai simplessi di \mathcal{A} ed ai 2 vertici coni $v_0 * a$, $v_1 * a$ dei simplessi di $a \in \mathcal{A}$.

$\partial(v_0 * a - v_1 * b) = -v_0 * \partial(a) + v_1 * \partial(b)$ e quindi le catene del tipo $v_0 * a - v_1 * b$ sono un sottocomplesso C' la cui omologia in grado $i+1$ si vede facilmente coincide con l'omologia di \mathcal{A} in grado i . Il quoziente del complesso di $S(\mathcal{A})$ modulo questo sottocomplesso C' identifica i punti v_0 e v_1 e quindi risulta il complesso del cono modulo $v_0 = 0$, che ha omologia tutta nulla, veremo in seguito (successione esatta lunga) che questo implica che l'omologia di C' e quella di $S(\mathcal{A})$ coincidono. Quindi $H_i(S(\mathcal{A})) = H_{i-1}(\mathcal{A})$, che si chiama isomorfismo di sospensione.

Il prodotto Al contrario del Join la costruzione di prodotto di due complessi simpliciali è più artificiosa, ed in effetti la costruzione usuale passa attraverso un ordinamento dei vertici. Il punto è il seguente:

3.24 TEOREMA. *Dati due semplici (a_0, \dots, a_k) , (b_0, \dots, b_h) possiamo triangolare il prodotto $(a_0, \dots, a_k) \times (b_0, \dots, b_h)$ con i semplici*

$$((a_{i_0}, b_{j_0}), \dots, (a_{i_s}, b_{j_s}))$$

dove $i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s$, $j_0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s$

DIM. Pensiamo il prodotto nel prodotto di due spazi euclidei, preso un punto

$(\sum_i t_i a_i, \sum_j u_j b_j) | \sum t_i = \sum u_j = 1$ consideriamo i $k+1 + h+1$ numeri $\alpha_m := \sum_{i=0}^m t_i$, $m = 0, \dots, k$; $\beta_n = \sum_{j=0}^n u_j$, $n = \{0, \dots, h\}$ (non necessariamente distinti) che mettiamo insieme in una unica successione non decrescente $c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_{h+k+1}$.

Ora per ogni $m = 0, \dots, h+k+1$ definiamo una coppia di numeri $i(m), j(m)$ dove $i(m)$ è il numero dei c_i , $i < m$ che provengono dalla lista degli α mentre $j(m)$ è il numero dei c_i , $i < m$ che provengono dalla lista dei β . Definiamo inoltre $v_i := c_i - c_{i-1}$, ($c_{-1} = 0$), chiaramente

$$v_i \geq 0, \quad \sum v_i = c_{h+k+1} = 1, \quad i(m) \leq i(m+1), \quad j(m) \leq j(m+1)$$

mostriamo che

$$(3.25) \quad ((a_{i_0}, b_{j_0}), \dots, (a_{i_s}, b_{j_s})) = \sum v_m (a_{i(m)}, b_{j(m)})$$

infatti $\sum v_m (a_{i(m)}, b_{j(m)}) = (\sum v_m a_{i(m)}, \sum v_m b_{j(m)})$ e dobbiamo vedere che, per ogni i si ha $t_i = \sum_{i(m)=i} v_m$ (simile per j).

Infatti la lista degli indici m per cui $i(m) = i$ è la sequenza delle posizioni fra il punto della lista dei c_j in cui si trova α_{i-1} (escluso) e quello in cui si trova α_i (incluso). Si ha che tale somma è la somma degli incrementi v_i in questa lista è dunque $\alpha_i - \alpha_{i-1} = t_i$.

Viceversa ogni punto di tale prodotto si ottiene in modo unico. Infatti l'unica ambiguità sussiste quando due numeri nella lista dei c_i sono uguali e quindi si possono permutare, in tale punto però il numero $v_i = 0$ e quindi la permutazione non muta la espressione 3.24.

□

Utilizzando il precedente teorema si può costruire una struttura simpliciale per il prodotto di due complessi simpliciali pur si ordinare i vertici in modo che ogni simpleso sia totalmente ordinato.

