Capitolo 4 Gruppi di Lie compatti e semisemplici

NOTA Discutiamo i fondamenti della teoria.

1.1 Gruppi compatti e gruppi semplici Iniziamo con un gruppo compatto K. Sia $\mathfrak{k}$ la sua algebra di Lie, dalla analisi iniziale sui gruppi compatti esiste una struttura di spazio Euclideo su $\mathfrak{k}$ per cui gli operatori $Ad(k)$ sono ortogonali. In particolare possiamo decomporre $\mathfrak{k}$ nella somma diretta di sottospazi ortogonali $Ad(K)$ stabili ed irriducibili.

Supponiamo ora che K sia connesso.

PROPOSIZIONE. *i) In questo caso un sottospazio di $\mathfrak{k}$ è $Ad(K)$ stabile se e solo se è un ideale di $\mathfrak{k}$.*

ii) Quindi $\mathfrak{k}$ si decompone in somma diretta $\mathfrak{k} = \oplus_{i=1}^m \mathfrak{k}_i$ di algebre di Lie semplici.

iii) Fra tali algebre di Lie dobbiamo distinguere quelle 1 dimensionali che formano pertanto il centro di $\mathfrak{k}$.

DIM. i) In una rappresentazione di dimensione finita di un gruppo di Lie connesso un sottospazio è stabile per il gruppo se e solo se è stabile per l'algebra di Lie. Ma per l'azione aggiunta di una algebra di Lie $\mathfrak{k}$ un sottomodulo è un ideale.

ii) Una rappresentazione di un gruppo compatto si decompone in somma diretta di irriducibili, quindi $\mathfrak{k}$ si decompone in somma diretta $\mathfrak{k} = \oplus_{i=1}^m \mathfrak{k}_i$ di ideali, che come rappresentazioni sono irriducibili. Ma ora essendo gli $\mathfrak{k}_i$ ideali, essi formano una somma diretta come algebre di Lie, inoltre ogni $\mathfrak{k}_i$ è irriducibile come modulo su se stesso ovvero è una algebra semplice.

iii) Il centro di una somma diretta è la somma diretta dei centri, ma il centro è anche un ideale, per cui una algebra semplice o ha centro 0 oppure è abeliana.
Evidentemente una algebra abeliana è semplice se e solo se è di dimensione 1. $\square$

Sia $\mathfrak{z}$ il centro di $\mathfrak{k}$; tramite l'esponenziale abbiamo un omomomorfismo $esp : \mathfrak{z} \to K$ e sia $Z := esp(\mathfrak{z})$ il sottogruppo di K immagine. Proviamo che

TEOREMA. *Z è chiuso e coincide con la componente connessa del centro di K.*

DIM. Chiaramente $esp(\mathfrak{z})$ è un sottogruppo contenuto nel centro di K pertanto anche la sua chiusura è nel centro di K (per continuità). Viceversa la componente connessa del centro è un sottogruppo di Lie chiuso abeliano la cui algebra di Lie è contenuta in $\mathfrak{z}$ e quindi coincide con $\mathfrak{z}$. $\square$

Per una algebra di Lie $\mathfrak{k}_i$ semplice e non commutativa che decompone $\mathfrak{k}$ abbiamo la analisi seguente.
Il gruppo $Ad(K)$ induce un gruppo compatto K_i di automorfismi per restrizione su $\mathfrak{k}_i$. A livello di algebre di Lie abbiamo la restrizione della rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{k}$ a $\mathfrak{k}_i$ che ha come nucleo $\mathfrak{z} \oplus_{j\neq i} \mathfrak{k}_j$ e come immagine $ad(\mathfrak{k}_i)$ pertanto K_i è un gruppo compatto di algebra di Lie $\mathfrak{k}_i$ detto *gruppo aggiunto a $\mathfrak{k}_i$*.

LEMMA. *K_i è un gruppo di Lie semplice ovvero non ha sottogruppi normali chiusi non banali.*

DIM. Se H è un sottogruppo normale chiuso proprio la sua algebra di Lie è un ideale proprio di $\mathfrak{k}_i$ che per ipotesi è semplice dunque l'algebra di Lie di H è 0 ed H è un sottogruppo discreto.

Dunque H è nel centro di K_i, ma se z è nel centro di K_i, z induce la coniugazione banale $Ad(z)(g) = zgz^{-1} = g$. L'azione aggiunta è il differenziale della coniugazione quindi z è 1 nella azione aggiunta e quindi in K_i. $\square$

Ora ci serve un Teorema che proveremo solo dopo aver sviluppato a fondo la teoria dei gruppi compatti.

TEOREMA. *Se K è un gruppo compatto connesso con centro finito allora $\pi_1(K)$ è un gruppo finito.*

Dal Teorema precedente segue che il rivestimento universale di ciascun K_i è un gruppo compatto $\tilde{K}_i$ abbiamo dunque un morfismo

$$\pi : Z \times \prod_i \tilde{K}_i \to K$$

che induce l'identità sulle algebre di Lie e quindi è un rivestimento, necessariamente finito.

Esercizio Il centro Z_i di $\tilde{K}_i$ coincide con $\pi_1(K_i)$.

Il Nucleo di π è un sottogruppo finito di $Z \times \prod_i Z_i$ che interseca Z in 1.

Osserviamo che se Z non è ridotto ad 1 allora $Z = (S^1)^k$ e $\pi_1(Z) = \mathbb{Z}^k$ in definitiva $\pi_1(K)$ è un gruppo abeliano finitamente generato di rango k.

Ora facciamo il secondo passo, consideriamo una algebra di Lie $\mathfrak{k}$ semplice e non commutativa. Per analizzarla sfrutteremo la Teoria che si può trovare in [H], ***.

Il primo passo da fare è quello di passare alla teoria complessa e complessificare l'algebra costruendo

$$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{k}.$$

In $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ consideriamo la coniugazione $\overline{a + ib} := a - ib$ che è un automorfismo (antilineare) di algebre di Lie.

L'analisi che facciamo è un caso speciale della discussione della complessificazione di un modulo irriducibile, fatta nel cap. 3, 1.2.

Supponiamo prima di tutto che $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ non sia una algebra semplice e che I sia un ideale minimale di $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$.

Evidentemente anche $\overline{I}$ è un ideale minimale di $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ e $I \cap \overline{I}$ è un ideale di $\mathfrak{k}$. Poichè $\mathfrak{k}$ è semplice e non è un ideale di $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ si deve avere che $I \cap \overline{I} = 0$.

Ora $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, come $\mathfrak{k}$ modulo si decompone come somma diretta di due copie di $\mathfrak{k}$ che è irriducibile, poiché sia I che $\overline{I}$ sono sottomoduli per $\mathfrak{k}$ l'unica possibilità è che:

a) $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = I \oplus \overline{I}$.

b) Le due proiezioni inducono un isomorfismo fra $\mathfrak{k}$ e le due algebre di Lie I ed $\overline{I}$.
In definitiva questo vuol dire che $\mathfrak{k}$ è isomorfa ad una algebra di Lie semplice su $\mathbb{C}$.
Riassumendo. Se $\mathfrak{k}$ è una algebra di Lie reale semplice o $\mathfrak{k}$ è già una algebra di Lie complessa oppure $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ è semplice.

Osserviamo ora:

PROPOSIZIONE. *Sia $\mathfrak{k}$ una algebra di Lie reale semplice associata ad un gruppo compatto allora $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ è semplice.*

DIM. Se $\mathfrak{k}$ fosse una algebra di Lie complessa proviamo che la sua forma di Killing è necessariamente indefinita. Infatti preso un operatore lineare complesso A su uno spazio vettoriale complesso ne possiamo considerare sia la traccia $tr_{\mathbb{C}}(a)$ come operatore complesso che come operatore reale $tr_{\mathbb{R}}(a)$, guardando alle due matrici si vede subito che $tr_{\mathbb{R}}(a) = 2Re(tr_{\mathbb{C}}(a))$. Per la forma di Killing reale abbiamo che è 2 volte la parte reale di una forma quadratica non degenere complessa. Ora una forma non degenere complessa in una opportuna base complessa ha la forma $\sum_j z_j^2$, se $z_j = x_j + iy_j$ si ha:

$$Re(\sum_j z_j^2) = \sum_j (x_j^2 - y_j^2).$$

questa è una tipica forma quadratica indefinita, infatti con segnatura 0 quindi non è la forma di Killing di una algebra di un gruppo compatto che à definita negativa. $\square$

Viceversa vedremo che, se $\mathfrak{k}$ è una algebra di Lie complessa e semplice allora $\mathfrak{k}$ è la complessificazione di una algebra di Lie reale semplice ed in effetti ve ne è una, unica a meno di isomorfismo, il cui gruppo di Lie associato è compatto. Da questa teoria segue in particolare che classificare i gruppi di Lie compatti semplici è equivalente a classificare le algebre di Lie complesse semplici. Questa classificazione si ottiene tramite la classificazione dei sistemi di radici.

1.2 Tori massimali La teoria di struttura dei gruppi di Lie connessi e compatti passa attraverso la nozione fondamentale di *toro massimale.*

DEFINIZIONE. *Un toro massimale T di un gruppo compatto G è un sottogruppo T chiuso connesso commutativo massimale con questa proprietà.*

OSSERVAZIONE Poiché T per ipotesi è un gruppo di Lie abeliano compatto connesso, per il teorema di struttura è un toro $(S^1)^m$.

LEMMA. *Sia G un gruppo di Lie compatto e connesso e T un toro.*
T è massimale se e solo se l'algebra di Lie $\mathfrak{t}$ di T coincide con gli invarianti $\mathfrak{g}^T$ della azione aggiunta di T su $\mathfrak{g}$.

DIM. Se T è un toro la sua algebra di Lie $\mathfrak{t}$ è abeliana e T opera banalmente per aggiunzione su $\mathfrak{t}$. Pertanto se $T \subset T'$ e T' è un toro T opera banalmente per aggiunzione su $\mathfrak{t}'$ in particolare se $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}^T$ si deve avere $T = T'$ e T è massimale.

Viceversa se T è massimale e $a \in \mathfrak{g}^T$ si ha che il gruppo ad un parametro $esp(sa)$ commuta con T quindi T ed $esp(sa)$ generano un gruppo la cui chiusura è abeliana e contiene T, pertanto deve coincidere con T e dunque $a \in \mathfrak{t}$. $\square$

LEMMA. *Sia G un gruppo di Lie compatto e connesso e T un toro massimale. Allora T ha indice finito nel suo normalizzatore:*

$$N_T := \{g \in G \,|\, gTg^{-1} \subset T\}.$$

DIM. Evidentemente N_T è chiuso e quindi un gruppo di Lie compatto, basta quindi provare che T ed N_T hanno la stessa algebra di Lie. Se per assurdo ciò non fosse avremmo un gruppo ad un parametro di automorfismi di T, il che non è possibile, gli automorfismi di T sono un gruppo discreto. $\square$

Abbiamo una definizione fondamentale.

DEFINIZIONE. *Il gruppo quoziente $W := N_T/T$ è un gruppo finito detto gruppo di Weyl.*

Per capire la azione aggiunta di un toro massimale T sulla algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G conviene complessificarla. Dalla teoria delle rappresentazioni dei tori si ha allora:

$$\text{(1.2.1)} \qquad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus_{\mu \in \hat{T}} \mathfrak{g}_{\mu}, \qquad \mathfrak{g}_{\mu} := \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \,|\, Ad(t)x = \mu(t)x, \ \forall t \in T\}.$$

I caratteri μ per cui $\mathfrak{g}_\mu \neq 0$ si chiamano *radici* e lo spazio $\mathfrak{g}_\mu$ *lo spazio di radice* μ.

Il legame con la teoria reale è il seguente.

PROPOSIZIONE. *Se V è uno spazio vettoriale reale su cui opera un toro T in modo irrriducibile allora si ha uno dei due casi:*
1) $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$ e la rappresentazione è banale.

2) $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$, V ha una struttura euclidea per cui l'immagine di T nella rappresentazione è il gruppo[1] *$SO(V) = SO(2, \mathbb{R}) = S^1$.*

DIM. Applichiamo le osservazioni del Cap. 3, 1.2. Una rappresentazione irriducibile reale V complessificata può restare irriducibile o spezzarsi nella somma diretta di due rappresentazioni irriducibili complesse. Poiché le rappresentazioni irriducibili complesse di un toro sono 1-dimensionali si ha che $\dim_{\mathbb{R}} V = 1, 2$. Inoltre possiamo mettere una metrica Euclidea in V in modo tale che T operi come trasformazioni ortogonali. Poiché T è connesso T opera tramite un sottogruppo connesso di $SO(V)$. Se $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$ si ha dunque che T opera banalmente, se $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ gli unici sottogruppi connessi di $SO(V)$ sono $SO(V)$ stesso ed $\{1\}$, quindi se T opera in modo irrriducibile l'immagine di T deve coincidere con $SO(V)$. $\square$

[1] queste identificazioni non sono canoniche ma dipendono da una orientazione di V abbamo due possibili identificazioni.

OSSERVAZIONE

Dato un toro T le sue rappresentazioni irriducibili complesse corrispondono ad i caratteri $\mu : T \to SU(1) = S^1$. Dato un tale carattere indichiamo con $\mathbb{C}(\mu)$ la corrispondente rappresentazione 1-dimensionale complessa.

Nel caso di una rappresentazione $\rho : T \to SO(V)$ reale irriducibile di dimensione 2 abbiamo che la complessificazione di V è la somma diretta $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ di due addendi stabili per il gruppo $SO(V)$, che si identifica (in ogni addendo) al gruppo $SU(1)$.

I due caratteri cosí determinati sono uno l'inverso dell'altro indichiamoli con μ, μ^{-1}, pertanto $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}(\mu) \oplus \mathbb{C}(\mu^{-1})$.

Pertanto possiamo decomporre l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ in rappresentazioni irriducibili reali per T. La somma delle rappresentazioni banali è $\mathfrak{t}$ le rappresentazioni bidimensionali si complessificano fornendo coppie di radici una inversa dell'altra.

È conveniente pensare alle radici anche in un altro modo, usando l'esponenziale abbiamo che:

$$\mathfrak{g}_\mu = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [t, x] = \mu_0(t)x,\ t \in \mathfrak{t}\}; \quad e^{\mu_0(t)} = \mu(e^t).$$

Anche le funzioni lineari $\mu_0 : \mathfrak{t} \to i\mathbb{R}$ si diranno *radici*, se conveniente scriveremo $\mathfrak{g}_{\mu_0} := \mathfrak{g}_\mu$.

Sia ora $g \in N_T$ si ha dunque che se $x \in \mathfrak{g}_\mu$ calcolando $Ad(g)(x)$ abbiamo, per $t \in T$:

$$Ad(t)Ad(g)(x) = Ad(g)Ad(g^{-1}tg)(x) = Ad(g)\mu(g^{-1}tg)(x) = \mu(g^{-1}tg)Ad(g)(x)$$

PROPOSIZIONE.

$$Ad(g)(\mathfrak{g}_\mu) = \mathfrak{g}_{\mu^g}, \quad \mu^g(t) := \mu(g^{-1}tg). \tag{1.2.2}$$

Possiamo dunque dire che il gruppo di Weyl permuta le radici.

Il torema principale sui tori massimali è il seguente:

TEOREMA DI CONIUGAZIONE. *Sia G un gruppo di Lie compatto e connesso e T un toro massimale, allora $G = \cup_{g \in G} gTg^{-1}$.*

DIM. Questo teorema si può provare usando la teoria del grado di una applicazione fra due varietà orientate compatte. Le due varietà in questo caso sono $G/T \times T$ e G. La applicazione è $\phi : G/T \times T \to G, \quad \phi(gT, t) := gtg^{-1}$.

Si deve sfruttare il fatto generale che una applicazione con grado non nullo è suriettiva.

Nel caso in analisi resta da provare che il grado di ϕ è l'indice di T in N_T.

□

Passiamo ora a giustificare tutti gli enunciati fatti.

Ricordiamo prima di tutto il Teorema del grado.

Ricordiamo che una varietà M di dimensione n è orientabile se esiste una $n-$forma ψ che non è mai nulla. Una tale forma si dirà forma di orientazione.

Se M è orientabile e ψ_1, ψ_2 sono due forme di orientazione si ha $\psi_1 = f(m)\psi_2$ dove $f(m)$ è una funzione che non è mai nulla. Se M è connessa si ha allora che $f(m)$ ha un segno costante. Se $f(m)$ è positiva si dice che ψ_1, ψ_2 definiscono la stessa classe di orientazione altrimenti definiscono orientazioni opposte.

Siano dunque M, N due varietà compatte orientate della stessa dimensione n e $\phi : M \to N$ una applicazione C^∞. Dato un punto $m \in M$ diremo che m è un punto regolare di ϕ se il differenziale $d\phi_m$ è invertibile. Diremo che $n \in N$ è un valore regolare se $\phi^{-1}(n)$ è formata da soli valori regolari.

In questo caso necessariamente $\phi^{-1}(n)$ è un insieme finito. Poichè e due varietà sono orientate si può scrivere la matrice jacobiana utrilizzando due sistemi di coordinate compatibili con la orientazione. Il segno della matrice Jacobiana dipende solo dalle due orientazioni e non dalle coordinate scelte. Poniamo $\sigma(m) := \pm 1$ tale segno.

Teorema del grado. *I valori regolari formano un aperto N_{reg} di N, se $n \in N_{reg}$ si ha che $\sum_{m \in \phi^{-1}(n)} \sigma(m)$ non dipende dal punto dato. Tale numero si chiama grado della applicazione detto* $\deg(\phi)$.

