CAPITOLO 1 LA DIMENSIONE

1 Alcune idee classiche di topologia euclidea

NOTA In questa sezione iniziamo la discussione del concetto di dimensione topologica

PROPRIETÀ DI NORMALITÀ Nella discussione che seguirà ci limiteremo a considerare esclusivamente spazi metrizzabili ed a base numerabile, che comunque costituiscono già una ampia classe di spazi. Non ritorneremo esplicitamente su questa condizione che assumeremo sempre valida; essa ci servirà per sfruttare le varie proprietà di normalità di tali spazi. Ricordiamone alcune.

Se X è uno spazio metrico e $A \subset X$ un sottoinsieme, la funzione $f(x) := d(x, A)$, distanza di x da A, è continua e si annulla sulla chiusura $\overline{A}$ di A. In particolare, dato comunque un numero positivo $r > 0$, l'insieme $S_r(A) := \{x \in X | d(x, A) < r\}$ è un aperto contenente $\overline{A}$, la sua chiusura è contenuta nell'insieme $\{x \in X | d(x, A) \leq r\}$ ed il suo bordo nell'insieme $\{x \in X | d(x, A) = r\}$. Dati due insiemi chiusi A, B disgiunti definiamo:

$$A_1 := \{x \in X | d(x, A) < \frac{1}{3} d(x, B)\}, \ A_2 := \{x \in X | d(x, B) < \frac{1}{3} d(x, A)\}$$

dalle osservazioni precedenti e dalla disuguaglianza triangolare segue che, A_1, A_2 sono aperti e $A \subset A_1, \ B \subset A_2$ e $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$. Questa è la proprietà di *normalità.*

Vale anche un'altra proprietà di separazione che ci sarà utile.

1.1 LEMMA. *Siano dati due sottoinsiemi A, B di X, tali che nessuno dei due contenga un punto di accumulazione dell'altro*

$$A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset,$$

Allora esiste un aperto W con $A \subset W$, $\overline{W} \cap B = \emptyset$.

DIM. Sia $W := \{x \in X | d(x, A) < d(x, B)\}$. La funzione $X \to \mathbb{R}^2$ data da

$$x \to (d(x, A), d(x, B))$$

è continua e quindi W è aperto. Chiaramente $\overline{W} \subset \{x \in X | d(x,A) \leq d(x,B)\}$. Risulta $A \subset W$ in quanto, dall'ipotesi, per ogni $x \in A$, $d(x,B) > 0$ e $d(x,A) = 0$. Similmente se $x \in B$ si ha $d(x,B) = 0$, $d(x,A) > 0$ quindi $x \notin \overline{W}$, ovvero $\overline{W} \cap B = \emptyset$.

Ricordiamo anche la seguenete:

1.2 Definizione. *Un sottoinsieme di uno spazio X si dice un F_σ se è l'unione numerabile di insiemi chiusi.*

Si ha la seguente:

1.3 Proposizione.

(1) *L'unione numerabile e le intersezioni finite di F_σ sono ancora F_σ.*
(2) *In uno spazio metrico separabile ogni aperto è un F_σ e quindi l'intersezione di un aperto con un chiuso è un F_σ.*
(3) *Se $M \subset X$ è un F_σ in X e $A \subset X$ è un sottoinsieme (con la topologia indotta) si ha che $M \cap A$ è un F_σ in A.*

Dim. 1. Se $K_i := \cup_{j=1}^{\infty} C_i^j$ con C_i^j chiuso si ha che $\cup_i K_i = \cup_{i,j} C_i^j$, una unione numerabile di chiusi. Se $K = \cup_i C_i$, $H = \cup_j D_j$ con C_i, D_j chiusi si ha $K \cap H = \cup_{i,j} C_i \cap D_j$ unione numerabile di chiusi.

2) In uno spazio metrico separabile ogni aperto è unione numerabile di intorni sferici.

Data una sfera $S(p,r)$, di centro p e raggio $r > 0$, si prenda una successione di numeri $a_i < r$ con $\lim_{i \to \infty} a_i = r$ posto $D_i := \{x \in X | d(x,p) \leq a_i\}$ si ha che D_i è chiuso e $S(p,r) = \cup_i D_i$.

3) È immediato dalla definizione di topologia indotta.