OSSERVAZIONE Dato un complesso simpliciale, i vertici della decomposizione bari-centrica sono naturalmente ordinati in modo che ogni simpleso sia totalmente ordinato, quindi possiamo definire in modo intrinseco il prodotto delle strutture simpliciali associate. Confrontiamo con una figura le due triangolazioni del prodotto di due semplici 1-dimensionali.

Figura 16

In effetti questo è un caso speciale della costruzione del nervo $\mathcal{N}(P)$ di un poset P . Dati due poset P_1, P_2 $P_1 \times P_2$ è un poset ponendo $(a, b) \leq (c, d) \equiv a \leq c, e b \leq d$. Si ha allora per definizione:

$$\mathcal{N}(P_1 \times P_2) = \mathcal{N}(P_1) \times \mathcal{N}(P_2)$$

4 Algoritmi e calcoli effettivi

NOTA Passiamo ad una breve digressione di carattere algebrico sulla natura e calcolo dei gruppi di omologia.

Supponiamo di avere un complesso di catene \mathcal{A} in cui tutti i gruppi A_i sono gruppi liberi di rango finito. Questo avviene per i complessi simpliciali e, come vedremo nel §16, per il complesso cellulare di un CW complesso finito.

CALCOLI EFFETTIVI Supponiamo di avere un complesso di catene \mathcal{A} in cui tutti i gruppi A_i sono gruppi liberi di rango finito, indichiamo con h_i il rango di A_i e si supponga di avere una base $e_j^{(i)}$, $j = 1, \dots, h_i$ prefissata.

Il differenziale $\partial : A_i := \mathbb{Z}^{h_i} \rightarrow \mathbb{Z}^{h_{i-1}} = A_{i-1}$ è quindi dato da una matrice (detta nei casi geometrici *matrice di incidenza*):

$$(4.1) \quad \partial(e_j^{(i)}) = \sum_{k=1}^{h_{j-1}} a_{kj} e_k^{(i-1)}$$

Per calcolare effettivamente l'omologia è necessario fare dei cambiamenti di base in cui le matrici di incidenza abbiano una forma particolarmente semplice.

Sia data una matrice $m \times n$ a coefficienti interi $X : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$.

Indichiamo con e_i , $i = 1, \dots, n$ gli elementi della base canonica di \mathbb{Z}^n e f_i , $j = 1, \dots, m$ gli elementi della base canonica di \mathbb{Z}^m , sia $Xe_i := \sum_j a_{ji} f_j$.

Chiamiamo cambiamenti di base elementari (non indipendenti) su una base u_t i seguenti:

- (1) Scambio di due elementi.
- (2) Cambio di segno di un elemento della base.
- (3) Sostituzione di un elemento u_i della base con $u_i + ku_j$, $j \neq k$.

Si deve osservare che questi mutamenti, fatti sulla base di arrivo, mutano la matrice X secondo operazioni elementari sulle righe e viceversa, mentre i cambiamenti sulla base di partenza corrispondono ad operazioni elementari sulle colonne.

Le operazioni elementari sulle righe sono

- (1) Scambio di due righe.
- (2) Cambio di segno di una riga.
- (3) Sottrarre alla riga j -esima la i -esima moltiplicata per k .

4.2 DEFINIZIONE.

- (1) Due matrici $m \times n$ intere X, Y si dicono **elementarmente equivalenti** se si può passare da X ad Y tramite un numero finito di operazioni elementari.
- (2) Una matrice $Y := (d_{ij})$ si dice in forma canonica se, $d_{ij} = 0$ per $i \neq j$ ed inoltre, posto $d_i := d_{ii}$ per i valori non nulli, si ha che $d_i > 0$ divide d_{i+1} .

4.3 TEOREMA. 1) Ogni matrice intera X è equivalente elementarmente ad una unica matrice Y in forma canonica.

2) Due matrici $m \times n$ intere X, Y sono elementarmente equivalenti se e solo se esistono matrici invertibili intere U, V (risp. $m \times m$, $n \times n$) con $Y = UXV$.