Il grado si può anche calcolare prendendo una forma di orientazione ψ per N normalizzata con $\int_N \psi = 1$ e si ha:

$$\deg(\phi) = \int_M \phi^*(\psi). \tag{1.2.3}$$

Cenni sulla dimostrazione di questo teorema.

Si procede in vari passi.

a) Prima di tutto si estendono le nozioni alle varietà con bordo, se M è una varietà connessa orientata con bordo non vuoto si prova che una forma di orientazione si può scrivere come $d\theta$ con θ una $n-1$ forma. Per il Teorema di Stokes si ha che $\int_M \psi = \int_{\partial M} \theta$.

b) Si prova il Lemma di Sard, l'immagine tramite ϕ dei punti non regolari ha misura nulla in N.

c) Preso un valore regolare $n \in N_{reg}$ si può trovare un intorno sferico D di n su cui la controimmagine è un rivestimento con un certo numero k di fogli $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ diffeomorfi a palle chiuse con bordo sfere $n-1$ dimensionali.

d) Si considera $M^0 := M - \cup_i \mathring{\Delta}_i$ che è una varietà con bordo la unione dei bordi delle palle Δ_i.

e) Si scrive l'integrale:

$$\int_{M^0} \phi^*(\psi) = -\sum_i \int_{\partial \Delta_i} \phi^*(\theta), \quad d\theta = \psi, \quad \text{su} \quad N^0$$

si ripete questa formula per sfere $\Delta_{i,\epsilon}$ per $\epsilon \to 0$.

f) Se m_i è il centro della palla Δ_i e $\phi(m_i) = n$ si prova che $\int_{\partial\Delta_i} \theta = \sigma(m_i) + O(\epsilon)$ e si passa al limite.

Nel caso che stiamo analizzando $\phi : G/T \times T \to G$ bisogna premettere varie considerazioni.

La prima è che, su un gruppo di Lie G di dimensione n possiamo sempre fissare una $n-$forma ψ non nulla ed invariante a sinistra, fissando una base $\psi_1, \ldots, \psi_n$ di 1-forme invarianti a sinistra e definendo $\psi := \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$. Questa forma, nel caso di G compatto si può normalizzare in modo da avere $\int_G \psi = 1$.

Tale forma definisce una misura di Haar invariante a sinistra.

Nel caso di G compatto la forma ψ è anche invariante a destra, in quanto la rappresentazione aggiunta induce un omomorfismo $g \to Ad(g)$ che, essendo G compatto e connesso è formato di matrici di determinante 1.

Dato in generale un gruppo di Lie G ed un sottogruppo di Lie H,

Lemma. *L'esistenza di una forma di grado massimo G invariante su G/H è equivalente al fatto che H operi sullo spazio tangente di G/H, che è l'algebra di Lie di G modulo quella di H, con trasformazioni di determinante 1.*

Dim. Sia $m := \dim G/H$ e ψ_1 un elemento non nullo di $\wedge^m T_H(G/H)$. preso un punto $gH \in G/H$ vogliamo definire $\psi_{gH} := g^*(\psi_1)$ dove g è la moltiplicazione per g. Il fatto che questo sia ben definito dipende dalla ipotesi. Se $h \in H$ abbiamo $(gh)^*(\psi_1) = g^*(h^*\psi_1) = g^*(\psi_1)$. Che la definizione dia anche una forma invariante è ovvio, che sia C^ω segue utilizzando la sezione trasversa $esp(U)$ che definisce una carta di G/H. $\square$

Di nuovo, se H è connesso e compatto questo avviene. In particolare su G/T abbiamo una tale forma invariante. Una scelta di una tale forma in particolare fornisce una orientazione di G/T. Inoltre per il teorema del Dini, si deve avere che la forma, nel punto H di G/H deve essere una forma di volume che moltiplicata per la forma di volume di T fornisce la forma di volume per G in 1.

Teorema. *Siano $\psi_{G/H}, \psi_T, \psi_G$ le forme di orientazioni invarianti risp. a sinistra per G per T e per G sia a destra che a sinistra. Normalizzate in modo da dare misura di Haar 1 e tali che ϕ preservi le orientazioni. Si ha:*

$$(1.2.4) \qquad \phi^*(\psi) = D(gT,t)\psi_{G/H} \wedge \psi_T, \quad D(gT,t) = \prod_i (1 - \mu_i(t)). \quad \textit{formula di Weyl.}$$

Dim.

Bisogna calcolare lo Jacobiano, in un punto (gT, t) di ϕ, e poi esprimerne il determinante in basi il cui prodotto esterno dia rispettivamente le due forme di orientazione. Si ha $\phi(gT, t) = gtg^{-1}$. Per farlo lo comporremo con due diffeomorfismi

$$L_g : G/T \times T \to G/T \times T, \quad L_g(hT, u) := (ghT, u)$$

$$C_{g,t} : G \to G, \quad C_g(x) := g^{-1}xgt^{-1}.$$

Per costruzione tali diffeomorfismi preservano le forme di orientazione.

Si ha che $L_g(1T, t) = (gT, t)$ mentre $C_g\phi(gT, t) = 1$. Usiamo le coordinate locali in G/T date da $esp(v)$, $v \in V$ dove V è il complementare T invariante di $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{g}$ la cui complessificazione à $V_{\mathbb{C}} := \oplus_{\mu \in \hat{T}} \mathfrak{g}_\mu$ (un complementare canonico alla algebra di Lie di T). In un intorno di $t \in T$ usiamo le coordinate locali $esp(a)t$ dove a è in un intorno di 0 nell'algebra di Lie. Il diffeomorfismo composto è dunque:
(1.2.5)
$$(v, a) \to (g\, esp(v)T, esp(a)t) \to g\, esp(v)esp(a)t\, esp(v)^{-1}g^{-1} \to esp(v)esp(a)t\, esp(v)^{-1}t^{-1}.$$

Sfruttiamo ora il fatto che $t\, esp(v)^{-1}t^{-1} = esp(-Ad(t^{-1})v)$.

A livello di spazi tangenti il differenziale in $(0, 0)$ è dunque:

$$(v, a) \to (v - Ad(t^{-1})v, a)$$

Per calcolare il determinante di questa trasformazione possiamo complessificare, prendere una base di autovettori v_i di autovalore μ_i ed abbiamo come determinante:

$$\prod_i (1 - \mu_i(t)). \tag{1.2.6}$$

Abbiamo dunque che (gT, t) è un punto regolare di ϕ se e solo se t è un elemento regolare. □

È utile riscrivere questa formula come segue.

Il toro T agisce sulla algebra di Lie in modo tale da fornire una somma diretta nella parte invariante e di una somma diretta di rappresentazioni di dimensione 2 su cui un elemento $t = e^{2\pi i a} \in T$ opera come rotazioni di un qualche angolo $2\pi\theta_j(a)$. Complessificando questo spazio 2- dimensionale fornisce i due autovalori $e^{\pm 2\pi i\theta_j(a)}$. Pertanto ogni radice μ_i si accoppia con la sua coniugata. Se prendiamo quindi in qualche modo[2] i vari angoli di rotazione $\theta_j(a)$ possiamo scrivere:

$$\prod_i (1-\mu_i(t)) = \prod_j (1-e^{2\pi i\theta_j(a)})(1-e^{-2\pi i\theta_j(a)}) = \prod_j e^{-\pi i\theta_j(a)}(1-e^{2\pi i\theta_j(a)})e^{\pi i\theta_j(a)}(1-e^{-2\pi i\theta_j(a)})$$

$$= \overline{V}\, V, \quad V := \prod_j (e^{\pi i\theta_j(a)} - e^{-\pi i\theta_j(a)}) = e^{1/2 \sum_j 2\pi i\theta_j(a)} \prod_j (1 - e^{-2\pi i\theta_j(a)})$$

[2] vi è un modo coerente che da luogo alla nozione di *radici positive*

Corollario. *Il grado di ϕ è l'indice di T in N_T.*

Dim. A meno di coniugare con g possiamo ridurci a studiare $m := (T, t)$. Calcoliamo

$$\phi^{-1}\phi(m) = \{(gT, u) \,|\, gug^{-1} = t\}.$$

Poiché T è l'unico toro massimale contenente t si deve avere $gTg^{-1} \subset T$ ma avendo la stessa dimensione $gTg^{-1} = T$ e $g \in N_T$. Ora sappiamo che il gruppo di Weyl permuta le radici e ne segue che tutti i fattori $\prod_i(1 - \mu_i(t))$ sono uguali sulla fibra. □

Un corollario molto importante di questa formula è:

Teorema formula di integrazione di Weyl. *Se f è una funzione invariante per coniugazione su G abbiamo:*

$$\int_G f(g)dg = \frac{1}{|W|}\int_T f(t)V(t)\overline{V}(t)dt. \tag{1.2.7}$$

Dim. Per definizione $\int_G f(g)dg = \int_G f(g)\psi$ ed essendo $\phi : G/T \times T \to G$ un morfismo di grado $|W|$ si ha $\int_G f(g)\psi = \frac{1}{|W|}\int_{G/T\times T} \phi^*(f(g)\psi)$. dalla formula 1.2.4 si ha:

$$\int_{G/T\times T} \phi^*(f(g)\psi) = \int_{G/T\times T} f(gtg^{-1})V(t)\overline{V}(t)\psi_{G/H} \wedge \psi_T$$

Per ipotesi $f(gtg^{-1}) = f(t)$ e quindi si separa l'integrale, essendo $\int_{G/T} \psi_{G/H} = 1$:

$$\int_{G/T\times T} f(gtg^{-1})V(t)\overline{V}(t)\psi_{G/H} \wedge \psi_T = \int_T f(t)V(t)\overline{V}(t)dt.$$

□

ESEMPI Il gruppo $U(n, \mathbb{C})$.

Se T è un toro contenuto in $U(n, \mathbb{C})$, dalla teoria delle rappresentazioni dei tori sappiamo che esiste una base ortonormale in cui T è diagonale, quindi T è coniugato ad un sottogruppo del toro D delle matrici diagonali unitarie.

Scriviamo una matrice X di D come diagonale $x_1, \ldots, x_n$ $|x_1| = 1$. Abbiamo che l'albegra di Lie complessificata di $U(n, \mathbb{C})$ sono le matrici. Tali matrici si decompongono nelle matrici diagonali, la complessificazione dell'algebra di Lie di D, e la somma degli spazi $\mathbb{C}e_{ij}$, $i \neq j$. Su $\mathbb{C}e_{ij}$ una matrice diagonale X agisce per coniugazione (azione aggiunta) con l'autovalore $x_i x_j^{-1} = x_i \overline{x}_j$. Si ha $(1 - x_i x_j^{-1})(1 - x_j x_i^{-1}) = (x_j - x_i)(\overline{x}_j - \overline{x}_i)$ dunque

$$\prod_{i\neq j}(1 - x_i x_j^{-1}) = V(X)\overline{V}(X), \quad V(X) = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Il normalizzatore N_D è formato da matrici unitarie che trasformano in se meno di fattori di scala la base ortonormale standard che è formata dagli autovettori di D. Ogni trasformazione unitaria di questo tipo è il prodotto di una permutazione per una matrice diagonale abbiamo:

$$N_D = S_n \ltimes D, \quad \text{prodotto semidiretto.} \tag{1.2.8}$$

OSSERVAZIONE ESERCIZIO Si può identificare l'algebra delle funzioni continue su $U(n, \mathbb{C})$ invarianti per coniugazione con l'algebra delle funzioni continue su D simmetriche.

1.3 Corollari del teorema di coniugazione

Sia G un gruppo di Lie compatto e connesso e T un toro massimale.

Sia $Z(T)$ il suo centralizzatore, vogliamo provare prima di tutto che:

PROPOSIZIONE. $Z(T) = T$.

DIM. Infatti sia $x \in Z(T)$ e sia T' un toro massimale contenente x, quindi T e T' sono nel centralizzatore di x e quindi anche nella componente connessa $Z_0(x)$ di tale centralizzatore.

Per il Torema di coniugazione, applicato a $Z_0(x)$, x è coniugato ad un elemento di T in $Z_0(x)$ ma, siccome x è nel centro di $Z_0(x)$ ne segue che $x \in T$. $\square$

Sia ora N_T il normalizzatore di T,

LEMMA. *Due elementi di T sono coniugati in G se e solo se sono coniugati tramite N_T.*

DIM. Sia $x = gyg^{-1}$, $x, y \in T$, i tori T, gTg^{-1} contengono entrambi x quindi esiste un $h \in Z(x)$ nel centralizzatore di x tale che $T = (hg)T(hg)^{-1}$ ovvero $hg \in N_T$ ed evidentemente $x = (hg)y(hg)^{-1}$. $\square$

Per il prossimo teorema abbiamo bisogno di una premessa. Prendiamo un elemento $g \in G$ e consideriamo il sottogruppo $\{g\}$ chiuso generato da g ovvero la chiusura del sottogruppo ciclico $\{g^m\}$, $m \in \mathbb{Z}$ generato da g. Per continuità il gruppo che si ottiene è abeliano, diremo che $\{g\}$ è *topologicamente generato da g*.

Prendiamo ora un toro T, vogliamo provare che:

LEMMA. *i) Un elemento $g \in T$ genera topologicamente T se e solo se non esiste un carattere χ di T non banale con $\chi(g) = 1$.*

ii) Per quasi tutti gli elementi $g \in T$ si ha che $\{g\} = T$.

DIM. i) Se g genera topologicamente T e se $\chi(g) = 1$ per continuità si ha che $\chi = 1$ è banale.

Viceversa un elemento g non genera topologicamente T se e solo se è contenuto in un sottogruppo di Lie proprio U. Si ha che T/U è un toro non banale e quindi ha un carattere χ non banale.

ii) I caratteri non banali sono un insieme numerabile e il nucleo di un carattere è un sottotoro di codimensione 1, si vede facilmente che la unione di questo insieme numerabile di sottotori è *piccola*, per esempio ha misura 0 ed il complementare è ovunque denso. un modo semplice di vederlo è di passare al rivestimento universale e vedere uno spazio vettoriale di dimensione n meno una infinità numerabile di sottospazi di dimensione $n-1$.
$\square$

TEOREMA 1. *i) Ogni elemento $g \in G$ è contenuto in un toro massimale.*
ii) Due tori massimali sono coniugati.
iii) L'intersezione di tutti i tori massimali è il centro di G.

DIM. i) Dal teorema di coniugazione esiste $x \in G$ e $xgx^{-1} \in T$, da cui otteniamo $g \in g^{-1}Tg$ che è un toro massimale.

ii) Siano T, U due tori massimali. Prendiamo un $g \in U$ per cui $U = \{g\}$. Dal teorema di coniugazione esiste $x \in G$ e $xgx^{-1} \in T$, da cui otteniamo per continutità che $xUx^{-1} \subset T$. Evidentemente xUx^{-1} è un toro massimale quindi $xUx^{-1} = T$.

Sia x nel centro di G, da i) si ha che x è in un toro massimale T. Sappiamo che tutti i tori massimali sono coniugati. Ma per ogni $g \in G$ si ha $gxg^{-1} = x$ per cui $x \in gTg^{-1}$ per ogni g. Viceversa se x è contenuto in ogni toro massimale x commuta con tutti gli elementi di ogni toro massimale, ma G è unione di tali tori e quindi x è nel centro di G.
$\square$

PROPOSIZIONE. *Per un gruppo di Lie compatto G le seguenti proprietà sono equivalenti:*

i) G è topologicamente generato da un elemento g.

ii) G è commutativo e detto G^0 la componente connessa di 1 si ha che $G/G^0 = \mathbb{Z}/(m)$ è un gruppo ciclico.

iii) $G = T \times \mathbb{Z}/(m)$ con T un toro.

DIM. i) $\implies$ ii). Infatti se G è topologicamente generato da un elemento g evidentemente ogni elemento che commuta con g commuta anche con G per continuità, in particolare G è commutativo. Inoltre G/G^0 è un gruppo discreto finito topologicamente generato dalla classe di g e quindi ciclico.

ii) $\implies$ iii). G^0 è un gruppo commutativo connesso compatto quindi un toro T. Sia $x \in G$ un generatore modulo $G^0 = T$ di ordine m. $x^m = b \in T$, poiché $T = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^n$ se b è la classe di un vettore v si ha che $b = c^m$ con c la classe di v/m. In definitiva cambiando x con $y := x/c$ si vede che $G = T \times \mathbb{Z}/(m)$.

iii) $\implies$ i). Sia $u \in T$ un generatore topologico, e $u = t^m$. Sia y il generatore del fattore $\mathbb{Z}/(m)$. Si ha che ty è un generatore topologico di G, in effetti $(ty)^m = u$ quindi la chiusura del sottogruppo generato da ty contiene T, contiene anche $y = (ty)t^{-1}$ e quindi contiene $\mathbb{Z}/(m)$. $\square$

ESERCIZIO Un gruppo di Lie non compatto è topologicamente generato da 1 elemento se e solo se è $\mathbb{Z}$.