Completiamo queste generalità con il Teorema del numero di Lebesgue.

1.4 Teorema. *Sia X uno spazio metrico compatto ed U_i un suo ricoprimento aperto. Allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che, per ogni insieme $Y \subset X$ di diametro $< \epsilon$ si ha $Y \subset U_i$ per almeno uno degli aperti del ricoprimento.*

Dim. Possiamo supporre, data la compattezza di X che il ricoprimento sia finito con N elementi. Per assurdo se tale numero non esistesse per ogni $n > 0$ potremmo trovare N punti $P_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, N$ che siano a distanza minore di $1/n$ e $P_i^{(n)} \notin U_i$.

Dalla sucessione $P_1^{(n)}$ ne possiamo estrarre una convergente ad un punto P (per la compattezza). Sia $P \in U_i$ per qualche i. Poichè U_i è aperto esso contiene la sfera di raggio $r > 0$ e centro P per qualche r. Ora per $n >> 0$ si ha $d(P, P_1^{(n)}) < r/2$ e $1/n < r/2$ quindi i punti $P_i^{(n)}$ devono essere necessariamente tutti in tale sfera, una contraddizione.

Infine introduciamo delle notazioni per alcuni oggetti fondamentali della geometria euclidea.

$$
\begin{aligned}
D^n &:= \{v \in \mathbb{R}^n \quad | \, \|v\| \le 1\}, && \text{disco } n\text{−dimensionale unitario}\\
S^n &:= \{v \in \mathbb{R}^{n+1} | \, \|v\| = 1\}, && \text{sfera } n\text{−dimensionale unitaria}\\
I^n &:= \{v \in \mathbb{R}^n \quad | \, 0 \le v_i \le 1\}, && \text{cubo } n\text{−dimensionale unitario.}
\end{aligned}
$$

Si osservi che D^n e I^n sono omeomorfi. Inoltre l'interno di D^n e di I^n è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Per quanto riguarda S^n si prenda un punto qualunque $p \in S^n$ e si provi, usando la proiezione stereografica, che $S^n - p$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, quindi S^n si può coprire con due aperti (*carte*) omeomorfi ad $\mathbb{R}^n$.

Utilizzeremo spesso l'intervallo $I^1 := [0, 1]$ e lo denoteremo semplicemente I.

La nozione topologica di dimensione.

Procediamo secondo idee di Poincaré.

La parola *dimensione* in matematica viene usata in moltissimi contesti, anche molto diversi fra loro, intuitivamente la dimensione è il *numero di parametri indipendenti* da cuio dipende un qualche oggetto, naturalmente la natura dei parametri e della dipendenza varia dal tipo di contesto, ad esempio il contesto più semplice è quello dell'algebra lineare in cui gli oggetti sono vettori i parametri elementi di un campo e la dipendenza è quella lineare.

Il contesto topologico al contrario è fra i più astratti ed in effetti conviene seguire una definizione di tipo induttivo:

1.5 Definizione. *Uno spazio X ha dimensione -1 se e solo se è vuoto ($X = \emptyset$).*

Uno spazio X ha dimensione $\le n$ in un punto p se e solo se esiste una base di intorni di p la cui frontiera ha dimensione $\le n - 1$.

Uno spazio X ha dimensione $\le n$ se ha dimensione $\le n$ in ogni suo punto.

Uno spazio ha dimensione n se ha dimensione $\le n$ ma non dimensione $\le n - 1$.

Se uno spazio non ha dimensione n per nessun n diremo che ha dimensione infinita.

Si osservi che la nozione di dimensione in un punto p è una nozione *locale*, ovvero se $p \in A \subset X$ ed A è aperto, la dimensione di X in p coincide con la dimensione di A in p. In particolare se X è ricoperto da una famiglia di aperti A_i è chiaro che $\dim\, X = \sup_i \dim\, A_i$.

Semplici esempi provano che uno spazio (anche se connesso) può avere dimensioni diverse in punti distinti.

La nozione di dimensione appena data è un invariante topologico che presenta alcuni aspetti assai semplici ed altri molto sottili e non sempre intuitivi.

Un fatto assai semplice che si verifica immediatamente per induzione è il seguente.