DIM. Partendo da X (supposta non nulla) e scambiando righe e colonne si può supporre che $a_{11} \neq 0$ sia l'elemento più piccolo della prima colonna (o anche della intera matrice).

Preso un altro elemento a_{i1} della prima colonna si esegua la divisione euclidea $a_{i1} = qa_{11} + r$. Sottraendo alla i -esima riga la prima moltiplicata per q si sostituisce a_{i1} con r . Si ottiene dunque uno 0 nel posto $i1$ oppure si diminuisce il minimo sulla prima colonna.

Pertanto questo è un algoritmo che termina quando la prima colonna ha solo $a_{11} \neq 0$. Ora si passa alla prima riga e si continua fra righe e colonne, diminuendo sempre il minimo

elemento fino a che sulla prima riga e colonna vi sia solo $a_{11} \neq 0$. Si passa ad a_{22} e si continua fino ad arrivare ad una matrice con elementi non nulli solo sulla diagonale.

Cambiando il segno si può assumere che gli elementi sulla diagonale siano positivi ed indichiamoli con p_i , possiamo riordinarli in modo crescente.

Se ad esempio $p_1 = a$ non divide $p_2 = b$ si consideri il seguente piccolo algoritmo di mosse elementari. $b = qa + r, 0 < r < a$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ r = b - qa & b \end{pmatrix}$$

che diminuisce il minimo e porta, riprendendo l'algoritmo precedente ad una matrice diagonale con elementi più piccoli.

I numeri d_i che si ottengono al termine dell'algoritmo si chiamano *divisori elementari* di X e la matrice Y si dice *in forma canonica*.

È chiaro che le operazioni elementari sono ottenute per moltiplicazione a destra o a sinistra per matrici particolarmente semplici che vengono dette anche esse elementari. Pertanto se $Y \cong X$ le matrici U, V si costruiscono a partire dall'algoritmo.

Viceversa data una matrice quadrata invertibile U sugli interi essa è elementarmente equivalente ad una matrice invertibile canonica, che quindi è l'identità. Questo prova 2). □

L'unicità di Y si prova vedendo che i numeri d_i sono indipendenti dall'algoritmo seguito, in quanto si ha

4.4 LEMMA. *Per ogni k il numero $d_1 d_2 \dots d_k$ è il massimo comun divisore dei determinanti dei minori $k \times k$ della matrice X .*

DIM. Data una matrice X sia $d_k(X)$ il massimo comun divisore dei determinanti dei minori $k \times k$ di X . Basta provare che $d_k(Y) = d_1 d_2 \dots d_k$ il che è una semplice verifica, e quindi che $d_k(X)$ è invariante per trasformazioni elementari.

L'unico caso da considerare è la somma ad una riga i -esima di una j -esima per k .

Dalle regole di sviluppo dei determinanti, i soli minori che cambiano, in questa trasformazione sono quelli in cui appare la riga i -esima e non la j -esima.

Un tale minore d si trasforma in $d + kd'$ dove d' è, a meno del segno, l'analogo minore con sostituzione della i -esima riga con la j -esima.

Pertanto nella lista dei determinanti dei minori alcuni minori d vengono sostituiti con $d + kd'$ mentre d' resta nella lista. Pertanto il massimo comun divisore non cambia. □

Dobbiamo ora mostrare come si interpreta questo risultato per il calcolo della omologia.

Si osservi che, se una matrice $Y : \oplus \mathbb{Z}e_i \rightarrow \oplus \mathbb{Z}f_j$ ha la forma diagonale $Ye_i = d_i f_i$, il suo nucleo ha come base i vettori e_i per cui $d_i = 0$ mentre la sua immagine ha come base $d_j f_j$ per i $d_j \neq 0$.

Applicando questo algoritmo al differenziale ∂_k di un complesso \mathcal{A} di gruppi liberi di rango finito, si esibisce una base dei cicli Z_k .

Applicandolo poi a ∂_{k+1} si effettua un cambiamento di base su Z_k che porta ad una base u_j per cui, $Z_k := \bigoplus_{j=1}^t \mathbb{Z}u_j$, $B_k := \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}d_i u_i$, $s \leq t$.