Completiamo l'analisi con un Teorema che si usa in seguito:

Teorema 2. *Sia G un gruppo di Lie compatto connesso. Il centralizzatore $Z(S)$ di un toro $S \subset G$ è connesso ed è l'unione dei tori massimali di G che contengono S.*

Dim. Dai teoremi già provati basta provare che, se $x \in Z(S)$ si ha che S ed x sono contenuti in un toro T. per questo sia B la chiusura del sottogruppo generato da x, S. Evidentemente B è un gruppo abeliano, pertanto la sua componente connessa B^0 è un toro. Inoltre $S \subset B^0$ e B è generato da x, B^0, per cui B/B^0 è un gruppo ciclico $\mathbb{Z}/(m)$ generato dalla classe di x. Dalla proposizione precedente B è topologicamente generato da un elemento g e, dal teorema precedente g è contenuto in un toro massimale T. $\square$

2 Funzioni di Schur

2.1 Polinomi simmetrici. Per capire la teoria dei caratteri di $U(n, \mathbb{C})$ dobbiamo preliminarmente studiare i polinomi simmetrici ed antisimmetrici a coefficienti interi.

Definizione. *Un polinomio f nelle variabili $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, è detto funzione alterna se, per ogni permutazione σ delle variabili*

$$f^\sigma = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \epsilon_\sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ϵ_σ il segno della permutazione.

Il determinante di Vandermonde è un polinomio alterno , $V(x) := \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

La prinicipale osservazione sui polinomi alterni è la seguente.

Proposizione. *Un polinomio $f(x)$ è alterno se e solo se è della forma $f(x) = V(x)g(x)$ con $g(x)$ un polinomio simmetrico.*

Proof. Sostituiamo, in un polinomio alterno f ad una variabile x_j una variabile x_i per $i \neq j$. Otteniamo lo stesso polinomio se prima scambiamo x_i e x_j in f. Poichè in questo modo f cambia di segno, per questa sostituzione f diventa 0.

Questo significa che f è divisibile per $x_i - x_j$; poiché i, j sono arbitrarii f è divisibile per $V(x)$. Scrivendo $f = V(x)g$ è chiaro che g è simmetrico .

Più formalmente, se A, S denotano gli insiemi dei polinomi **antisimmetrici** e **simmetrici** abbiamo:

Proposizione. *Lo spazio A dei polinomi antisimmetrici è un modulo libero di rango 1 sull'anello S dei polinomi simmetrici generato da $V(x)$ ovvero $A = V(x)S$.*

In particolare una qualunque base integrale di A fornisce, dividendo per $V(x)$, base integrale di S. In questo modo otterremo le *funzioni di Schur*.

Per capire la costruzione consideriamo nei polinomi $Z[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ la base data dai monomi (che sono permutati da S_n).

A meno di permutare le variabili un monomio può essere portato in un altro della forma $x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \ldots x_n^{m_n}$ in cui gli esponenti $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \cdots \geq m_n \geq 0$ sono una sequenza non crescente.

Sia f un polinomio antisimmetrico e (ij) una transposizione. Applicando questa transposizione a f il polinomio cambia segni mentre la transposizione fissa tutti i monomi in cui x_i, x_j hanno lo stesso esponente.

Segue che tutti i monomi che hanno coefficiente non 0 in f devono avere esponentsi distinti. Data una sequenza di esponenti $m_1 > m_2 > m_3 > \cdots > m_n \geq 0$ i coefficienti del monomio $x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \ldots x_n^{m_n}$ e di $x_{\sigma(1)}^{m_1} x_{\sigma(2)}^{m_2} x_{\sigma(3)}^{m_3} \ldots x_{\sigma(n)}^{m_n}$ differiscono per il segno di σ.

Ne segue che:

Teorema. *Le funzioni:*

$$A_{m_1 > m_2 > m_3 > \cdots > m_n \geq 0}(x) := \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma x_{\sigma(1)}^{m_1} x_{\sigma(2)}^{m_2} \ldots x_{\sigma(n)}^{m_n},$$

sono una base integrale dei polinomi antisimmetrici.

È conveniente usare le convenzioni seguenti. Si consideri la sequenza

$$\varrho := (n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0),$$

Lemma. *L'applicazione*

$$\lambda = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) \longrightarrow \lambda + \varrho = (p_1 + n - 1, p_2 + n - 2, p_3 + n - 3, \ldots, p_n)$$

è una corrispondenza biunivoca fra sequenze decrescenti e strettamente decrescenti.

Indichiamo con $A_{\lambda+\varrho}$ la correspondente funzione antisimmetrica. La possiamo esprimere come determinante della matrice M_λ che ha nella posizione i, j l'elemento $x_j^{p_i+n-i}$.

Poniamo $S_\lambda(x) := A_{\lambda+\varrho}/V(x)$ la *funzione di Schur* associata a λ.

Possiamo identificare λ ad una *partizione* con $n-$parti, dell'intero $\sum p_i$ e scrivere $\lambda \vdash \sum_i p_i$.

Abbiamo (con le notazioni di 1.1):

Teorema. *Le funzioni S_λ, con $\lambda \vdash m$ e $ht(\lambda) \leq n$ sono una base integrale della parte di grado m dell'anello delle funzioni simmetriche.*

Si noti che il determinante di Vandermonde è la funzione alterna A_ϱ e $S_0 = 1$.

Se $\lambda = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ è una partizione e a un intero positivo denotiamo con $\underline{a}$ la partizione $(a, a, a, \dots, a)$ allora

$$A_{\lambda+\varrho+\underline{a}} = (x_1x_2\dots x_n)^a A_{\lambda+\varrho},\ S_{\lambda+\underline{a}} = (x_1x_2\dots x_n)^a S_\lambda. \tag{6.2.1}$$

Possiamo ora estendere questa analisi al caso dell'anello $\mathbb{Z}[x_1^{\pm1}, \dots, x_n^{\pm1}]$ dei *polinomi di Laurent* che si può identificare all'anello dei caratteri del toro $n-$dimensionale.

In questo caso si passa dai polinomi ai polinomi di Laurent moltiplicando per potenze anche negative di $x_1x_2\dots x_n$ e si ottiene che possiamo definire le funzioni di Schur $S_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ con $\lambda := h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n$ interi qualunque (anche negativi), tali funzioni sono una base dei polinomi simmetrici di Laurent.

Teorema. *Le funzioni di Schur $S_\lambda(x) := S_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ con $\lambda := h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n$ interi qualunque sono i caratteri irriducibili di $U(n, \mathbb{C})$.*

Dim. Abbiamo dalla usuale ortogonalità dei caratteri di D:

$$\frac{1}{n!}\int_D S_\lambda(x)\overline{S}_\mu(x)V(x)\overline{V}(x)dx = \frac{1}{n!}\int_T A_{\lambda+\varrho}(x)\overline{A}_{\mu+\varrho}(x)dx = \delta_\lambda^\mu$$

d'altra parte sia χ un carattere irriducibile di $U(n, \mathbb{C})$ ristretto alle matrici diagonali è un carattere di D invariante per coniugazione tramite S_n pertanto è un polinomio di Laurent simmetrico ed a coefficienti positivi e quindi è la combinazione lineare a coefficienti interi di funzioni $S_\lambda(x)$ sia $\chi = \sum_\lambda n_\lambda S_\lambda(x)$. Dalla formula di integrazione di Weyl si ha:

$$1 = \int_{U(n,\mathbb{C})} \chi(g)\overline{\chi}(g)dg = \frac{1}{n!}\int_D (\sum_\lambda n_\lambda S_\lambda(x))(\sum_\lambda n_\lambda \overline{S}_\lambda(x))V(x)\overline{V}(x)dx = \sum_\lambda n_\lambda^2.$$

Segue che per un λ si deve avere $\chi(x) = \pm S_\lambda(x)$ ora il coefficiente direttivo di $S_\lambda(x)$ è 1 e quindi essendo χ una combinazione a coefficienti positivi di monomi segue che $\chi(x) = S_\lambda(x)$ (segue inoltre che $S_\lambda(x)$ è una combinazione a coefficienti positivi di monomi[3]).

Poiché i caratteri irriducibili sono una base ortonormale delle funzioni di classe ogni $S_\lambda(x)$ deve essere un carattere irriducibile. $\square$

2.2 Caratteri gruppo di Weyl, prima parte

Sia $p : X \to Y$ una applicazione continua e suriettiva fra due spazi di Hausdorf compatti si ha necessariamente che Y ha la topologia quoziente.

Sia G un gruppo topologico che opera in modo continuo su uno spazio X denotiamo con X/G l'insieme delle G orbite di X. Abbiamo una applicazione $p : X \to X/G$ che ad un punto $x \in X$ associa la sua $G-$orbita.

[3] vi è una notevole combinatoria quella dei *tableaux standard* che spiega questa positività in modo chiaro.

Possiamo ora dare a X/G la topologia quoziente, che ha dunque la proprietà di identificare le funzioni continue su X/G con le funzioni continue $G-$invarianti su X.
Gli aperti di X/G corrispondono agli aperti di X che siano $G-$stabili.
In generale questa topologia quoziente **non è di Hausdorf**, questo avviene se esistono orbite non chiuse di G, in questo caso, se $\mathcal{O}_1$ è una orbita nella chiusura di un'altra orbita $\mathcal{O}_2$ queste due orbite, come punti di X/G non si possono separare. Questo fenomeno non può avvenire se G è compatto infatti:

PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo compatto che opera in modo continuo su uno spazio X localmente compatto. X/G con la topologia quoziente, è uno spazio di Hausdorf.*

DIM. Siano O_1, O_2 due orbite distinte, sono chiuse in quanto G è compatto. Fissato $p \in O_1$ sia A_p un suo intorno compatto con $A_p \cap O_2 = \emptyset$. L'insieme GA è un intorno compatto di O_1 ed ancora $GA \cap O_2 = \emptyset$. Possiamo dunque ripetere l'argomento. Prendiamo un punto $q \in O_2$ ed un intorno compatto B di q con $B \cap GA = \emptyset$ abbiamo $GA \cap GB = \emptyset$ e la separazione delle orbite.
$\square$

LEMMA. *Sia G un gruppo di Lie compatto definiamo lo spazio quoziente $G//G$ formato dalle classi coniugate di G con la topologia quoziente.*
$G//G$ è omeomorfo a T/W.

DIM. La applicazione $T \to G \to G//G$ è continua e si fattorizza in una applicazione biunivoca e continua $i : T/W \to G//G$ da (Lemma 1.3). Pertanto essendo T/W compatto e $G//G$ di Hausdorf per la proposizione precedente, i è un omeomorfismo. $\square$

Questo lemma permette di dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE. *i) Sia $C^0_G(G)$ l'algebra delle funzioni continue su G invarianti per coniugazione, la restrizione di tali funzioni a T è un isomorfismo di algebre di Banach con le funzioni continue su T invarianti per l'azione di W.*

ii) Tale restrizione si estende ad un isomorfismo di spazi di Hilbert, fra lo spazio $L^2_G(G)$ delle funzioni L^2 su G invarianti per coniugazione e lo spazio di Hilbert delle funzioni L^2 su T invarianti per W e rispetto alla misura $V(t)\overline{V}(t)dt$.

DIM. i) segue dal Lemma precedente. ii) Segue dalla formula di integrazione di Weyl.
$\square$

Sia ora W una rappresentazione unitaria di dimensione finita di un gruppo compatto connesso G e T un toro massimale.

W si decompone in spazi peso $W = \oplus_{\chi \in \hat{T}} W_\chi$, come nella rappresentazione aggiunta si ha che, se $g \in N_T$, $gW_\chi = W_{\chi^g}$. Pertanto abbiamo:

PROPOSIZIONE. *Il carattere di una rappresentazione irriducibile, ristretto al toro massimale T è un carattere di T invariante per il gruppo di Weyl.*

Per potere utilizzare questa proposizione al fine di calcolare i caratteri irriducibili di un gruppo di Lie compatto connesso è necessario capire meglio la teoria dei pesi associati ad un sistema di radici.

3 Radici

3.1 $SU(2)$ In questo paragrafo studiamo le rappresentazioni di $SU(2)$ come passo preliminare per la teoria generale.

Per l'algebra di Lie $su(2)$ (matrici 2×2 antihermitiane a traccia 0) di $SU(2)$ possiamo prendere come base:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix}$$

La complessificazione di $su(2)$ è l'algebra $sl(2, \mathbb{C})$ per cui è conveniente prendere come base le tre matrici.

$$e := \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad h := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad f := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

che soddisfano le regole di commutazione:

(3.1.1) $$h = [e, f], \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f.$$

Sia V una rappresentazione irriducibile di $sl(2, \mathbb{C})$ di dimensione finita, sia u un autovettore di h di autovalore un numero λ abbiamo:

$$h(eu) = [h, e]u + ehu = (2 + \lambda)eu, \qquad h(fu) = [h, f]u + fhu = (-2 + \lambda)eu$$

ovvero eu è autovettore di autovalore $2+\lambda$ e similmente per fu. iterando $e^k u$ è autovettore di autovalore $2k + \lambda$ pertanto deve esistere un k per cui $e^k u \neq 0, \quad e^{k+1}u = 0$.

In altre parole esiste un vettore $v \neq 0$ autovalore di h di un qualche autovalore m per cui $ev = 0$.

Un tale vettore si dice *un vettore di peso più alto.*

Applichiamo ora a v iterativamente f ottenendo vettori $f^h v$ di peso (rispetto ad h) $m - 2h$.

Dato che questi pesi sono distinti i vettori non nulli che otteniamo sono linearmente indipendenti. Abbiamo

$$ef^k v = [e, f]f^{k-1}v + fef^{k-1}v = kf^{k-1}v + fef^{k-1}v = (m - 2k + 2)f^{k-1}v + fef^{k-1}v.$$

Questa formula, posto $ef^k v = c_k f^{k-1}v$ ci da la ricorsione $c_k = m - 2(k-1) + c_{k-1}, \ c_0 = 0$. Applicata in modo ricorsivo, ci da infine:

(3.1.2) $$ef^k v = k(m - k + 1)v.$$

Sia ora $k > 0$ l'intero per cui $f^{k-1}v \neq 0$ e $f^k v = 0$, abbiamo pertanto:

$$0 = ef^k v = k(m - k + 1)v, \quad \implies m = k - 1$$

Abbiamo dunque:

TEOREMA. *Per ogni intero $m \geq 0$ esiste una unica rappresentazione irriducibile di $sl(2,\mathbb{C})$ di dimensione $m+1$ con una base $v, fv, \ldots, f^{h-1}v$ e con le regole:*

$$ef^k v = k(m+1-k)v, \quad hf^k v = (m-2k)f^k v. \tag{3.1.3}$$

DIM. Dalla discussione precedente abbiamo che una rappresentazione irriducibile è necessariamente della forma precedente, resta dunque da verificare soltanto che le formule precedenti forniscono una rappresentazione irriducibile, il che si può fare facilmente. Questa rappresentazione si può anche vedere concretamente come la azione sui polinomi di grado m in 2 variabili, indotta dalle sostituzioni delle variabili. $\square$

OSSERVAZIONE Gli autovalori dell'elemento h in una rappresentazione di $SL(2,\mathbb{C})$ vengono detti i *pesi* della rappresentazione. I corrispondenti autovettori *vettori peso (weight vectors).*

Abbiamo visto che i pesi sono interi. Inoltre in una rappresentazione irriducibile V_m compaiono i pesi $m, m-2, m-4, \ldots, -m+4, -m+2, -m$ con molteplicità 1.

i) In una rappresentazione irriducibile pari tutti i pesi sono pari ed esattamente i pari fra $-m, m$ il peso 0 appare.

ii) In una rappresentazione irriducibile dispari tutti i pesi sono dispari ed esattamente i dispari fra $-m, m$ il peso 0 non appare ma appare il peso 1.

iii) Una rappresentazione qualunque si decompone nella somma diretta di a rappresentazioni irriducibili pari e b irriducibili dispari con a la molteplicità del peso 0 e b la molteplicità del peso 1.

Dalla teoria generale integrando queste sono rappresentazioni anche del gruppo di Lie $SL(2,\mathbb{C})$ e di $SU(2)$.

ESERCIZIO i) Provare che le rappresentazioni V_m sono anche rappresentazioni di $SO(3,\mathbb{R})$ se e solo se m è pari.[4]

ii) Determinare le rappresentazioni irriducibili *reali* di $SU(2)$.

3.2 Radici Sia T un toro con algebra di Lie $\mathfrak{t}$, abbiamo l'esponenziale $esp : \mathfrak{t} \to T$ con nucleo un reticolo Λ.

Dato un carattere $\mu : T \to SU(1)$ possiamo scrivere:

$$\mu(esp(t)) = e^{\mu_0(t)}, \ \mu_0 : \mathfrak{t} \to i\mathbb{R}, \quad \mu_0(\Lambda) \subset 2\pi i\mathbb{Z}. \tag{3.2.1}$$

Posto $\Gamma := \frac{1}{2\pi} i\Lambda$, un reticolo in $i\mathfrak{t}$, a volte è quindi conveniente identificare il gruppo abeliano dei caratteri di T con il gruppo additivo $\Gamma^* := \hom(\Gamma,\mathbb{Z})$ tramite la formula $e^{\mu_0(t)}, \ \mu_0 \in \Gamma^*$.

[4]Nel linguaggio della fisica il numero $m/2$ è detto lo *spin* della rappresentazione quindi si parla di rappresentazioni *intere* e *semi-intere*, questo formalismo mette in evidenza il fatto che un generatore infinitesimale delle rotazioni in $SU(2)$ è $1/2$ del generatore per $SO(3,\mathbb{R})$.

Ovviamente Γ^* è un reticolo dello spazio duale $\hom(i\mathfrak{t}, \mathbb{R})$.

Abbiamo visto che, complessificando l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di un gruppo compatto G e scegliendo un toro massimale T di G con algebra di Lie $\mathfrak{t}$ abbiamo una decomposizione di $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ in spazi di radici $\mathfrak{g}_\mu = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid Ad(u)x = \mu(u)x,\ u \in T\}$ ovvero $[t, x] = \mu_0(t)x,\ t \in \mathfrak{t}$.