1.6 Proposizione. *Se $Y \subset X$ (con la topologia indotta) allora* $\dim Y \leq \dim X$.

Dim. Se la dimensione di X è infinita non c'è nulla da dimostrare altrimenti procediamo per induzione su $n = \dim\ X$.

Se $\dim X = -1$ l'enunciato è ovvio, altrimenti dato comunque $p \in Y$, una sua base di intorni si può scegliere della forma $V \cap Y$ dove V varia in una base di intorni di X. Scegliamo tali intorni con bordo $\delta(V)$ di dimensione $\leq n-1$. Il bordo $\delta_Y(Y \cap V)$ di $Y \cap V$ in Y, è contenuto in $\delta(V)$ e quindi per induzione si ha $\dim\ \delta_Y(Y \cap V) \leq n-1$. □

Molto più sottile, anche se intuitivo, è il seguente:

1.7 Teorema Brouwer 1913, Menger, Uryson. *Gli spazi $\mathbb{R}^n$,I^n e S^n hanno dimensione n (in ogni punto).*

Prendendo una base di intorni sferici di un qualunque punto di $\mathbb{R}^n$ si vede subito per induzione (ed il fatto che $\dim S^k = \dim \mathbb{R}^k$) che $\dim R^n \leq n$. Vedere che vale l'eguaglianza non è affatto semplice e coinvolge varie nuove idee, solo dopo lo studio dell'omologia arriveremo ad una prova completa di questo Teorema.

Dalle osservazioni precedenti è inoltre chiaro che

$$\dim\ \mathbb{R}^n = \dim\ I^n = \dim S^n.$$

A questo Teorema sono strettamente collegati altri importanti risultati sulla topologia di $\mathbb{R}^n$:

1.8 Teorema del punto fisso di Brouwer. *Una funzione continua da D^n in se ha almeno un punto fisso.*

1.9 Teorema dell invarianza del dominio di Brouwer. *Dato un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ ed un omeomorfismo h da X ad un altro sottoinsieme $h(X)$ di $\mathbb{R}^n$, se un punto x è interno ad X allora $h(x)$ è interno ad $h(X)$.*

1.10 Teorema di separazione di Jordan. *Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ omeomorfo a S^{n-1} sconnette $\mathbb{R}^n$. Più precisamente $\mathbb{R}^n - X$ ha due componenti connesse entrambe con bordo X.*

Per $n = 2$ questo teorema si enuncia anche dicendo che, una curva semplice e chiusa nel piano lo divide in due parti.

Iniziamo la discussione dei teoremi precedentemente enunciati.

La chiave è il seguente risultato fondamentale.

1.11 Teorema. *Non esiste alcuna funzione continua $F : D^n \to S^{n-1}$ che ristretta ad S^{n-1} sia l'identità (ovvero $F(x) = x,\ \forall x \in S^{n-1}$).*

Per farsi una idea intuitiva di questo teorema si pensi al caso $n = 2$ e si visualizzi il disco come un tamburo con una pelle molto elastica; una funzione F con le proprietà richieste dovrebbe con continuità spingere la pelle verso il bordo senza strappare il tamburo, cosa che è intuitivamente impossibile.

La nozione topologica sottostante al teorema precedente è quella di **retrazione**.

1.12 DEFINIZIONE. *Dato uno spazio X ed un sottospazio A una* **retrazione** *di X su A è una funzione continua $F : X \to A$ che ritretta ad A sia l'identità. Se esiste una tale funzione si dice che A è un* **retratto** *di X.*

Possiamo quindi dire che S^{n-1} non è retratto di D^n.

Supponendo valido questo Teorema fondamentale che proveremo nel Cap. 5 vediamo come da esso si deduce la:

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL PUNTO FISSO. Supponiamo per assurdo che esista una funzione $g : D^n \to D^n$ per cui $g(x) \neq x$ per ogni x in D^n. Dato $x \in D^n$ viene quindi individuata univocamente la semiretta di origine $g(x)$ e passante per x. Sia dunque $F(x)$ il punto di intersezione di questa semiretta con la sfera S^{n-1}. Non è difficile persuadersi che F è una funzione continua, il che contraddice il Teorema 1.2.6.

DIMENSIONE E SEPARAZIONE Per arrivare invece al teorema sulla dimensione bisogna passare anche attraverso altre idee.