Si noti che un cambiamento di base in Z_k non modifica la forma canonica di ∂_k che è nulla su Z_k . Pertanto è possibile, in modo algoritmico, effettuare un cambiamento di base in ogni C_k e portare le matrici di incidenza dei differenziali ∂_k tutte in forma canonica.

4.5 DEFINIZIONE. *Un complesso di gruppi liberi in cui tutti i differenziali siano in forma canonica si dirà esso stesso in forma canonica.*

4.6 TEOREMA. *Per un complesso in forma canonica. Si ha*

$$H_k(\mathcal{A}) := Z_k/B_k = \bigoplus_{j=1}^t \mathbb{Z}u_j / \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}d_i u_i = \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}/(\mathbb{Z}d_i) \oplus \mathbb{Z}^{t-s}$$

I numeri d_i , $t - s$ sono invarianti del gruppo abeliano finitamente generato $H_k(\mathcal{A})$.

DIM. In un gruppo abeliano A gli elementi di k -torsione $A(k) := \{a \in A \mid ka = 0\}$ sono un sottogruppo, nucleo del morfismo $a \rightarrow ka$.

Se $A = B \oplus C$ si ha evidentemente $A(k) = B(k) \oplus C(k)$.

Per un gruppo ciclico $\mathbb{Z}/(m)$ si ha che $kx \cong 0 \pmod{m}$ se e solo se x è divisibile per $d := m/(k, m)$ ((k, m) il massimo comun divisore). Da cui la k -torsione

$$(\mathbb{Z}/(m))(k) = \mathbb{Z}/(k, m).$$

Ne segue

- a) $\bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}/(\mathbb{Z}d_j)$ è il sottogruppo T_k degli elementi di ordine finito in $H_k(\mathcal{A})$.
- b) $t - s$ è il rango del gruppo libero $H_k(\mathcal{A})/T_k$.
- c) Per un gruppo finito $A := \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}/(\mathbb{Z}d_j)$ con $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_s$ i numeri d_i sono degli invarianti poichè $A(d_i) := \bigoplus_{j=1}^i \mathbb{Z}/(\mathbb{Z}d_j) \oplus \bigoplus_{j=i+1}^s \mathbb{Z}/(\mathbb{Z}d_j/d_i)$.

4.7 DEFINIZIONE. *I numeri $d_i, t - s$ che descrivono l'omologia k -esima di uno spazio X vengono detti **coefficienti di k -torsione** e **k -esimo numero di Betti** $b_k := t - s$.*

Si noti che i numeri di Betti si possono calcolare conoscendo solo le dimensioni m_k dello spazio delle catene k -dimensionali ed r_k il rango di ∂_k . Infatti il rango dei cicli è $m_k - r_k$ e dei bordi è r_{k+1} quindi $b_k = m_k - r_k - r_{k+1}$.

Il termine *elementi di torsione* per gli elementi di ordine finito di un gruppo viene proprio da queste idee topologiche. Un ciclo c non nullo per cui $kc = 0$ in omologia va pensato come una banda che si torce nello spazio senza essere un bordo ma che, dopo k torsioni borda, come un nastro di Möbius.

A volte si possono ottenere utili informazioni da un semplice invariante per il cui calcolo non è necessario esplicitare le matrici di incidenza.

4.8 TEOREMA. Sia \mathcal{C} un complesso finito di gruppi abeliani liberi C_k di rango finito n_k , con differenziale ∂_k di rango r_k . Si ha

$$\chi(\mathcal{C}) := \sum_i (-1)^i b_i = \sum_i (-1)^i n_i$$

Il numero $\chi(\mathcal{C})$ è detto **caratteristica di Eulero Poincaré** di \mathcal{C} .

DIM.