CONVENZIONE D'ora in poi penseremo alle radici sempre nella forma *lineare* ovvero come funzioni lineari su $\mathfrak{t}$ o equivalentemente sulla complessificata $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. Sullo spazio $i\mathfrak{t}$ la forma di Killing è positiva ed abbiamo quindi uno spazio Euclideo. Tramite questa struttura Euclidea identifichiamo $i\mathfrak{t}$ con il suo duale $i\mathfrak{t}^*$. Quindi possiamo pensare alle radici in particolare come vettori di uno spazio Euclideo.

Indichiamo con $\Phi \subset E$ le radici.

Spesso conviene estendere anche le radici alle forme lineari che inducono in $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$.
Da questo punto di vista la forma di Killing identifica $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ al suo duale (complesso) e lo spazio Euclideo è il sottospazio del duale formato dalle forme lineari reali su $i\mathfrak{t}$ (o immaginarie su $\mathfrak{t}$).

PROPOSIZIONE. *Il gruppo di Weyl W opera come isometrie dello spazio Euclideo E permutando le radici.*

DIM. Abbiamo già visto che il gruppo di Weyl permuta le radici. Il fatto che operi come isometrie discende dal fatto che questa azione è identificata (per dualità) alla restrizione a $\mathfrak{t}$ della coniugazione per N_T. Sappiamo che la coniugazione preserva la forma di Killing.
□

Sia ora $V \subset \mathfrak{g}$ una rappresentazione irriducibile di dimensione 2 del toro T. Sappiamo che in una base ortogonale e_1, e_2 di V ogni elemento di $t \in T$ opera come una rotazione, si ha:

$$t(e_1) = \cos\phi\, e_1 - \sin\phi\, e_2,\ t(e_2) = \sin\phi\, e_1 + \cos\phi\, e_2,\ \implies\ t([e_1, e_2]) = [e_1, e_2]\ \implies\ [e_1, e_2] \in \mathfrak{t}.$$

In particolare $\mathfrak{t} \oplus V$ è una sottoalgebra di Lie con $[\mathfrak{t}, V] \subset V, [V, V] \subset \mathfrak{t}$. Affermiamo ora che $h := [e_1, e_2] \neq 0,\ [h, e_i] \neq 0$.

Se $[e_1, e_2] = 0$ esponenziando questi elementi abbiamo un gruppo abeliano normalizzato da T. La sua chiusura è un toro normalizzato da T, ma un toro non ha un gruppo continuo di automorfismi e quindi una contraddizione T commuta con V.

Se $[h, V] = 0$ abbiamo che V stabilizza ogni autospazio di h, in particolare uno con autovalore $\alpha \neq 0$ su questo autospazio h è un commutatore e quindi ha traccia 0 il che implica $\alpha = 0$ di nuovo una contraddizione.

Essendo h un generatore infinitesimale per un gruppo ad un parametro che opera come rotazioni, per un valore reale t abbiamo che h su V induce la matrice $\begin{vmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{vmatrix}$, ovvero

$$[h, e_1] = te_2, \quad [h, e_2] = -te_1$$

pur di scambiare e_1 con e_2 possiamo supporre $t = a^2$ positivo. Cambiando base e ponendo $A := a^{-1}e_1, B := a^{-1}e_2$, $C := [A, B]$ abbiamo $[C, A] = B$, $[B, C] = A$ vediamo che l'algebra di Lie tridimensionale è isomorfa all'algebra di $SU(2)$ con base:

$$A := \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}, \quad B := \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad C := \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da questa discussione otteniamo:

TEOREMA. *Sia G un gruppo compatto connesso di rango 1 non commutativo, allora G è isomorfo a $SU(2)$ o ad $SO(3, \mathbb{R})$.*

DIM. Identifichiamo il toro massimale ad $SU(1)$, ogni radice si può pensare come un numero intero. Prendiamo un sottospazio V come nella analisi precedente ma supponiamo che la radice α corrispondente sia minima. Dalla analisi precedente la algebra di Lie $\mathfrak{t} \oplus V$ è isomorfa ad $su(2)$, abbiamo dunque un omomorfismo di $SU(2)$ in G e possiamo decomporre l'algebra di Lie di G in rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$. Per massimalità l'autovalore 0 deve apparire con molteplicità 1 da cui segue che le altre possibili rappresentazioni devono essere *dispari* ma allora contengono un autovalore inferiore ad α. Segue che G è tridimensionale, poiché $SU(2)$ è semplicemente connesso con centro ± 1 il teorema segue. $\square$

Torniamo ora al caso di un gruppo compatto G un toro massimale T, una rappresentazione irriducibile V di T nell'algebra di Lie che genera una algebra di Lie di dimensione 3 isomorfa ad $su(2)$, che indichiamo con $su(2)_\alpha$ ed induce un omomorfismo di $SU(2)$ in G con immagine un sottogruppo che denotiamo G_α isomorfo ad $SU(2)$ oppure ad $SU(2)/\pm 1 = SO(3, \mathbb{R})$.

Se α è una radice di T per la complessificazione di V e $T_\alpha := \ker \alpha$ il nucleo di α abbiamo che T_α commuta con $SU(2)$ in G. L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G si decompone pertanto in rappresentazioni irriducibili di $T_\alpha \times SU(2)$. Su una tale rappresentazione irriducibile, dal lemma di Schur T_α opera come scalari (tramite un carattere) e la rappresentazione rimane irriducibile se ristretta a $SU(2)$.

Inoltre se T_α^0 denota la componente connessa di T_α e $S_\alpha^1 \subset SU(2)$ è il toro 1-dimensionale generato da $esp(sh)$ si ha che esiste una ben determinata forma lineare α_0 su $\mathfrak{t}$ con $\alpha(esp(sh)) = esp(s\alpha_0(h))$ il nucleo $\mathfrak{t}_\alpha$ di α_0 è l'algebra di Lie di T_α. Infine abbiamo che la moltiplicazione $T_\alpha \times S_\alpha^1 \to T$ è una isogenia in quanto il suo differenziale è un isomorfismo di algebre di Lie.

Vogliamo verificare che Φ soddisfa una serie di proprietà che possono essere prese come gli *assiomi dei sistemi di radici.*

ASSIOMI

Un sistema di radici è un insieme finito Φ di vettori non nulli di uno spazio euclideo E che verifica le seguenti proprietà:

(1) Se $\alpha \in \Phi$ si ha $c\alpha \in \Phi$ se e solo se $c = \pm 1$.

(2) Se $\alpha \in \Phi$ e s_α indica la riflessione ortogonale rispetto all'iperpiano ortogonale ad α si ha $s_\alpha(\Phi) = \Phi$.

(3) Se $\alpha, \beta \in \Phi$ si ha:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha, \quad \langle \alpha, \beta \rangle := \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \qquad \text{interi di Cartan} \tag{3.2.2}$$

(4) Φ genera linearmente lo spazio E.

Passiamo ora a verificare che le radici definite per un gruppo di Lie semplice compatto soddisfano questi assiomi (ed un'altra condizione di irriducibilità). Definiamo dunque $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g}_\mathbb{C} \mid [t, x] = \alpha(t)x, \ \forall t \in \mathfrak{t}\}$.

Teorema. *i) Se α è una radice di $\mathfrak{t}$, 2α non è una radice (di $\mathfrak{t}$).*

ii) Le uniche radici di $\mathfrak{t}$, multiple di α sono $\pm\alpha$.

iii) $\mathfrak{g}_\alpha$ ha dimensione 1.

Dim. Consideriamo la sottoalgebra di Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ fissata dal toro T_α la cui algebra di Lie è $\mathfrak{t}_\alpha := \{t \in \mathfrak{t} \mid \alpha(t) = 0\}$. $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [t, x] = 0, \ \forall t \in \mathfrak{t}_\alpha\}$. Complessificata da la sottoalgebra $\mathfrak{g}_\mathbb{C}^{T_\alpha} = \mathfrak{t}_\mathbb{C} \oplus_{\beta \in \Phi} \mathfrak{g}_\beta^{T_\alpha}$.

Ora $\mathfrak{g}_\beta^{T_\alpha}$ è 0 a meno che $\beta = 0$ su $\mathfrak{t}_\alpha$ ovvero β è un multiplo di α. $\mathfrak{g}_\mathbb{C}^{T_\alpha} = \mathfrak{t}_\mathbb{C} \oplus_{c\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{c\alpha}$.

Dalla teoria delle rappresentazioni di $SU(2)$ potremmo avere a priori, oltre a $\mathfrak{t}_\alpha \oplus su(2)_\alpha$ anche altre rappresentazioni isomorfe alla rappresentazione V_m di peso più alto m. Se m è pari una tale rappresentazione contiene un vettore fisso per S^1_α e quindi anche per T il che è assurdo poiché $\mathfrak{t}$ esaurisce tutti i punti fissi, in particolare ne deduciamo che $2\alpha_0$ non è una radice. D'altra parte se vi fosse un V_m di peso più alto m dispari, vi sarebbe un vettore di peso $\beta := 1/2\,\alpha_0$ che sarebbe una radice. Anche questa è una contraddizione in quanto $2\beta = \alpha_0$ è radice contraddicendo quanto appena provato.

Segue che $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{t}_\alpha \oplus su(2)_\alpha$ che implica ii) e iii). $\square$

Complessifichiamo $su(2)_\alpha$ ad $sl(2)_\alpha$ con la usuale base $e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha$.

Proposizione.

$$(h, h_\alpha) = (h, [e_\alpha, f_\alpha]) = ([h, e_\alpha], f_\alpha]) = \alpha(h)(e_\alpha, f_\alpha).$$

$$(h_\alpha, h_\alpha) = (h_\alpha, [e_\alpha, f_\alpha]) = 2(e_\alpha, f_\alpha).$$

Poniamo t_α l'elemento per cui $(h, t_\alpha) = \alpha(h)$ da cui $t_\alpha = \frac{2h_\alpha}{(h_\alpha, h_\alpha)}$ e $(\alpha, \alpha) = (t_\alpha, t_\alpha) = \frac{4}{(h_\alpha, h_\alpha)}$.

Dall'isometria fra $\mathfrak{t}$ ed il duale $\mathfrak{t}^*$ deduciamo che α corrisponde a t_α.

Proposizione.
$$\beta(h_\alpha) = \langle \beta, \alpha \rangle.$$

Dim.
$$\beta(h_\alpha) = (h_\alpha, t_\beta) = \frac{(h_\alpha, h_\alpha)}{2}(t_\alpha, t_\beta) = \frac{(h_\alpha, h_\alpha)}{2}(\alpha, \beta) = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \langle \beta, \alpha \rangle.$$

□

Ora possiamo analizzare la decomposizione di $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ in spazi di radici.

Siano β, α due radici, consideriamo tutte le radici del tipo $\beta + i\alpha$, $i \in \mathbb{Z}$ tali radici vengono dette *la α-stringa attraverso β.*

Consideriamo il sottospazio:
$$M_{\beta,\alpha} := \oplus_i \mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$$

Proposizione. *$M_{\beta,\alpha}$ è una rappresentazione irriducibile di $sl(2)_\alpha$.*

Dim. Il peso di $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ relativamente ad h_α è $\beta(h_\alpha) + 2i$. Quindi i pesi che appaiono in $M_{\beta,\alpha}$ (relativamente ad h_α) sono o tutti dispari o tutti pari ed inoltre sono tutti distinti. Poiché il numero di irriducibili in cui si decompone una rappresentazione di $sl(2)$ viene contato dalla molteplicità degli autovalori 0,1 l'enunciato segue. □

Consideriamo in G_α l'elemento s_α immagine di $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \in SU(2)$. Questo elemento commuta con T_α e normalizza S^1_α mandando per dualità α_0 in $-\alpha_0$.

Proposizione. *i) $s_\alpha \in N_T$.*

ii) s_α induce sullo spazio Euclideo E duale di $\mathfrak{t}$ (con prodotto scalare $-(x, y)$ (meno la forma di Killing) la riflessione ortogonale rispetto all'iperpiano ortogonale ad α_0.

iii) Se $\alpha, \beta \in \Phi$ si ha:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha, \quad \langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \qquad \textit{interi di Cartan} \tag{3.2.3}$$

iv) Le radici della forma $\beta + i\alpha$ vengono in una stringa $\beta + i\alpha$, $-q \le i \le p$, per cui $\langle \beta, \alpha \rangle = p - q$.

Dim. i) Il fatto che $s_\alpha \in N_T$ segue dal fatto che T è isogeno a $T_\alpha \times S^1_\alpha$.

ii) Poiché $s_\alpha \in N_T$ preserva la forma di Killing induce una trasformazione ortogonale di E.

Questa trasformazione manda α_0 in $-\alpha_0$ ed è la identità su un iperpiano. Ne segue che necessariamente s_α induce sullo spazio Euclideo E la riflessione ortogonale rispetto all'iperpiano ortogonale ad α_0.

iii) In uno spazio Euclideo E la riflessione ortogonale rispetto all'iperpiano ortogonale ad un vettore non nullo v è evidentemente data dalla formula:

$$s_v(w) = w - \frac{2(v,w)}{(v,v)}v.$$

Dalla proposizione precedente le radici $\beta + i\alpha$ vengono in una stringa $\beta + i\alpha$, $-q \leq i \leq p$ di lunghezza $m+1 = p+q+1$ in cui $\beta + p\alpha$ fornisce il peso massimale e $\beta - q\alpha$ fornisce il peso minimale. Inoltre $m = (\beta+p\alpha)(h_\alpha) = \beta(h_\alpha)+2p$ mentre $-m = (\beta-q\alpha)(h_\alpha) = \beta(h_\alpha)-2q$ e $\beta(h_\alpha) = p - q$, ma abbiamo visto che $\beta(h_\alpha) = \langle \beta, \alpha \rangle$.
□

Resta ancora da dimostrare che le radici generano $E = \hom(\mathfrak{t}, \mathbb{R})$. Se cosí non fosse esisterebbe una $t \in \mathfrak{t}$, $t \neq 0$ su cui tutte le radici si annullano. Poiché $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ ne segue che t è nel centro di $\mathfrak{t}$ contrariamente alla ipotesi fatta che $\mathfrak{g}$ sia semplice non commutativa.

OSSRVAZIONE

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = esp(e)esp(-f)esp(e)$$

3.3 Vettori radici

TEOREMA. *i) Per ogni radice α si ha* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

ii) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \begin{cases} 0 & \textit{se} \quad \alpha+\beta \quad \textit{non è una radice} \\ \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \textit{se} \quad \alpha+\beta \quad \textit{è una radice} \end{cases}$

DIM. i) è già stato provato

ii) Le radici $\beta + i\alpha$ di una α stringa, appartengono ad una unica rappresentazione irriducibile di $sl(2)_\alpha$ che quindi si decompone come somma diretta $\oplus_{i=-p}^{q} \mathfrak{g}_{i\alpha+\beta}$. In questa rappresentazione l'elemento e_α manda lo spazio peso $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ isomorficamente sullo spazio di peso $\beta + (i+1)\alpha$ se tale spazio è non 0, oppure in 0 se siamo arrivati al peso più alto. □

Una delle idee per ricostruire una algebra di Lie a partire da un sistema di radici è quella di fissare per ogni α una terna di elementi $e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha$ e di determinarne la tabella di moltiplicazione. Questa strategia si può portare a termine almeno in modo implicito per dimostrare la esistenza di una tale algebra di Lie.

3.4 Elementi regolari e singolari

Si da ora la definizione:

Un elemento $t \in T$ è detto *regolare* se $\mu_i(t) \neq 1$ per tutte le radici di T.

L'insieme degli elementi regolari T_{reg} è il complementare della unione finita di nuclei di caratteri ovvero di un numero finito di sottotori di codimensione 1, pertanto T_{reg} è un aperto denso di T.

In generale un elemento di G coniugato ad un elemento regolare di T si dice elemento regolare di G. Questa definizione è in effetti intrinseca, un elemento $x \in G$ è regolare se e solo se la dimensione dei punti fissi di x nella rappresentazione aggiunta è minima fra le dimensioni possibili.

ESEMPIO Nel gruppo $SU(n)$ gli elementi regolari sono le matrici con autovalori distinti.

LEMMA. *i) Un elemento di T regolare è contenuto in un unico toro massimale.*

ii) Se $t \in T$ è regolare la componente connessa del centralizzatore di t è T.

iii) La componente connessa del centralizzatore di un elemento singolare di T è un gruppo non commutativo di dimensione $\geq \dim(T) + 2$.

DIM. i) Se t è contenuto in un toro U abbiamo che l'algebra di Lie di U è contenua nei punti fissi di t. Se t è regolare in T tali punti fissi sono l'algebra di Lie di T e quindi $U \subset T$.

ii) Stesso ragionamento se U è un gruppo connesso che centralizza t.

iii) Se t è singolare esiste una radice μ su cui t vale 1 quindi t commuta con il sottogruppo 3-dimensionale G_μ. Il centralizzatore contiene dunque TG_μ che ha dimensione $\dim(T)+2$. □

OSSERVAZIONE Non è vero che il centralizzatore di un elemento regolare sia connesso, per esempio $t = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \in SO(3, \mathbb{R})$ è regolare ed il suo centralizzatore ha due componenti connesse (in effetti è il normalizzatore del toro massimale contenente t).