1.13 DEFINIZIONE. *Dati due chiusi disgiunti $C_1,\ C_2$ in uno spazio X si dice che un chiuso B* **separa** *$C_1,\ C_2$ se esistono due aperti disgiunti $A_1,\ A_2$ con $X - B = A_1 \cup A_2$ e $C_1 \subset A_1,\ C_2 \subset A_2$.*

Se B si può prendere vuoto diremo che $C_1,\ C_2$ sono **separati** *in X.*

Intuitivamente B è un *taglio* fatto allo spazio X in modo che i due insiemi dati cadano in due pezzi distinti.

Per separare C_1, C_2 basta trovare un intorno aperto W di C_1 la cui chiusura $\overline{W}$ non intersechi C_2. Si definisca $A_1 := W,\ A_2 := X - \overline{W},\ B := \overline{W} - W$.

Consideriamo il cubo I^n. Per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ possiamo considerare le due *facce opposte* $I^n_{i,0},\ I^n_{i,1}$ definite dalle condizioni $x_i = 0,\ x_i = 1$. Supponiamo di scegliere un sottoinsieme chiuso B_i che separa queste due facce, questo vuol dire che l'aperto $I^n - B_i$ si può decomporre in due aperti disgiunti, A^0_i contenente $I^n_{i,0}$ e A^1_i contenente $I^n_{i,1}$.

B_i si può scegliere in infiniti modi i più semplici sono prendere i punti con $x_i = a,\ 0 < a < 1$.

Figura 1

Vogliamo provare che

1.14 LEMMA. *Qualunque sia la scelta dei* B_i *si ha* $\cap_{i=1}^n B_i \neq \emptyset$.

DIM. Lo proveremo come conseguenza del teorema del punto fisso.

Per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n) \in I_n$ sia $g(x)$ il vettore la cui coordinata $i-$esima è $-d(x, B_i)$ se $x \in A_i^0$, $d(x, B_i)$ se $x \in A_i^1$ e 0 se $x \in B_i$.

Si noti che, il segmento per x e perpendicolare alle due facce $I_{i,0}^n$, $I_{i,1}^n$ ha estremi $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ rispettivamente e $d(x, I_{i,1}^n) = 1 - x_i, d(x, I_{i,0}^n) = x_i$.

Intersecando A_i^0, A_i^1, B_i con questo segmento si vede subito che:

$$d(x, B_i) \leq \begin{cases} d(x, I_{i,1}^n) = 1 - x_i \text{ se } x \in A_i^0 \\ d(x, I_{i,0}^n) = x_i. \text{ se invece } x \in A_i^1 \end{cases} \tag{1.15}$$

La funzione $g(x)$ è continua ed è evidente, dalle disuguaglianze 1.3.1, che $x - g(x) \in I^n$. Dal teorema del punto fisso segue l'esistenza di un $x \in I^n$ tale che $x - g(x) = x$ ovvero $g(x) = 0$. La definizione di $g(x)$ implica che $g(x) = 0$ se e solo se $x \in \cap_{i=1}^n B_i$.

□

Torniamo alla dimensione, il collegamento con quanto fatto è nel risultato seguente.

1.16 PROPOSIZIONE. *Dato uno spazio* X *di dimensione* $\leq n-1$ *ed* n *coppie di insiemi chiusi* C_i, C_i' *con* $C_i \cap C_i' = \emptyset$, *esistono* n *insiemi chiusi* B_i *tali che.*

1) B_i *separa* C_i *e* C_i'.

2) Gli insiemi B_i *hanno intersezione vuota.*

Assumiamo per un momento questa proposizione, e confrontiamola con il Lemma 1.3.1 la conseguenza è che la dimensione di I^n non è minore di n, quindi avendo già notato che è $\leq n$ se ne deduce il teorema fondamentale

$$dim(I^n) = dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

La dimostrazione di questa proposizione è assai complessa anche se elementare, si basa sul seguente:

1.17 LEMMA. *Siano* C_1, C_2 *due insiemi chiusi disgiunti in uno spazio* X *e sia* A *un sottoinsieme di* X *di dimensione* $\leq n$. *Allora esiste un sottoinsieme chiuso* B *di* X *che separa* C_1, C_2 *ed inoltre* $\dim(B \cap A) \leq n - 1$.