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{C}) &:= \sum_i (-1)^i b_i = \sum_i (-1)^i (n_i - r_i - r_{i+1}) = \\ &= \sum_i (-1)^i n_i - \sum_i (-1)^i r_i - \sum_i (-1)^i r_{i+1} = \sum_i (-1)^i n_i \end{aligned}$$

□

Quando proveremo l'invarianza topologica dei gruppi di omologia avremo come conseguenza l'invarianza topologica di tutti questi numeri.

CAMBIAMENTO DI COEFFICIENTI

Vogliamo fare una breve digressione sul cambiamento di coefficienti in omologia. Ci limitiamo per ora ad esaminare un complesso \mathcal{C} formato da gruppi liberi finitamente generati, che potremo pertanto supporre in forma canonica. Siano $d_i^{(k)}$, b_k rispettivamente i fattori invarianti e numeri di Betti.

Supponiamo dunque di considerare un anello commutativo A e rimpiazziamo ciascun modulo libero \mathbb{Z}^n con A^n , dato un qualunque modulo libero M indicheremo con $M \otimes A$ il modulo libero su A con la medesima base.¹⁵ Denotiamo il nuovo complesso \mathcal{C}_A .

Indicheremo con $H_k(\mathcal{C}; A)$ la sua omologia.

Nelle basi $e_i^{(k)}$ le matrici di incidenza sono in forma canonica $\partial_k(e_i^{(k)}) = d_i^{(k-1)} e_i^{(k-1)}$.

Se $d_i^{(k-1)}$ è un divisore di 0 in A , ad esempio se è 0 in A , l'addendo $Ae_i^{(k)}$ contiene elementi del nucleo. In effetti, se $I_i := \{x \in A \mid x d_i^{(k-1)} = 0\}$, si deve aggiungere $Ie_i^{(k)}$ allo spazio dei k -cicli $Z_k(A)$ di \mathcal{C}_A . Abbiamo dunque che

$$Z_k(A) := Z_k \otimes A \oplus_i I_i e_i^{(k)}$$

Dalla forma canonica delle matrici di incidenza, per i bordi $B_k(A) := B_k \otimes A$.

Per l'omologia k -esima si deduce che, se $H_k(\mathcal{C}) = \oplus_{i=1}^s \mathbb{Z}/(d_i^{(k)}) \oplus \mathbb{Z}^{b_k}$, si ha

$$H_k(\mathcal{C}; A) := \oplus_{i=1}^s A/(d_i^{(k)} A) \oplus A^{b_k} \oplus_j I_j$$

¹⁵In effetti in un linguaggio più generale, dato un gruppo M si costruisce un A modulo $A \otimes_{\mathbb{Z}} M$ in modo functoriale, (cf. inserire).

Il primo termine della somma $\bigoplus_{i=1}^s A/(d_i A) \oplus A^{b_k}$, nel linguaggio formale dei prodotti tensoriali, coincide con $H_k(\mathcal{C}) \otimes A$.

Il secondo è chiaramente legato alla torsione di $H_{k-1}(\mathcal{C})$ poichè i numeri d_i sono i fattori invarianti di tale gruppo.¹⁶

Evidentemente, ogni volta che $d_i^{(k)}$ è invertibile in A , l'addendo $A/(d_i^{(k)} A)$ svanisce.

Due casi particolari sono da prendere in considerazione.

Primo. Prendiamo come $A := \mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali. Ogni numero $d_i \neq 0$ è invertibile in \mathbb{Q} e quindi

$$H_k(\mathcal{C}; \mathbb{Q}) := \mathbb{Q}^{b_k}$$

Secondo. Prendiamo $A := \mathbb{Z}/(2)$ anche esso un campo. In questo caso d è invertibile modulo 2 se e solo se è dispari. Ne segue immediatamente che $H_k(\mathcal{C}; \mathbb{Z}/(2))$ è uno spazio vettoriale di rango $b_k + s_{k-1}$ dove s_{k-1} è il numero di elementi $d_i^{(k-1)}$ pari.

Si noti che questo è il rango della 2-torsione di $H_{k-1}(\mathcal{C})$.

Simili considerazioni valgono per un primo p dispari.

¹⁶Si può sviluppare questo linguaggio in modo functoriale introducendo dei gruppi $Tor(A, B)$.