LEMMA. *Abbiamo una stratificazione finita $T = \cup_i T_i$ con strati varietà localmente chiuse caratterizzati dall'essere formati da elementi con la stessa componente connessa del centralizzatore.*

DIM. La stratificazione è data dall'insieme delle radici μ su cui t ha valore 1. Questo è un toro privato di alcuni sottotori. □

TEOREMA. *L'insieme degli elementi singolari è unione finita di sottovarietà (localmente chiuse) di dimensione $\leq \dim(G) - 3$.*

DIM. Abbiamo la mappa $\rho : G \times T \to G$, $\rho : (g, t) \to gtg^{-1}$ stratifichiamo gli elementi singolari a seconda del loro centralizzatore. Se T_i è l'insieme con Z_i componente connessa del centralizzatore la mappa ρ ristretta a $G \times T_i \to G$ si fattorizza come $\rho_i : G/Z_i \times T_i \to G$, ρ_i è una immersione su una sottovarietà localmente chiusa di dimensione $\dim T_i + \dim G - \dim Z_i \leq \dim T - 1 + \dim G - (\dim T + 2) = \dim(G) - 3$. □

Corollario.

4 Classificazione dei sistemi di radici

4.1 Sistemi di radici Riprendiamo la definizione astratta:

Definizione. *Un sistema di radici è un insieme finito Φ di vettori non nulli di uno spazio euclideo E che verifica le seguenti proprietà:*

(1) *Se $\alpha \in \Phi$ si ha $c\alpha \in \Phi$ se e solo se $c = \pm 1$.*

(2) *Se $\alpha \in \Phi$ e s_α indica la riflessione ortogonale rispetto all'iperpiano ortogonale ad α si ha $s_\alpha(\Phi) = \Phi$.*

(3) *Se $\alpha, \beta \in \Phi$ si ha:*

$$(4.1.1) \qquad s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha, \quad \langle \alpha, \beta \rangle := \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \qquad \textit{interi di Cartan}$$

(4) *Φ genera linearmente lo spazio E.*

OSSERVAZIONE Non fissiamo a priori il modulo delle radici, per cui se c è un numro reale non nullo e Φ un sistema di radici anche $c\Phi$ è un sistema di radici, che penseremo equivalente a Φ.

Dati due sistemi di radici $\Phi_1 \subset E_1,\ \Phi_2 \subset E_2$ possiamo formare la somma ortogonale dei due spazi euclidei $E := E_1 \oplus E_2$ e $\Phi := \Phi_1 \cup \Phi_2$ è un sistema di radici.

In generale un sistema di radici Φ si dice *riducibile* se si può scrivere $\Phi := \Phi_1 \cup \Phi_2$ con Φ_1 ortogonale a Φ_2, altrimenti si dice *irriducibile*.

ESERCIZIO Provare che ogni sistema di radici si decompone in modo unico come $\Phi = \cup_i \Phi_i$ con i Φ_i sistemi di radici irriducibili a due a due ortogonali fra loro.

Nostro obiettivo è di classificare i sistemi di radici irriducibili. Poiché non abbiamo fissato la scala diremo che due sistemi di radici $\Phi_1 \subset E_1,\ \Phi_2 \subset E_2$ sono equivalenti se esiste una isometria $I : E_1 \to E_2$ ed una costante positiva c per cui $I(\Phi_1) = c\Phi_2$.

La trasformazione I/c manda Φ_1 in Φ_2 ed è una isometria a meno di scala ovvero preserva gli angoli, una tale trasformazione è per definizione un isomorfismo fra i due sistemi di radici.

Un utile esercizio che richiede un pò della teoria che svilupperemo in seguito, consiste nel provare che, se $\Phi_1 \subset E_1,\ \Phi_2 \subset E_2$ sono irriducibili e J è una trasformazione lineare arbitraria che manda Φ_1 in Φ_2 allora J è necessariamente una isometria a meno di scala.

Finalmente osserviamo la **dualità**:

Definizione. *Se Φ è un sistema di radici, gli elementi:*

$$\alpha\check{} := \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}, \qquad \alpha \in \Phi, \qquad \textit{coradici} \tag{4.1.2}$$

vengono dette **coradici**.

Esercizio $\check{\Phi} := \{\alpha\check{},\ \alpha \in \Phi\}$ è un sistema di radici, detto **duale** a Φ, si ha $\langle \alpha\check{}, \beta\check{} \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$.

4.2 Coppie di radici Per arrivare alla classificazione ci servono alcune proprietà geometriche importanti dei sistemi di radici.

Iniziamo dunque con i sistemi di radici di rango 1 ed iniziamo con una semplice osservazione sugli interi di Cartan.

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4\frac{(\alpha,\beta)^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2}.$$

Abbiamo prima di tutto che $\langle \alpha, \beta \rangle$ e $\langle \beta, \alpha \rangle$ hanno lo stesso segno, inoltre dalla disuguaglianza di Schwarz e dagli assiomi delle radici, se $\alpha \neq \pm\beta$ si ha anche $\frac{(\alpha,\beta)^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} < 1$ pertanto essendo $\langle \alpha, \beta \rangle$ e $\langle \beta, \alpha \rangle$ interi si ha che $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$ è un intero fra 1 e 3, supponendo che $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ abbiamo dunque le seguenti possibilità che sono riassunti dalla seguente tavola (in cui θ rappresenta l'angolo fra i due vettori α, β):

Tavola 1

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\pi/2$	indefinito
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Da questa Tavola deduciamo una importante proprietà:

Proposizione. *Siano α, β due radici non proporzionali.*

i) Se $(\alpha, \beta) < 0$, $\alpha + \beta$ è una radice.

ii) Se $(\alpha, \beta) > 0$, $\alpha - \beta$ è una radice.

Dim. i) Dalla tavola 1, almeno uno dei due interi di Cartan $\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle$ è -1 se ad esempio $\langle\alpha,\beta\rangle = -1$ si ha:

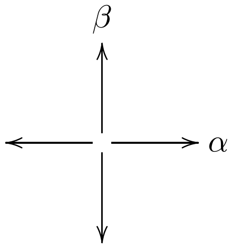
$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle\alpha,\beta\rangle\alpha = \beta + \alpha \in \Phi$$

similmente se $\langle\beta,\alpha\rangle = -1$.

ii) Il ragionamento è identico, ora almeno uno dei due interi di Cartan $\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle$ è 1.
□

Possiamo ora esibire tutti i sistemi di radici di rango 2. Li esibiamo a seconda del minimo angolo θ fra due radici.

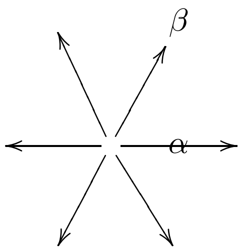
i) $\theta = \pi/2$ abbiamo necessariamente le radici:



sistema $A_1 \times A_1$

questo sistema è riducibile, non possiamo avre altre radici per la minimalità di $\theta = \pi/2$.

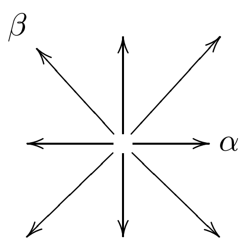
ii) $\theta = \pi/3$ abbiamo necessariamente le radici (sistema irriducibile):



sistema A_2

non possiamo avere altre radici per la minimalità di $\theta = \pi/3$.

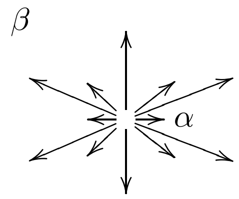
iii) $\theta = \pi/4$ abbiamo necessariamente le radici (sistema irriducibile):



sistema B_2.

non possiamo avre altre radici per la minimalità di $\theta = \pi/4$.

iv) $\theta = \pi/6$ abbiamo necessariamente le radici (sistema irriducibile):



sistema G_2.

non possiamo avere altre radici per la minimalità di $\theta = \pi/3$.

4.3 Gruppo di Weyl (definizione) Sia $\Phi \subset E$ un sistema di radici.

DEFINIZIONE. *Il sottogruppo W del gruppo ortogonale di E, generato dalle riflessioni s_α, $\alpha \in \Phi$ è detto* **gruppo di Weyl** *del sistema di radici.*

PROPOSIZIONE. *W è un gruppo finito che permuta Φ.*

DIM. Per ipotesi ogni elemento di W induce una permutazione di Φ abbiamo quindi un omomorfismo di W nel gruppo finito delle permutazioni dell'insieme finito Φ. Questo omomorfismo è iniettivo, infatti se w induce la permutazione identica su Φ, poiché Φ genera E linearmente si deve avere $w = 1$. $\square$

OSSERVAZIONE Il sistema $\Phi\check{}$ genera lo stesso gruppo di Weyl di Φ.

4.4 Radici positive e semplici Sia dunque $\Phi \subset E$ un sistema di radici. Φ induce una prima configurazione geometrica *l'arrangiamento di iperpiani*:

(4.4.1) $$H_\alpha := \{v \in E \,|\, (\alpha, v) = 0\}, \quad \alpha \in \Phi$$

DEFINIZIONE. *I vettori in $E^{reg} := E - \cup_{\alpha\in\Phi} H_\alpha$ sono detti* **vettori regolari**.

Le componenti connesse dell'aperto E^{reg} sono dette **camere di Weyl**.

Fissato un vettore regolare v possiamo dividere le radici in due sottoinsiemi disgiunti:

(4.4.2) $$\Phi^+ := \{\alpha \in \Phi \,|\, (\alpha, v) > 0\}, \quad \Phi^- := \{\alpha \in \Phi \,|\, (\alpha, v) < 0\}, \quad (\Phi^- = -\Phi^+).$$

DEFINIZIONE. *Φ^+ si chiama una scelta di radici positive.*

Invece di scrivere $\alpha \in \Phi^+$ scriveremo $\alpha > 0$ (risp. $\alpha < 0$).

OSSERVAZIONE La scelta delle radici positive Φ^+ dipende solo dalla camera di Weyl in cui si trova v.

(4.4.3) $$\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-, \quad \Phi^+ \cap \Phi^- = \emptyset, \quad \Phi^- = -\Phi^+.$$

OSSERVAZIONE Il sistema $\Phi\check{}$ genera lo stesso arrangiamento di iperpiani e le stesse camere di Weyl di Φ. Inoltre per una scelta di vettori regolari si ha $(\Phi\check{})^+ = (\Phi^+)\check{}$.

Arriviamo ora alla definizione fondamentale:

DEFINIZIONE. *Fissata una scelta Φ^+ di radici positive, una radice positiva $\alpha \in \Phi^+$ si dice decomponibile se $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+$.*

Se una radice positiva non è decomponibile si dice **semplice***.*

Si denota con $\Delta \subset \Phi^+$ l'insieme delle radici semplici.

TEOREMA. *i) Ogni radice positiva si scrive come $\sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha \alpha$ con gli n_α interi non negativi.*

ii) Se $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta$ si ha $(\alpha_1, \alpha_2) \leq 0$.

iii) Le radici semplici Δ sono una base di E (su $\mathbb{R}$).

DIM. i) Sia v il vettore regolare che definisce la scelta di Φ^+. Prima di tutto osserviamo che se $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+$ si ha $(\alpha, v) = (\alpha_1, v) + (\alpha_2, v)$ quindi possiamo provare per induzione sui numeri $(\alpha, v))$ che ogni radice positiva si scrive come $\sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha \alpha$ con gli n_α interi non negativi.

ii) Se $(\alpha_1, \alpha_2) > 0$ si ha che $\beta := \alpha_1 - \alpha_2$ è una radice. Se ad esempio $\beta > 0$ si ha $\beta + \alpha_2 = \alpha_1$ contraddice la indecomponibilità di α_1 se invece $\beta < 0$ si ha $\alpha_2 = \alpha_1 - \beta$ contraddice la indecomponibilità di α_2.

iii) Basta provare che Δ è formata da elementi linearmente indipendenti (poiché E è generato da Φ.) Sia per assurdo $\sum c_i \alpha_i = \sum_j b_j \alpha_j$ una relazione fra insiemi disgiunti di radici con $c_i, b_j \geq 0$ prendendo il prodotto scalare:

$$0 \leq (\sum c_i \alpha_i, \sum_j b_j \alpha_j) = \sum_{i,j} c_i b_j (\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$$

da cui $\sum c_i \alpha_i = 0$ questo implica $\sum c_i (\alpha_i, v) = 0$. Essendo $(\alpha_i, v) > 0$ questo è assurdo a meno che tutti i $c_i = 0$. $\square$

OSSERVAZIONE Vi è una corrispondenza biunivoca fra basi di Φ e camere di Weyl.

DIM. Abbiamo già visto che Φ^+ e quindi Δ dipende solo dalla camera di Weyl. Viceversa, sia Φ^+ associata ad un vettore regolare v se w è un vettore regolare con $(\alpha, w) > 0,\ \forall \alpha \in \Phi^+$ abbiamo per $0 \leq t \leq 1$:

$$(\alpha, tv + (1-t)w) > 0,\ \forall t \in [0, 1]$$

quindi il segmento $tv + (1-t)w, t \in [0, 1]$ è interamente formato da vettori regolari e quindi v, w sono nella stessa camera. $\square$

Abbiamo la seguente conseguenza:

PROPOSIZIONE. *Sia α_0 una radice semplice in $\Delta \subset \Phi^+$ si ha $s_{\alpha_0}(\Phi^+ - \{\alpha_0\}) = \Phi^+ - \{\alpha_0\}$.*

DIM. Sia $\beta \in \Phi^+$ e $\beta \neq \alpha$ possiamo dunque scrivere in modo unico $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha$ con n_α interi positivi.

$s_{\alpha_0}(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha_0 \rangle \alpha_0$ è una radice. Nella base Δ l'unico coefficiente che cambia è quello c di α_0 gli altri sono non negativi. Poichè gli unici multipli di α_0 sono $\pm\alpha_0$ e per ipotesi $s_{\alpha_0}(\beta) \neq -\alpha_0$ abbiamo che $s_{\alpha_0}(\beta)$ scritto nella base δ ha almeno un coefficiente positivo. Ora una radice o è positiva ed allora tutti i coefficientii sono positivi oppure è negativa e tutti i coefficienti devono essere negativi, segue che $s_{\alpha_0}(\beta)$ è necessariamente positiva. $\square$

Questa proposizione ha un importante corollario che riguarda un *peso* particolare il peso:

$$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha.$$

COROLLARIO. *Sia α una radice semplice in $\Delta \subset \Phi^+$ si ha $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$.*

DIM. Evidente. $\square$

4.5 Gruppo di Weyl Vogliamo studiare più in dettaglio il gruppo di Weyl. Per farlo dobbiamo passare attraverso un artificio. Fissiamo Δ una base di radici semplici e poniamo W' il sottogruppo di W generato dalle riplessioni s_α, $\alpha \in \Delta$. Alla fine della nostra discussione avremo che in effetti $W' = W$ per ora proviamo alcune premesse.

LEMMA 1. *Il gruppo di W' opera in modo transitivo sulle basi e sulle camere di Weyl.*

DIM. Dalla osservazione vi è una corrispondenza biunivoca, chiaramente W' equivariante fra basi e camere di Weyl, quindi basta provarlo per le camere di Weyl.

Sia C la camera per cui Δ sono le radici semplici di Φ^+ il corrispondente insieme di radici positive. Fissiamo un vettore regolare a per ogni $w \in W'$ possiamo considerare i segni dei prodotti scalari $(w(a), \phi)$, $\phi \in \Phi^+$ vogliamo provare che per un qualche w tutti questi segni sono positivi. Sia dunque w tale che il massimo numero di segni positivi sia raggiunto. Se per assurdo vi fosse una $\phi \in \Phi^+$ con $(w(a), \phi) < 0$ dovrebbe anche esistere una $\alpha \in \Delta$ con la stessa proprietà. Applicando s_α avremmo (dalla Proposizione 4.3) che il numero dei segni positivi aumenta di 1 una contraddizione. Questo prova che W' opera transitivamente. $\square$

LEMMA 2. *Data una base Δ ed una radice α esiste un elemento $w \in W'$ con $w(\alpha) \in \Delta$.*

DIM. Poichè W' opera transitivamente sulle basi basta provare che α appartiene ad una base. Poiché i le sole radici multiple di α sono $\pm\alpha$ possiamo trovare un vettore v_0 ortogonale ad α ma con prodotto scalare non 0 con ogni radice $\beta \neq \pm\alpha$. In un intorno sufficientemente piccolo di v_0 poiché i vettori regolari sono un aperto denso, possiamo trovare un vettore regolare v con $(\alpha, v) > 0$ ma anche tale che se $(\beta, v) > 0$ e β è una radice diversa da α si ha $(\alpha, v) < (\beta, v)$. Segue immediatamente che α è semplice nel sistema di radici positive definito da v. $\square$

LEMMA. *Siano v, w due vettori non nulli dello spazio Euclideo E e T una trasformazione ortogonale con $T(v) = w$ si ha $s_v = T^{-1} s_w T$.*

DIM. $T^{-1} s_w T(v) = T^{-1} s_w(w) = T^{-1}(-w) = -v$. Se u è ortogonale a v si ha $T(u)$ ortogonale a $T(v) = w$ quindi $T^{-1} s_w T(u) = T^{-1} T(u) = u$. $\square$

TEOREMA 1. *Fissata una base Δ il gruppo di Weyl è generato dalle riflessioni s_α, $\alpha \in \Delta$ (ovvero $W = W'$).*

DIM. Per definizione W è generato dalle riflessioni s_α, $\alpha \in \Phi$. Sappiamo ora che, se $\beta \in \Phi$ esiste un $w \in W'$ con $w(\beta) = \alpha \in \Delta$. Si allora $s_\beta = w^{-1} s_\alpha w \in W'$.
$\square$

Le riflessioni s_α, $\alpha \in \Delta$ vengono anche dette *riflessioni semplici*. Per semplicità se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono le radici semplici scriveremo $s_i := s_{\alpha_i}$.