Rimandiamo la dimostrazione di questo Lemma alla fine del §1.4 e cominciamo con il dimostrare che il Lemma 3 implica la Prop. 2.

Dim. Vogliamo costruire, per induzione, per ogni i un sottoinsieme chiuso B_i che separa C_i, C_i' e tale che dim $(\cap_{j=1}^{i-1} B_j) \cap B_i \leq n - i - 1$.

L'inizio della induzione consiste nell'applicare il Lemma 3 prendendo $A = X$, poiché $dim(X) \leq n - 1$ Il Lemma ci assicura l'esistenza di un chiuso B_1 che separa $C_1,\ C_1'$ e tale che $dim(B_1 \cap X) = dim(B_1) \leq n - 2$.

Per il passo induttivo prendiamo come insiemi chiusi C_i, C_i' e come A l'intersezione $\cap_{j=1}^{i-1} B_j)$ che, per costruzione, ha dimensione $\leq n - i$ ed applichiamo il Lemma a questi dati.

Alla fine abbiamo ottenuto i B_i con $dim(\cap_{j=1}^{n} B_j)) \leq -1$ ovvero $\cap_{j=1}^{n} B_j = \emptyset$ come desiderato. □

La prova del lemma 3 è più complessa, anche se elementare, nel senso che usa solo ragionamenti di topologia generale.

Prima di tutto si prova nel caso dim $A = 0$ (cfr. (3) della Prop. 1.4.1).

Ci si riduce poi a questo caso, provando un fatto interessante e sorprendente: è sempre possibile decomporre (insiemisticamente) uno spazio A di dimensione n nell'unione di due sottoinsiemi D, E con $\dim D = n - 1,$ dim $E = 0$! (cfr. 1.4)

Per arrivare a questo dovremo introdurre altre idee.

Decomposizione in spazi 0-dimensionali Abbiamo già detto che, le idee che ci serviranno per provare il Lemma 1.3.3 sono legate alla possibilità di decomporre uno spazio di dimensione n come unione (insiemistica) di spazi di dimensione minore.

È opportuno prima di tutto discutere la dimensione 0.

1.18 Proposizione.

(1) *Uno spazio X ha dimensione 0 se e solo se ha una base di aperti che sono anche chiusi.*

(2) *Sia X uno spazio di dimensione 0, e $C_1,\ C_2$ due chiusi disgiunti in X, allora si può separare $C_1,\ C_2$ con l'insieme vuoto.*

Viceversa, se ogni coppia di chiusi disgiunti $C_1,\ C_2$ sono separati in X, si ha che dim $X = 0$.

(3) *Sia X uno spazio, A un sottospazio di dimensione 0, e $C_1,\ C_2$ due chiusi disgiunti in X, allora si può separare $C_1,\ C_2$ con un chiuso B con $B \cap A = \emptyset$.*

(4) *Se uno spazio X è unione numerabile di sottoinsiemi chiusi C_i di dimensione ≤ 0 allora* $\dim(X) \leq 0$.

Dim. 1) Per definizione, se X ha dimensione 0, ogni suo punto ha una base di intorni aperti con bordo vuoto, ossia chiusi. Prendendo tutti questi aperti per ogni punto si ha la base richiesta. Il viceversa è simile.

2) Dato comunque un punto p di X o $p \notin C_1$ ovvero $p \notin C_2$. Per l'ipotesi di dimensione 0, in ciascun caso possiamo trovare un intorno aperto e chiuso $U_1(p)$ con $U_1(p) \cap C_1 = \emptyset$, ovvero

$U_2(p)$ con $U_2(p) \cap C_2 = \emptyset$ (non escludendo che entrambe le asserzioni siano verificate). Usando una base numerabile possiamo costruire una sequenza U_i di tali aperti che copre X. Poniamo $V_i = U_i - \cup_{j=1}^{i-1} U_j$. Chiaramente:

(1) $X = \cup_i V_i$.
(2) $V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j$.
(3) V_i è aperto.
(4) Per ogni i o $V_i \cap C_1 = \emptyset$ ovvero $C_2 \cap V_i = \emptyset$.