Esempio $W = S_n$ è il gruppo del sistema di radici A_n nella base $e_0 - e_1, \ldots, e_{n-1} - e_n$ le riflessioni semplici sono le trasposizioni $(i, i+1)$ che generano S_n.

DEFINIZIONE. *Dato un elemento $w \in W$ si chiama* **lunghezza** *di w, indicata con $l(w)$ la minima lunghezza di una espressione di w come prodotto di riflessioni semplici.*

LEMMA DI SCAMBIO. *Siano $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ radici semplici supponiamo che $s_{i_1} \ldots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) < 0$, esiste un numero $1 \leq u < k$ per cui:*

$$s_{i_1} \ldots s_{i_k} = s_{i_1} \ldots s_{i_{u-1}} s_{i_{u+1}} \ldots s_{i_{k-1}}$$

DIM. Esiste un indice $u < k$ con $s_{i_{u+1}} \ldots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) > 0$, $s_{i_u} s_{i_{u+1}} \ldots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) < 0$. Dalla proposizione 4.3 si ha necessariamente che $\alpha_{i_u} = s_{i_{u+1}} \ldots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$. Quindi

$$s_{i_k} = (s_{i_{u+1}} \ldots s_{i_{k-1}})^{-1} s_{i_u} s_{i_{u+1}} \ldots s_{i_{k-1}}.$$

Sostituendo nella espressione $s_{i_1} \ldots s_{i_k}$ ad s_{i_k} il valore trovato abbiamo:

$$s_{i_1} \ldots s_{i_{u-1}} s_{i_u} s_{i_{u+1}} \ldots s_{i_{k-1}} (s_{i_{u+1}} \ldots s_{i_{k-1}})^{-1} s_{i_u} s_{i_{u+1}} \ldots s_{i_{k-1}} = s_{i_1} \ldots s_{i_{u-1}} s_{i_{u+1}} \ldots s_{i_{k-1}}$$

$\square$

COROLLARIO. *Sia $w = s_{i_1} \ldots s_{i_k}$ una espressione di lunghezza minima, allora $w(\alpha_{i_k}) < 0$.*

TEOREMA 2. *La lunghezza $l(w)$ di un elemento di W è il numero di radici positive α per cui $w(\alpha) < 0$.*

DIM. Per induzione sulla lunghezza se $w = s_i$ è una riflessione semplice l'unica radice positiva mandata in una negativa è α_i (4.3). Sia $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ una espressione di lunghezza minima k, necessariamente anche $w' := s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}}$ è una espressione di lunghezza minima $k-$. Sappiamo che $w(\alpha_{i_k}) = -w'(\alpha_{i_k}) < 0$. In particolare le radici positive mandate in negative da w' sono contenute in $\Phi^+ - \{\alpha_{i_k}\} = s_{i_k}(\Phi^+ - \{\alpha_{i_k}\})$. Se $\beta \in \Phi^+ - \{\alpha_{i_k}\}$ è una radice positiva, $w(\beta) = w's_{i_k}(\beta)$ quindi s_{i_k} è una corrispondenza biunivoca fra le radici positive di $\Phi^+ - \{\alpha_{i_k}\}$ mandate in negative da w e tutte le radici positive mandate in negative da w'. $\square$

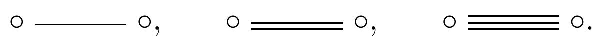
TEOREMA 3. *Il gruppo di Weyl opera in modo semplicemente transitivo sulle basi e sulle camere di Weyl.*

DIM. Abbiamo già visto che W opera transitivamente, basta provare che se $w \in W$ fissa una camera C si ha $w = 1$.

Infatti se w fissa C fissa anche le radici positive associate a C quindi scritto nelle riflessioni semplici della relativa base ha lunghezza 1 (Teorema 2) e quindi è 1. $\square$

4.6 Diagrammi di Dynkin Ad una base Δ associamo ora un *grafo di Coxeter* ed un *diagramma di Dynkin.*

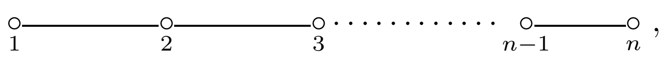
Il grafo di Coxeter viene costruito nel modo seguente. Si disegna un nodo per ogni α_i e si congiungono i nodi i, j con $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ lati. Ad esempio i grafi di Coxeter dei tipi A_2, B_2, G_2 sono:

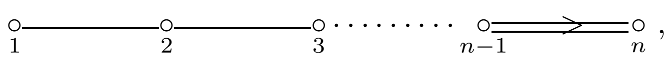


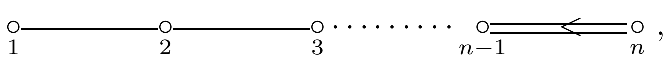
Il diagramma di Dynkin si ottiene dal grafo di Coxeter aggiungendo una freccia, nel caso in cui due vertici siano uniti da più di un lato, ovvero che le due radici non abbiamo la stessa lunghezza. Per convenzione la freccia punto verso la radice più corta.

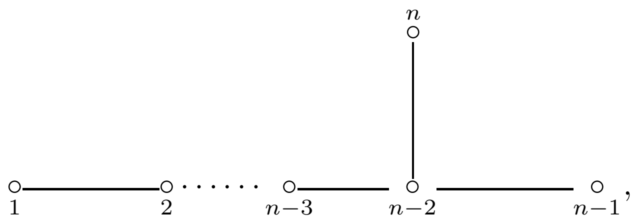
Il Teorema di classificazione dice:
i) I diagrammi di Dynkin dei sistemi di radici irriducibili sono:

Le 4 serie infinite

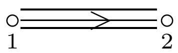
$A_n :=$  $n \geq 1$

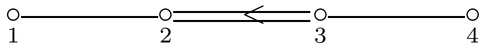
$B_n :=$  $n \geq 2$

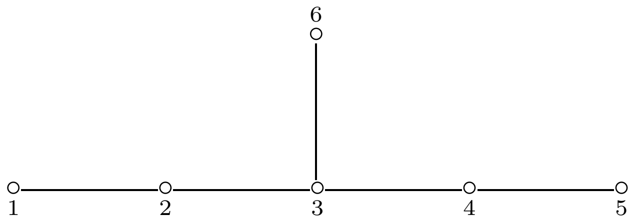
$C_n :=$  $n \geq 3$

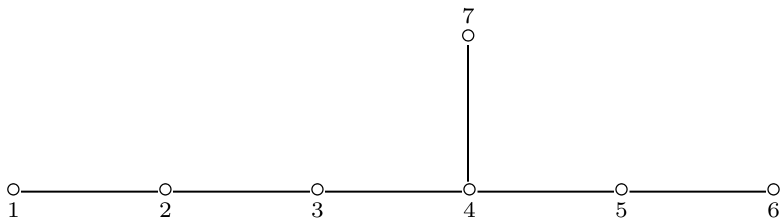
$D_n :=$  $n \geq 4$

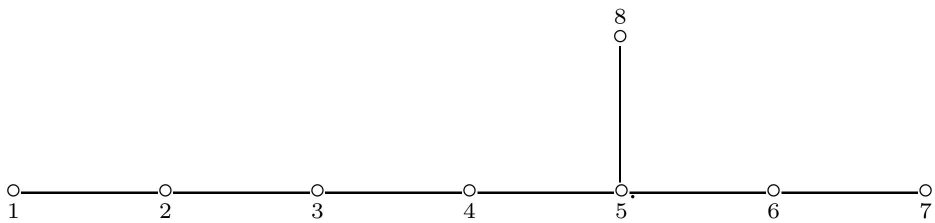
I cinque gruppi eccezionali

$G_2 :=$ 

$F_4 :=$ 

$E_6 :=$ 

$E_7 :=$ 

$E_8 :=$ 

ii) I diagrammi di Dynkin determinano i sistemi di radici irriducibili a meno di isomorfismo.

Vedremo in seguito che le 4 serie infinite corrispondono ai gruppi classici:

A_n corrisponde ad $SU(n+1)$, B_n ad $SO(2n+1, \mathbb{R})$, C_n a $Sp(n, \mathbb{H})$ e D_n ad $SO(2n, \mathbb{R})$. Le restrizioni sui ranghi corrispondono al fatto che per valori piccoli si hanno coincidenze. Come $B_2 = C_2$, $D_3 = A_3$. Queste coincidenze si riflettono nel fatto che i corrispondenti gruppi classici sono uguali oppure isogeni, come vedremo in dettaglio in seguito.

Prima di procedere con la dimostrazione conviene osservare che il diagramma di Dynkin a meno di isomorfismo non dipende dalla base Δ scelta. Questo segue immediatamente da 4.4 Teorema 3.

Osserviamo inoltre che se eliminiamo la freccia nei diagrammi di Dynkin e passiamo dunque ai grafi di Coxeter si ha la identificazione fra B_n e C_n solamente.

Per arrivare alla classificazione conviene cambiare leggermente il problema in uno più semplice ma equivalente.

Definizione. *Un sistema di vettori* $e_1, \ldots, e_n$ *di uno spazio Euclideo si dice* **ammissibile** *se:*

i) Gli e_i *sono linearmente indipendenti.*

ii) Gli e_i *hanno modulo 1.*

iii) Se $i \neq j$ *si ha* $(e_i, e_j) \leq 0$.

iv) Se $i \neq j$ *si ha* $4(e_i, e_j)^2 = 0, 1, 2,$ *o* 3.

L'esempio che abbiamo in mente sono i vettori $\alpha/|\alpha|, \ \alpha \in \Delta$.

Come prima possiamo associare un grafo di Coxeter Γ a tali vettori. Vogliamo classificare quegli insiemi di vettori ammissibili per cui il grafo di Coxeter è connesso.

Procediamo in passi.

1) Se eliminiamo alcuni vettori ad un insieme di vettori ammissibili otteniamo ancora un insieme di vettori ammissibili. Il corrispondente grafo si ottiene eliminando i vertici corrispondenti ed i lati uscenti da tali vertici.

Ovvio.

2) Il numero di coppie di vertici di Γ connessi da almeno un lato è strettamente inferiore ad n.

Poniamo $e = \sum_{i=1}^n e_i$, poiché i vettori sono linearmenmte indipendenti $e \neq 0$ e quindi:

$$0 < (e, e) = n + 2 \sum_{i<j} (e_i, e_j).$$

Se $i \neq j$ si ha $4(e_i, e_j)^2 = 0, 1, 2,$ o 3 quindi se i, j sono uniti da almeno un lato $2(e_i, e_j) \leq -1$, quindi il numero di tali termini è al più $n - 1$.

3) Γ non contiene cicli.

Altrimenti selezionando solo i vettori di un ciclo si ha una contraddizione a 2).

4) Da un vertice di Γ escono al più 3 lati.

Sia e un vettore connesso da k vettori η_i, quindi $(e, \eta_i) < 0$. Due degli η_i non possono essere connessi, altrimenti avremmo un ciclo, quindi $(\eta_i, \eta_j) = 0$ se $i \neq j$.

Essendo i vettori linearmente indipendenti possiamo costruire un vettore unitario η_0 combinazione lineare di e e dei k vettori η_i ortogonale ai k vettori η_i. Necessariamente $e, \eta_0) \neq 0$ da cui $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k$ è ortonormale e

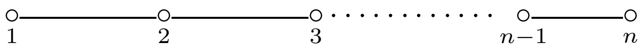
$$e = \sum_{i=0}^{k} (e, \eta_i)\eta_i, \quad 1 = \sum_{i=0}^{k} (e, \eta_i)^2 \implies \sum_{i=1}^{k} (e, \eta_i)^2 < 1 \implies \sum_{i=1}^{k} 4(e, \eta_i)^2 < 4$$

da cui l'enuciato segue essendo $\sum_{i=1}^{k} 4(e, \eta_i)^2$ il numero dei lati uscenti dal vertice associato ad e.

5) Se il grafo Γ è connesso e contiene un lato triplo è necessariamente .

Segue da 4).

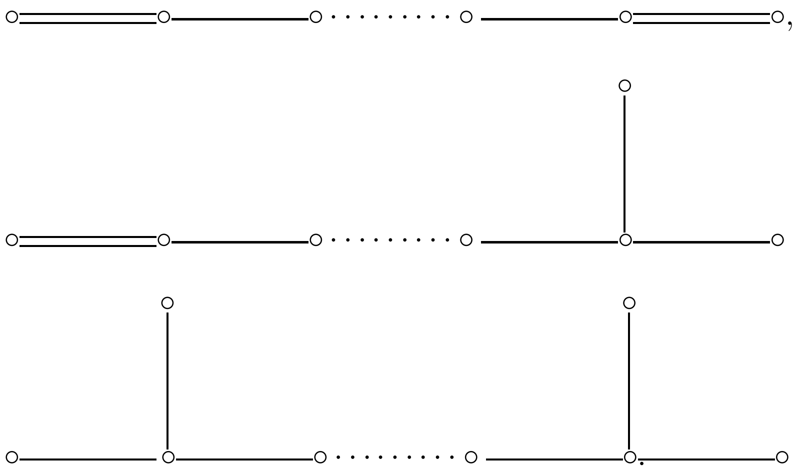
6) Supponiamo che il grafo Γ contiene una catena semplice



corrispondente ai vettori $e_1, \ldots, e_n$. Allora $e := \sum_{i=1}^{n} e_i$ è un vettore unitario, togliendo i vettori $e_1, \ldots, e_n$ al sistema ammissibile ed aggiungendo e si ottiene un nuovo sistema ammissibile in cui la catena semplice è *contratta* ad un unico vertice.

$(e, e) = n + \sum_{i=1}^{n-1} (e_i, e_{i+1}) = 1$, un vettore u corrispondente ad un grafo fuori della catena può essere connesso solo a e_1 o ad e_n e chiaramente nel primo caso $(u, e_1) = (u, e)$ nel secondo $(u, e_n) = (u, e)$ e quindi tutti gli enunciati seguono facilmente.

7) Γ non contiene grafi della forma



infatti se si contrae la catena semplice al centro si contraddice il punto 4).

8) A questo punto un grafo Γ diverso da G_2 o è una catena semplice, o è una catena con un solo lato doppio, o infine è formato da tre catene semplici di lunghezze a, b, c uscenti da un vertice.

Prima di procedere facciamo una osservazione che useremo varie volte. Supponiamo che $e_1, e_2, \ldots, e_p$ formino una catena semplice, sia $e := \sum_{i=1}^p ie_i$ si ha quindi $(e_i, e_j) = 0$ se i, j non sono consecutivi e $-1/2$ se sono consecutivi da cui:

$$(e,e) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = p^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i = p^2 - p(p-1)/2 = p(p+1)/2$$

9) Nel caso di una catena con un solo lato doppio, il grafo può essere solo $B_n = C_n$ o F_4.

Sia Γ formata da due catene semplici con p, q vertici, la prima relativa ai vettori e_i la seconda ai vettori η_i . L'ultimo vertice della prima catena essendo legato all'ultimo della seconda con due lati.

Sia $e := \sum_{i=1}^p ie_i,\ \eta := \sum_{i=1}^q i\eta_i$. Le ipotesi fatte danno (dalle formule precedenti):

$$(e,e) = p(p+1)/2,\ (\eta,\eta) = q(q+1)/2,\ 4(e_p,\eta_q)^2 = 2,\ (e,\eta)^2 = p^2q^2(e_p,\eta_q)^2 = p^2q^2/2$$

dalla disuguaglianza di Schwarz si ha (essendo e, η indipendenti):

$$p^2q^2/2 < \frac{p(p+1)}{2}\,\frac{q(q+1)}{2} \implies pq < p+q+1.$$

Sia ad esempio $p \le q$ abbiamo, dividendo per q, $p < 3$. Se $p = 2$ si ha $2q < q + 3$ ovvero $q < 3$, essendo $p \le q$ si ha $q = 2$ ed il caso F_4. Se $p = 1$ a priori q può essere qualunque e si ha il caso B_n.

10) Nell'ultimo caso abbiamo solo D_n, E_6, E_7, E_8.

Sia ψ il vettore relativo al vertice da cui escono le tre catene, con p, q, r elementi $p, q, r \ge 2$. Per ogni catena definiamo:

$$e := \sum_{i=1}^{p-1} ie_i,\ \eta := \sum_{i=1}^{q-1} i\eta_i,\ \zeta := \sum_{i=1}^{r-1} i\zeta_i,$$

come prima e, η, ζ hanno modulo quadro $p(p-1)/2$, $q(q-1)/2$, $r(r-1)/2$ e sono ortogonali. Nello spazio generato da e, η, ζ, ψ fissiamo un vettore γ unitario in modo tale che e, η, ζ, γ sia una base ortogonale. Abbiamo necessariamente $(\psi, \gamma) \ne 0$, inoltre $(\psi, e) = -(p-1)/2$, $(\psi, \eta) = -(q-1)/2$, $(\psi, \zeta) = -(r-1)/2$, :

$$1 = (\psi,\gamma)^2 + \frac{(\psi,e)^2}{(e,e)^2} + \frac{(\psi,\eta)^2}{(\eta,\eta)^2} + \frac{(\psi,\zeta)^2}{(\zeta,\zeta)^2} \implies \frac{p-1}{p} + \frac{q-1}{q} + \frac{r-1}{r} < 2 \implies 1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

Si tratta dunque di studiare le soluzioni della disuguaglianza $1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ per p, q, r interi positivi (questa disuguaglianza interviene anche nello studio dei solidi Platonici).

Possiamo assumere $p \leq q \leq r$ e vediamo immediatamente che $p \leq 2$ altrimenti ogni termine è $\leq 1/3$.

Poiché $p \geq 2$ deduciamo $p = 2$ e $1/2 < \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Come prima deve essere $q \leq 3$ altrimenti i due termini sono $\leq 1/4$.

Ora abbiamo 2 casi. Se $q = 2$ abbiamo che r può essere arbitrario e siamo nel caso D_n. Se invece $q = 3$ abbiamo $1/2 < \frac{1}{3} + \frac{1}{r}$ ovvero $r < 6$. Pertanto $r = 3, 4, 5$ corrispondenti ai diagrammi E_6, E_7, E_8.

A questo punto abbiamo visto che i possibili grafi di Coxeter sono quelli che appaiono nella lista dei diagrammi di Dynkin, a loro volta tali diagrammi sono semplicemente ottenuti mettendo una possibile freccia. nel caso F_4 e G_2 per simmetria non importa come si mette la freccia mentre i casi B_n, C_n per $n > 2$ sono diversi.

Per concludere usiamo un ovvio lemma:

Lemma. *Date due basi $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ di uno spazio Euclideo E la trasformazione lineare T definita da $T(a_i) := b_i$ è una isometria se e solo se $\forall i, j,\ (a_i, a_j) = (b_i, b_j)$.*

Ora osserviamo che il diagramma di Dynkin determina il sistema di radici, se esiste, univocamente (a meno di scala), in quanto se fissiamo arbitrariamente il modulo delle radici più corte, tutti i moduli ed i prodotti scalari sono determinati, quindi abbiamo una base di uno spazio euclideo con tutti i prodotti scalari fissati, questi dati determinano la base a meno di isometria, per il Lemma precedente. Pertanto:

Teorema. *Siano $\Phi_1 \subset E_1, \Phi_2 \subset E_2$ due sistemi di radici irriducibili con basi rispettivamente Δ_1, Δ_2. E sia $t : \Delta_1 \to \Delta_2$ una corrispondenza biunivoca che induce un isomorfismo di diagrammi di Dynkin. Allora t induce una isometria a meno di scala fra E_1 ed E_2 per cui $t(\Phi_1) = \Phi_2$.*

Dim. Essendo Δ_1, Δ_2 due basi t si estende univocamente ad un isomorfismo lineare. Per ipotesi, poiché il diagramma di Dynkin è del tutto equivalente alla matrice di Cartan abbiamo che, per $\alpha, \beta \in \Delta_1$ si ha $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle t(\alpha), t(\beta) \rangle$. Riscaliamo le due metriche Euclidee in modo tale che le radici più corte dei due spazi abbiano lo stesso modulo (ad esempio 1), dalla connessione del diagramma di Dynkin si deduce che anche le radici più lunghe dei due spazi hanno lo stesso modulo e che per $\alpha, \beta \in \Delta_1$ si ha $(\alpha, \beta) = (t(\alpha), t(\beta))$. Ne segue che (dopo questo riscalamento) t è una isometria. Evidentemente se $\alpha \in E_1$ si ha $t\, s_\alpha = s_{t(\alpha)}\, t$. Data $\alpha \in \Phi_1$ abbiamo che $\alpha = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_k}(\beta),\ \beta, \alpha_i \in \Delta_1$ da cui $t(\alpha) = s_{t(\alpha_1)} s_{t(\alpha_2)} \ldots s_{t(\alpha_k)}(t(\beta)),\ t(\beta), t(\alpha_i) \in \Delta_2$ e quindi $t(\alpha) \in \Phi_2$ si ha $t(\Phi_1) \subset \Phi_2$ lo stesso ragionamento applicato a t^{-1} implica che $t(\Phi_1) = \Phi_2$. $\square$

Resta da provare che i prodotti scalari fissati danno luogo effettivamente ad un sistema di radici. Il modo migliore di farlo è di esibire esplicitamente tutti i sistemi di radici. Prima di questo però conviene soffermarci un momento sulle matrici di Cartan.

4.7 Matrici di Cartan La matrice di Cartan è un'altro modo di codificare i dati di un sistema di radici. Fissata una base $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ la matrice di Cartan è la matrice $r \times r$ che, nel posto i, j ha il numero intero $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. Possiamo ora esibire le matrici di Cartan dei vari tipi.

$$A_r := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_r := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_r := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_r := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_6 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_7 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_4 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G_2 := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Prima di continuare calcoliamo il determinate delle varie matrici di Cartan, vedremo che tale determinante è l'ordine del gruppo fondamentale del gruppo semplice associato al digramma.

Sia $a_r := \det(A_r)$, sviluppando secondo la prima colonna abbiamo $a_r = 2a_{r-1} - (-1)(-1)a_{r-2} = 2a_{r-1} - (-1)(-1)a_{r-2}$, inoltre $a_1 = 2$. Per induzione otteniamo dunque $a_r = r + 1$.

Per B_r e C_r sviluppando il determinante tramite l'ultima colonna abbiamo:

$$\det(B_r) = 2r - (-2)(-1)(r-1) = 2, \qquad \det(B_r) = 2r - (-1)(-2)(r-1) = 2.$$

Per D_r sempre dall'ultima colonna abbiamo $2r + (-1)(-2)(-1)(r-2) = 4$.

Infine per i casi eccezionali un calcolo diretto fornisce:

$$E_7 : \ 2; \quad E_6 : \ 3; \quad E_8, F_4, G_2 : \ 1.$$

Digressione. Come vedremo in seguito una algebra di Lie semplice si può scrivere per generatori (di Chevalley) e relazioni (di Serre) a partire dalla matrice di Cartan. Negli ultimi 20 anni, anche per la spinta della teoria quantistica dei campi, sono state introdotte algebre di Lie più generali (algebre di Kac-Moody) definite a partire da una *matrice di Cartan generalizzata*, per completezza diamo questa nozione:

Una matrice di Cartan generalizzata è una matrice quadrata C ad elementi interi c_{ij} che verifichi i seguenti assiomi.

i) $c_{ii} = 2$.
ii) $c_{i,j} \leq 0$ se $i \neq j$.
iii) Se $c_{i,j} = 0$ si ha anche $c_{j,i} = 0$.

Una matrice di Cartan generalizzata si dice *simmetrizzabile* se esiste una matrice diagonale con elementi interi positivi non nulli D per cui DC è simmetrica. In questo caso ha senso studiare la positività o indefinitezza della matrice simmetrica DC. Si deduce che le matrici di Cartan simmetrizzabili positive sono quelle associate ai diagrammi di Dynkin. Quelle irriducibili e semidefinite positive hanno anche una grande importanza e vengono dai diagrammi di Dynkin estesi (cf. Bourbaki, Kač).

4.8 Costruzione dei sistemi di radici

Il metodo per costruire i vari sistemi di radici è il seguente. Si parte dallo spazio Euclideo standard $\mathbb{R}^n$ con la usuale base canonica e norma $\sum_i a_i^2$ e si fissa un sottospazio ed un reticolo Λ in questo sottospazio, si fissa in questo reticolo l'insieme dei vettori di una lunghezza prefissata o di due lunghezze prefissate (non nulle). Poiché l'insieme dei vettori di lunghezza data è compatto e Λ è discreto questa scelta seleziona un insieme finito di vettori non nulli.

Nelle scelte che faremo l'assioma (2) si verifica immediatamente.

Per l'assioma (3) vedremo che l'intero reticolo è stabile rispetto alla riflessione e per (4) si tratterà di verificare che i prodotti scalari sono interi su Λ e verificare una proprietà sui moduli delle radici.

Usualmente potremo utilizzare il seguente:

LEMMA. *Sia come prima Λ un reticolo in E, supponiamo che, se $a, b \in \Lambda$ si ha $(a, b) \in \mathbb{Z}$. Allora l'insieme Φ dei vettori di Λ per cui $(a, a) = 2$ (risp. per cui $(a, a) = 1, 2$ è un sistema di radici (nello spazio che generano).*

DIM. Restringendoci allo spazio che generano possiamo supporre che Φ generi E. Verifichiamo gli assiomi.

Sia $\alpha = c\beta, \alpha, \beta \in \Phi, c \in \mathbb{R}$ possiamo supporre $c \geq 1$. Abbiamo (dal prodotto scalare) che $c^2 = 1, 2$. Se $c^2 = 1$ si ha $\alpha = \pm\beta$ invece $c^2 = 2$ è impossibile perchè i rapporti delle lunghezzza dei vettori di un reticolo sono razionali.

Calcoliamo $\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha\alpha)}$ è chiaramente intero.

Infine se $\alpha, \beta \in \Phi$ si ha che $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \Lambda$ ma il modulo quadro di $s_\alpha(\beta)$coincide con quello di β quindi $s_\alpha(\beta) \in \Phi$. $\square$

Con queste idee in mente iniziamo.

È utile ricordare che il gruppo simmetrico opera come simmetrie ortogonali dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$ permutando le coordinate (ovvero la base canonica).

Tipo A_r: Sia E il sottospazio di $\mathbb{R}^{r+1}$ ortogonale al vettore $e_1 + e_2 + \cdots + e_{r+1}$ ovvero il sottospazio dei vettori $(x_1, \ldots, x_{r+1})$ con $\sum_i x_i = 0$. Come reticolo Λ prendiamo i punti di E a coordinate intere e come radici i vettori di Λ di modulo quadro 2.

È ora evidente che questi vettori devono avere tutte le coordinate 0 tranne due coordinate $1, -1$, quindi sono i vettori $e_i - e_j,\ i \neq j$.

La riflessione relativa ad $e_i - e_j$ è la trasposizione (i,j) dei vettori della base canonica. Gli assiomi seguono immediatamente. Ora fissiamo un sistema di radici positive, per questo osserviamo che i vettori regolari sono i vettori $(x_1, \dots, x_r)$ con $\sum_i x_i = 0$ e con tutte le r coordinate distinte, a ciascuno di questi vettori si può associare una unica permutazione σ tale che $x_{\sigma(1)} > x_{\sigma(2)} > \cdots > x_{\sigma(r+1)}$.

Si vede facilmente che due vettori sono nella medesima camera di Weyl se e solo se hanno la stessa permutazione associata.

In particolare possiamo prendere come camera fondamentale i vettori con $x_1 > x_2 > \cdots > x_{r+1})$. Per tali vettori le radici positive sono le $e_i - e_j,\ i < j$. Le radici semplici sono evidentemente $\alpha_i := e_i - e_{i+1},\ i = 1, \dots, r$ e si ha:

$$e_i - e_j = e_i - e_{i+1} + e_{i+1} - e_{i+2} + \cdots + e_{j-1} - e_j. \tag{4.8.1}$$

è anche immediato che se $i+1 < j$ si ha $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ mentre $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = -1$. Il diagramma di Dynkin A_r segue.

In questo caso si verifica facilmente che il gruppo di Weyl è il gruppo simmetrico S_{r+1}.

Tipo B_r: In questo caso in $\mathbb{R}^r$ prendiamo i vettori a coordinate intere e di norma 1 o 2. Si tratta dunque dei vettori:

$$\pm e_i, \qquad \pm e_i \pm e_j,\ i \neq j$$

I vettori regolari sono quelli $(x_1, \dots, x_r)$ che:
i) Hanno tutte le coordinate x_i non nulle.
ii) Se $i \neq j$ si ha $x_i \neq \pm x_j$.

In questo caso il gruppo di simmetrie da considerare è il gruppo generato dal gruppo simmetrico S_r che permuta le coordinate (generato dalle riflessioni tramite le radici $e_i - e_j$ ed il gruppo $\mathbb{Z}/(2)^r$ degli r possibili cambiamenti di segno (generato dalle riflessioni tramite le radici e_i). Evidentemente S_r normalizza $\mathbb{Z}/(2)^r$ ed il gruppo generato è il prodotto semidiretto $S_r \ltimes \mathbb{Z}/(2)^r$. Come camera fondamentale possiamo prendere quella in cui $x_i > 0,\ \forall i$ e $x_1 > x_2 > \cdots > x_r)$.

Per tali vettori le radici positive sono le $e_i, e_i - e_j, e_i + e_j\ i < j$. Le radici semplici sono evidentemente $\alpha_i := e_i - e_{i+1},\ i = 1, \dots, r-1, \quad \alpha_r = e_r$ infatti, oltre alle formule 4.8.1 abbiamo: $e_i = e_i - e_r + e_r$. Evidentemente $(\alpha_i, \alpha_r) = 0$ se $i < r-1$ mentre $(\alpha_{r-1}, \alpha_r) = -1$ e $\langle \alpha_{r-1}, \alpha_r \rangle \langle \alpha_r, \alpha_{r-1} \rangle = 2$, finalmente l'ultima radice è più corta, abbiamo il diagramma B_r.

È chiaro che $S_r \ltimes \mathbb{Z}/(2)^r$ è il gruppo di Weyl.

Tipo C_r: Si può vedere come sistema duale a B_r. Quindi le radici sono

$$\pm 2e_i, \qquad \pm e_i \pm e_j,\ i \neq j$$

Per tali vettori le radici positive sono le $2e_i, e_i - e_j, e_i + e_j$ $i < j$. Le radici semplici sono evidentemente $\alpha_i := e_i - e_{i+1},\ i = 1, \dots, r-1, \quad \alpha_r = 2e_r$.

Tipo $D_r,\ r > 3$: Sia $E := \mathbb{R}^r$ prendiamo come radici i vettori a coordinate intere e di modulo quadro 2. Questi sono esattamente i vettori $\pm e_i \pm e_j,\ i \neq j$. È evidente che tutti gli assiomi sono verificati.

I vettori regolari sono quelli $(x_1, \dots, x_r)$ per cui se $i \neq j$ si ha $x_i \neq \pm x_j$.

In questo caso il gruppo di simmetrie da considerare è un sottogruppo del gruppo generato dal gruppo simmetrico S_r che permuta le coordinate (generato dalle riflessioni tramite le radici $e_i - e_j$ ed il gruppo $\mathbb{Z}/(2)^r$ degli r possibili cambiamenti di segno. Infatti la riflessione determinata da una radice $e_i + e_j$ fissa tutti gli $e_h,\ h \neq i, j$ mentre manda $e_i \to -e_j,\ e_j \to -e_i$, quindi traspone i due vettori e ne cambia simultaneamente il segno. Pertanto otteniamo per composizione tutti quegli elementi di $\mathbb{Z}/(2)^r$ in cui il numero di -1 che appare è *pari*. Se Γ denota questo sottogruppo (isomorfo in modo non canonico a $\mathbb{Z}/(2)^{r-1}$, il gruppo di Weyl è il prodotto semidiretto $S_r \ltimes \Gamma$. Come camera fondamentale possiamo prendere quella in cui $x_1 > x_2 > \cdots > x_r$) e $x_i + x_j \neq 0,\ \forall i, j$.

Per tali vettori le radici positive sono le $e_i - e_j, e_i + e_j$ $i < j$. Le radici semplici sono evidentemente $\alpha_i := e_i - e_{i+1},\ i = 1, \dots, r-1, \quad \alpha_r = e_{r-1} + e_r$ infatti, oltre alle formule 4.8.1 abbiamo (le forule ricorsive): $e_i + e_r = e_i + e_{i+1} + e_{i+1} + e_r, e_i + e_j = e_i - e_r + e_j + e_r$. Evidentemente $(\alpha_i, \alpha_r) = 0$ se $i < r-2$ mentre $(\alpha_{r-1}, \alpha_r) = 0,\ (\alpha_{r-2}, \alpha_r) = -1$, abbiamo il diagramma D_r.

Tipo F_4: Nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^4$ sia Λ^0 il reticolo dei vettori a coordinate intere e $\Lambda := \Lambda^0 + \mathbb{Z}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)/2$.

Definiamo:

$$\Phi := \{\alpha \in \Lambda \mid (\alpha, \alpha) = 1, 2\}.$$

Si vede facilmente che:

$$\Phi := \{\pm e_i,\ \pm e_i \pm e_j, i \neq j; \quad \pm\frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}. \tag{4.8.2}$$

Si verifica facilmente che i numeri $\langle \alpha, \beta \rangle$ sono interi.

I vettori regolari hanno la proprietà che $x_i \neq 0, x_i \pm x_j \neq 0, x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \neq 0$.

Ad esempio prendiamo il vettore regolare $8, 4, 2, 1$. Fornisce come radici positive:

$$e_i,\ e_i - e_j, i < j, \quad e_i + e_j, \quad \frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4), \quad 24 \quad \text{radici}. \tag{4.8.3}$$

Come radici semplici abbiamo (verificare):

$$\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4),\ e_4,\ e_3 - e_4,\ e_2 - e_3. \tag{4.8.4}$$

Tipo G_2: È stato già costruito disegnandolo. Altrimenti prendiamo nello spazio $\mathbb{R}^3$ l'ortogonale a $e_1 + e_2 + e_3$, in questo ortogonale i vettori di modulo quadro 2 e 6. Esplicitamente, possiamo scegliere:

$$\Phi^+ := \{e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ e_1 - e_3,\ 2e_1 - e_2 - e_3,\ \ 2e_2 - e_1 - e_3,\ \ -2e_3 + e_1 + e_2\}$$

$$\Delta := \{e_1 - e_2,\ 2e_2 - e_1 - e_3\}$$

Vogliamo ora trattare in modo uniforme i casi E_6, E_7, E_8, premettiamo:

PROPOSIZIONE. *Sia $\Phi \subset E$ un sistema di radici, sia $A \subset \Phi$ un sottoinsieme E_A il sottospazio di E generato da A.*
i) $\Phi_A := E_A \cap \Phi$ è un sistema di radici in E_A.
ii) Se $A \subset \Delta$ è parte di una base allora A è una base del sistema di radici di Φ_A.