Ora basta porre $A_1 := \cup_{V_i \cap C_1 \neq \emptyset} V_i$ e A_2 l'unione dei V_j che non appaiono nella prima unione. Quindi A_1, A_2 sono due aperti che decompongono X.

$$X = A_1 \cup A_2, \; A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Per costruzione $C_1 \subset A_1$ ma anche $C_2 \cap A_1 = \emptyset$ e quindi $C_2 \subset A_2$. Si ha quindi la separazione richiesta. Il viceversa è immediato dalla definizione di dimensione 0.

3) Dalla normalità di X segue che esistono due aperti $U_1, \; U_2$ con $C_i \subset U_i$ e $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$. I due insiemi $\overline{U}_1 \cap A, \; \overline{U}_2 \cap A$ sono chiusi e disgiunti in A che ha dimensione 0, pertanto possiamo trovare due insiemi disgiunti, chiusi ed aperti in A, $C_1', \; C_2'$ con $A = C_1' \cup \; C_2'$ e $\overline{U}_1 \cap A \subset C_1', \; \overline{U}_2 \cap A \subset C_2'$.

Si verifica facilmente che ciascuno dei due insiemi $C_1 \cup C_1'$ e $C_2 \cup C_2'$ è disgiunto dalla chiusura dell'altro. Usando il Lemma 1.1.1 si ha che esiste un aperto W con $C_1 \cup C_1' \subset W$ e $\overline{W} \cap (C_2 \cup C_2') = \emptyset$. Il bordo di W è il chiuso B richiesto.

4) Sia $X = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$ come nell'ipotesi. Dati due insiemi chiusi e disgiunti K, L proveremo che essi sono separati in X.

Faremo una costruzione induttiva. Partiamo dai due chiusi $C_1 \cap K, \; C_1 \cap L$ disgiunti di C_1. Dal punto 2) segue che esistono due chiusi disgiunti $A_1, \; B_1$ con $C_1 = A_1 \cup B_1$ e $C_1 \cap K \subset A_1 \; C_1 \cap L \subset B_1$. I due insiemi $K \cup A_1, \; L \cup B_1$ sono ancora chiusi e disgiunti e quindi, dalla normalità di X, segue che esistono due aperti $G_1, \; H_1$ con $K \cup A_1 \subset G_1, \; L \cup B_1 \subset H_1$ e $\overline{G}_1 \cap \overline{H}_1 = \emptyset$. Ora ripetiamo la costruzione rimpiazzando K, L con $G_1, \; H_1$ e C_1 con C_2 ottenendo aperti $G_2, \; H_2$ a chiusura disgiunta contenenti $\overline{G}_1, \; \overline{H}_1$ la cui unione contiene C_2. Continuando otteniamo due sequenze di aperti $G_i, \; H_i$ tali che.

$\overline{G}_{i-1} \subset G_i, \; \overline{H}_{i-1} \subset H_i$
$\overline{G}_i \cap \overline{H}_i = \emptyset$
$C_i \subset G_i \cup H_i$.

Poniamo $G := \cup_i G_i, \; H := \cup_i H_i$ è immediato verificare che $X = G \cup H$ è unione disgiunta e $K \subset G, \; L \subset H$ come desiderato.

$\square$

Torniamo ora al caso generale. Vale il seguente

1.19 Teorema.

(1) *Un sottospazio A di uno spazio X ha dimensione $\leq n$ se e solo se per ogni suo punto esistono intorni arbitrariamente piccoli in X con il bordo intersecante A in un insieme di dimensione $\leq n-1$.*
(2) *Dati due sottospazi A, B di uno spazio X si ha* $\dim(A \cup B) \leq \dim(A) + \dim(B) + 1$.
(3) *Se uno spazio X è unione numerabile di sottoinsiemi chiusi B_i di dimensione $\leq n$ allora* $\dim(X) \leq n$.
(4) *Se* $\dim(X) \leq n$ *esistono due sottospazi D, E di X tali che $X = D \cup E$,* $\dim(D) \leq n-1$, $\dim(E) \leq 0$.

Dim. 1) In un verso è chiaro, se esistono tali intorni V le loro intersezioni con A sono intorni in A il cui bordo in A è contenuto in A intersecato il bordo di V e si applica la Prop.1.1. Viceversa supponiamo che dim $A \leq n$, sia $p \in A$ un punto arbitrario e U un intorno di p in X così che $U' := U \cap A$ è un intorno di p in A. Per ipotesi esiste un intorno V' di p in A contenuto in U' ed il cui bordo in A, che denotiamo B' ha dimensione $\leq n-1$. I due insiemi V', $A - \overline{V}'$ soddisfano le condizioni di non contenere ciascuno un punto di accumulazione dell'altro e quindi esiste un aperto W con $V' \subset W$ e $\overline{W} \cap (A - \overline{V}') = \emptyset$.

Possiamo supporre che $W \subset U$ (sostituendolo con $W \cap U$). Il bordo di $\overline{W}$ è $\overline{W} - W$ e, per costruzione, non contiene alcun punto di V' né di $A - \overline{V}'$, quindi $A \cap (\overline{W} - W)$ è contenuto nel bordo B' di V' in A e quindi ha dimensione $\leq n-1$ come richiesto.

2) Per doppia induzione sulle due dimensioni.

L'enunciato è evidente se $\dim(A) = \dim(B) = -1$.

Sia ora $\dim(A) = m$, $\dim(B) = n$ e supponiamo il teorema vero per una delle due dimensioni inferiore. Sia p un punto di $A \cup B$ e sia per esempio $p \in A$.

Dalla prima parte si ha che per ogni intorno U di p esiste un intorno aperto V contenuto in U il cui bordo W interseca A in un insieme di dimensione $\leq m-1$, d'altra parte $\dim(W \cap B) \leq \dim(B) = n$. Quindi $\dim(W \cap (A \cup B)) = \dim((W \cap A) \cup (W \cap B)) \leq m - 1 + n + 1 = m + n$ per induzione e questo prova l'enunciato.

3), 4) Chiamiamo per semplicità Σ_n l'enunciato 3) per la dimensione n e Δ_n l'enunciato 4) per la dimensione n. Li dimostriamo simultaneamente per induzione sulla dimensione. Sono veri in dimensione -1, inoltre Σ_0 è stato provato nella proposizione precedente.

Proviamo che Σ_{n-1} implica Δ_n. Poiché X è separabile[1] esiste una base numerabile di aperti U_i con il bordo B_i di dimensione $\leq n-1$. Applicando Σ_{n-1} abbiamo che $D := \cup_i B_i$ ha dimensione $\leq n-1$. Sia $E := X - B$. Una base di E è data dagli insiemi $U \cap E$ il cui bordo in E è vuoto. Ne segue che $\dim(E) = 0$.

Ora proviamo che Σ_{n-1} e Δ_n implicano Σ_n.

Supponiamo $X = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$ con C_i chiuso e dim $C_i \leq n$.

Poniamo $K_1 := C_1$, $\quad K_i := C_i - \cup_{j=1}^{i-1} C_j$.

[1] ha un insieme numerabile denso

Affermiamo che:

(1) $X = \cup_i K_i$.
(2) $K_i \cap K_j = \emptyset, \quad i \neq j$.
(3) K_i è un F_σ in X.
(4) $\dim K_i \leq n$.

Solo 3,4) meritano delle spiegazioni. K_i è l'intersezione del chiuso C_i con l'aperto $X - \cup_{j=1}^{i-1} C_j$ quindi è un F_σ dalle osservazioni precedenti. 4) segue dal fatto che $K_i \subset C_i$.

Applichiamo Δ_n scrivendo $K_i = M_i \cup N_i$ con

$$\dim\ M_i \leq n-1, \quad \dim\ N_i \leq 0.$$

Siano $M := \cup_i M_i$. $N := \cup_i N_i$. Certamente $X = M \cup N$. Ogni M_i è un F_σ in M egualmente ogni N_i è un F_σ in N. Ne segue per induzione, avendo già provato Σ_0, che $\dim M \leq n-1, \quad \dim N \leq 0$.

Possiamo provare ora il Lemma 1.3.3.

Dim. Se dim $A = -1$ l'enunciato è semplicemente la normalità di X.

Il caso $\dim A = 0$ è la Prop. 1.4.1, (3).

Nel caso generale basta usare il Teorema 1.4.2 (4) e decomporre $A = D \cup E$ con dim $D \leq n-1$, dim $E \leq 0$, applichiamo poi il caso precedente ad E trovando un chiuso B che separa C_1, C_2 e $B \cap E = \emptyset$. Segue che $B \cap A \subset D$ e quindi dim $B \cap A \leq n-1$ come richiesto.