DIM. i) Tutti gli assiomi sono banalmente verificati, in quanto se $\alpha \in E_A$ si ha che $s_\alpha(E_A) \subset E_A$.

ii) Se $v \in E$ è un vettore regolare in E per Φ, la sua proiezione ortogonale v_A su E_A è un vettore regolare in E per Φ_A. Evidentemente se Φ^+ sono le radici positive relative a v, $\Phi^+ \cap E_A$ sono le radici positive di Φ_A relative a v_A. Se una radice positiva è in E_A scritta come combinazione lineare degli elementi di Δ devono apparire solo i coefficienti di A e quindi A è la base associata. $\square$

Diremo quindi che Φ_A è un sottosistema di radici. In altre parole un sottosistema di radici di Φ è un sottoinsieme Ψ tale che $\Psi = \Phi \cap \langle\Psi\rangle$, dove $\langle\Psi\rangle$ denota il sottospazio generato da Ψ.

Da questa proposizione segue che basta esibire E_8 per trovare all'interno di E_8 i sottosistemi di radici E_7, E_6.

Nello spazio $\mathbb{R}^8$ sia Λ^0 il reticolo dei vettori a coordinate intere e

$$\Lambda^1 := \Lambda^0 + \mathbb{Z}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8)/2.$$

OSSERVAZIONE Un elemento $\sum_{i=1}^8 c_i e_i \in \Lambda^1$ se e solo se $c_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ e $c_i - c_j \in \mathbb{Z},\ \forall i, j$. Equivalentemente se prendamo $\sum_i a_i e_1 + c/2 \sum_{i=1} 8e_i$ si ha che tale elemento è in Λ se e solo se $\sum_i a_i$ è pari.

Per un tale elemento si ha che $\sum_i c_i \in \mathbb{Z}$ in quanto o tutti i c_i sono interi o tutti della forma $1/2 + a_i,\ a_i \in \mathbb{Z}$.

Inoltre l'insieme Λ degli elementi di Λ^1 per cui $\sum_i c_i$ è pari è un reticolo.

Inoltre per tale reticolo affermiamo che $(a, b) \in \mathbb{Z}, \forall a, b \in \Lambda$.

Infatti se $a = \sum_{i=1}^8 c_i e_i + c/2 \sum_{i=1} 8e_i, b = \sum_{i=1}^8 d_i e_i + d/2 \sum_{i=1} 8e_i,\quad \sum_i c_i, \sum_i d_i \in 2\mathbb{Z}$ si ha $(a, 1/2 \sum_{i=1} 8e_i) = 1/2 \sum_i c_i \in \mathbb{Z}$ e l'enunciato segue facilmente.

Sia $\Phi := \{\alpha \in \Lambda \,|\, (\alpha, \alpha) = 2\}$ si ha:

$$\Phi = \{\pm(e_i \pm e_j),\ i \neq j, \qquad 1/2\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k(i)}e_i,\ k(i) = 0, 1,\ \sum k(i) \quad \text{pari }\}$$

infatti un vettore del tipo $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} a_i e_i$ ha modulo quadro $\frac{1}{4}\sum_i a_i^2$, se gli a_i sono interi ed il modulo quadro è 2 si deve avere $8 = \sum_i a_i^2$.

Un vettore in $v \in \Lambda^1 - \Lambda^0$ ha tutte le coordinate non nulle e quindi per un tale vettore si avrà $a_i = \pm 1$. $v = 1/2\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k(i)}e_i = (e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6+e_7+e_8)/2 - \sum_{i\,|\,k(i)=1} e_i$

La condizione ulteriore imposta $v \in \Lambda$ afferma che $1/2(a-b)$ dove a è il numero di segni $+$ e b il numero di $-$. Deve essere $a + b = 8$ e $4|a - b = 8 - 2b$ quindi b pari.

Abbiamo in tutto $4\binom{8}{2} = 112$ radici del tipo $\pm e_i \pm e_j$ e $\binom{8}{1} + \binom{8}{3} + \binom{8}{5} + \binom{8}{7} = 2^7 = 128$ radici $1/2\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k(i)}e_i$, per un totale di 240 radici.

Come radici positive possiamo prendere, fissando come vettore regolare ad esempio $(128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1)$:

$$e_i - e_j, e_i + e_j \ i < j, \quad 1/2(e_1 + \sum_{i=2}^{8}(-1)^{k(i)}e_i), \quad \sum_i k(i) \quad \text{pari.}$$

Come base di radici semplici possiamo prendere:

$$e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5, e_5 - e_6, e_6 - e_7, e_7 - e_8, e_7 + e_8, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8).$$

Infatti le radici $e_i - e_j, e_i + e_j \ i < j,\ i \geq 2$ si decompongono usando le prime 7 proposte radici semplici, come nel caso D_7. Una radice $1/2(e_1 + \sum_{i=2}^{8}(-1)^{k(i)}e_i)$ si ottiene cambiando un numero pari dei segni degli elementi $e_i, i = 2, \dots 8$ cambiare due segni relativi a i, j con $i, j < 7$ corrisponde a sommare con $e_i + e_j$ mentre per $i, 8$ a sommare con $e_i - e_8$ in ogni caso radici.

Finalmente le radici $e_1 - e_i$ si otttengono come e.g:

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8) + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 - e_8)$$

Abbiamo E_8.

Per E_7 osserviamo che il sottospazio generato da

$$e_3 - e_4, e_4 - e_5, e_5 - e_6, e_6 - e_7, e_7 - e_8, e_7 + e_8, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$$

è il sottospazio dove la somma delle due prime coordinate $x_1 + x_2 = 0$, quindi le radici positive che si trovano in tale sottospazio sono:

$$e_1 - e_2, e_i \pm e_j, 3 \leq i < j \leq 8, \quad 1/2(e_1 - e_2 + \sum_{i=3}^{8}(-1)^{k(i)}e_i), \quad \sum_i k(i) \quad \text{dispari.}$$

contando $1 + 30 + 32 = 63$.

Per E_6 osserviamo che il sottospazio generato da

$$e_4 - e_5, e_5 - e_6, e_6 - e_7, e_7 - e_8, e_7 + e_8, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$$

è il sottospazio dove le due somme coordinate $x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = 0$, quindi le radici positive che si trovano in tale sottospazio sono:

$$e_i \pm e_j,\ 4 \le i < j \le 8, \quad 1/2(e_1 - e_2 - e_3 + \sum_{i=4}^{8} (-1)^{k(i)} e_i), \quad \sum_i k(i) \quad \text{pari}.$$

contando $20 + 16 = 36$.

4.9 Automorfismi di un sistema di radici

Vogliamo completare l'analisi fatta studiando il gruppo degli automorfismi di un sistema di radici Φ. Per definizione un automorfismo è una trasformazione lineare che manda Φ in Φ.

LEMMA. *Se Φ è irriducibile un automorfismo T è una trasformazione ortogonale e, fissata una base Δ si ha $T = Uw$ con $w \in W$ e $U(\Delta) = \Delta$.*

DIM. Sia $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ e Δ la base associata. $T(\Delta)$ è una base dello spazio vettoriale e $T(\Phi^+)$ è formato da combinazioni lineari acoefficienti interi positivi. pertanto se u è un vettore che ha prodotto scalare positivo con $T(\Delta)$ esso ha prodotto scalare positivo con $T(\Pi^+)$ è quindi regolare e chiaramente $T(\Delta)$ è una base. Pertanto esiste un $w \in W$ con $T = Uw$ con $w \in W$ e $U(\Delta) = \Delta,\ U(\Phi^+) = \Phi^+$.

Resta da provare che U è ortogonale. Per questo osserviamo che, date due radici α, β in Δ il numero di legami fra esse è determinato dal numero di radici positive che sono loro combinazioni lineari, tale numero è rispettivamente $2, 3, 4, 6$ a seconda che ile due radici siano unite da $0, 1, 2, 3$ lati. Un automorfismo del sistema di radici che fissa una base deve quindi preservare il grafo di Coxeter, ma anche il diagramma di Dynkin come si vede per ispezione nei casi a due dimensioni. Pertanto preserva la matrice di Cartan e dunque la metrica.

TEOREMA. *Sia Φ un sistema di radici irriducibile e $\mathcal{A}_\Phi$ il suo gruppo di automorfismi. Sia $\mathcal{A}_\Delta$ il sottogruppo che fissa una base.*
i) W è un sottogruppo normale di $\mathcal{A}_\Phi$.
ii) $\mathcal{A}_\Phi$ è un prodotto semidiretto $\mathcal{A}_\Phi = \mathcal{A}_\Delta \ltimes W$.
ii) $\mathcal{A}_\Delta$ è 1 nei tipi $A_1, B_n, C_n, G_2, F_4, E_7, E_8$ è $\mathbb{Z}/(2)$ per $A_n,\ n \ge 2,\ D_n, n > 4, E_6$ ed è S_3 per D_4.

DIM. i) Se T è una trasformazione ortogonale e v un vettore si ha $s_{T(v)} = TvT^{-1}$ da cui i) segue.

Dalla discussione precedente e da 4.5 Teorema 3, segue che $\mathcal{A}_\Phi = \mathcal{A}_\Delta W, \mathcal{A}_\Delta \cap W = 1$ da cui essendo W normale segue $\mathcal{A}_\Phi = \mathcal{A}_\Delta \ltimes W$.

iii) Per ispezione delle simmetrie geometriche dei diagrammi di Dynkin. □

L'esistenza di 3 vertici simmetrici e di un gruppo di 6 simmetrie per D_4 viene detta *trialità*.

5 Classificazione dei gruppi compatti

5.1 Generatori e relazioni

Fissata una base $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ di radici semplici indichiamo con e_i, h_i, f_i i tre elementi della algebra $sl(2)_{\alpha_i}$. Indichiamo inoltre con $c_{i,j} := \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ gli interi di Cartan.

Ricordiamo da 3.2 che, posto t_i l'elemento per cui $(h, t_i) = \alpha_i(h)$ si ha $t_i = \frac{2h_i}{(h_i,h_i)}$.
Nell'isometria fra $\mathfrak{t}$ ed il duale $\mathfrak{t}^*$, α_i corrisponde a t_i. Infine:

(5.1.1)
$$c_{i,j} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \frac{2\alpha_i(t_j)}{(t_j, t_j)} = \alpha_i(h_j).$$

Teorema. *i) Gli elementi $e_i, h_i, f_i,\ i = 1, \dots, r$ generano l'algebra di Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Vengono detti generatori di Chevalley.*

ii) Gli elementi $e_i, h_i, f_i,\ i = 1, \dots, r$ soddisfano alle seguenti relazioni (di Serre):

S1 $[h_i, e_j] = c_{j,i} e_j,\ [h_i, f_j] = -c_{j,i} f_j,\ [e_i, f_i] = h_i,\ [h_i, h_j] = 0,\ [e_i, f_j] = 0\ \forall i \neq j,$

S2 $ad(e_i)^{-c_{j,i}+1}(e_j) = 0,\ ad(f_i)^{-c_{j,i}+1}(f_j) = 0,$

Dim. i) Sia L la sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ generata da $e_i, h_i, f_i,\ i = 1, \dots, r$ vogliamo provare che $L = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Poiché $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ dobbiamo provare che $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \subset L$ e che, per ogni $\alpha \in \Phi$, $\mathfrak{g}_\alpha \subset L$. Prima di tutto gli elementi h_i sono una base di $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ e quindi $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \subset L$. Per la seconda parte proviamo che $\mathfrak{g}_\alpha \subset L$ per $\alpha \in \Phi^+$ per Φ^- l'argomento è identico. Scriviamo $\alpha = \sum_{i=1}^r k_i \alpha_i$ e sia $l(\alpha) := \sum_i k_i$ la *lunghezza* di α facciamo induzione sulla lunghezza. Se $l(\alpha) = 1$ la radice α è semplice, pertanto $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}e_i \subset L$ per qualche i. Altrimenti $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ con β_i radici positive e quindi di lunghezza inferiore ad α. Per induzione $\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2} \subset L$ quindi $\mathfrak{g}_\alpha = [\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2}] \subset L$.

ii) Le prime 3 relazioni sono quelle dei vari $sl(2)$ e la 5.1.1. La relazione $[h_i, h_j] = 0$ segue dal fatto che $\mathfrak{t}$ è abeliana.

$[e_i, f_j]$ ha peso $\alpha_i - \alpha_j$ che non è una radice quindi $[e_i, f_j] = 0$.

Le relazioni S2 discendono dalla decomposizione di $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ in rappresentazioni di $sl(2)_i$. Poiché $[f_i, e_j] = 0$ si ha che e_j è un vettore di peso più basso $\alpha_j(h_i) = c_{j,i}$ della rappresentazione che genera, pertanto $s_{\alpha_i}(e_j) =$ è un vettore peso più alto di peso $\alpha_j - \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \alpha_i = \alpha_j - c_{j,i}\alpha_i$. Ne segue che i vettori peso non nulli di tale rappresentazione sono $e_j, ad(e_i)(e_j), \dots ad(e_i)^{-c_{j,i}}(e_j)$ mentre $ad(e_i)^{-c_{j,i}+1}(e_j) = 0$. Analogo ragionamento per gli f. $\square$

5.2 Costruzione delle algebre semplici

Finalmente, apartendo da un sistema di radici Φ vogliamo costruire un gruppo compatto che le ammette.

Possiamo supporre che Φ sia irriducibile.

Faremo la costruzione in due passi, prima di tutto costruiamo una algebra di Lie complessa semplice, associata al sistema di radici. Dobbiamo spiegare cosa vulo dire anticipando alcune idee che trovano la loro sistemazione nello studio sistematico delle algebre di Lie complesse semisemplici.

Definizione. *Data una algebra di Lie L una sottoalgebra $\mathfrak{t}$ è detta torale se gli elementi $ad(t)$, $t \in \mathfrak{t}$ sono simultaneamente diagonalizzabili. Gli auotovalori di tali elementi vengono di nuovo chiamati radici.*

Ovviamente abbiamo la nozione di algebra torale massimale, la teoria generale passa attraverso uno studio di tali algebre provando per queste gli stessi risultati che abbiamo ottenuto per le algebre che si ottengono dai gruppi compatti.[5]

Teorema. *Dato un sistema di radici Φ l'algebra libera nei generatori e_i, h_i, f_i, $i = 1, \dots, r$ modulo l'ideale generato dalle relazioni di Serre è una algebra di Lie semplice con algebra torale massimale con base gli h_i e sistema di radici Φ.*

Vogliamo costruire la algebra di Lie per *generatori e relazioni*, come in ogni sistema algebrico possiamo considerare, date variabili x_i l'algebra di Lie libera in queste variabili, i cui elementi sono le combinazioni lineari formali dei monomi simbolici di Lie modulo le relazioni che definiascono la struttura di Lie (antisimmetria ed identità di Jacobi).

È possibile analizzare in dettaglio la struttura di tale algebra libera ma non ci serve in questo momento.[6]

Per fare alcuni calcoli utilizziamo una definizione formale. Dati elementi $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ in un algebra di Lie L, vogliamo definire ricorsivamente un elemento che denoteremo $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in L$ e che generalizza, per $n > 2$ l'usuale prodotto di Lie:

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] := [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

[5] questo non è un caso in quanto vi è una specie di *equivalenza* fra la teoria dei gruppi compatti semisemplici e quella delle algebre semisemplici.

[6] Da tal teorema di Poincaré-Birkof-Witt si ha che, data l'algebra associativa libera $R_k := \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ in variabili $x_1, \dots, x_k$ la sottoalgebra di Lie L_k di R_k generata dalle variabili $x_1, \dots, x_k$ è una algebra di Lie libera e R_k è la sua algebra inviluppante.

ESERCIZIO (per induzione):

$$ad(y)([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = \sum_{i=1}^{n}[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, [y, x_i], x_{i+1}, \ldots, x_n]$$

Utilizzeremo però questo semplice:

LEMMA. *Se una algebra di Lie è generata da elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ allora L ha una base di elementi $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}]$.*

DIM. Sia M il sottospazio generato linearmente dagli elementi $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}]$. Per costruzione $x_i \in M$, inoltre evidentemente $ad(x_i)(M) \subset M$ per ogni i. Ora se $a, b \in L$ sono tali che $ad(a)(M) \subset M$, $ad(b)(M) \subset M$ si ha che $ad([a,b])M \subset M$ quindi gli elementi di L per cui $ad(a)(M) \subset M$ sono una sottoalgebra contenente i generatori x_i e dunque $[L, M] \subset M$. M è quindi una sottoalgebra contenente i generatori dunque $M = L$. $\square$

A partire dall'algebra vogliamo costruire l'algebra L definita dalle relazioni*, S1,S2.* Iniziamo a studiare l'algebra di Lie L^1 generata dagli elementi $e_i, h_i, f_i,\ i = 1, \ldots, r$ modulo le sole relazioni *S1.* In tale algebra poniamo n_1^+ la sottoalgebra di Lie generata dalle classi degli elementi e_i, n_1^- la sottoalgebra di Lie generata dalle classi degli elementi f_i, e $\mathfrak{t}$ la sottoalgebra generata dalle classi degli elementi h_i per abuso di notazione continueremo a denotare con gli stessi simboli $e_i, h_i, f_i,\ i = 1, \ldots, r$ anche le classi di tali elementi in L^1. Queste notazioni sono giustificate dal seguente:

LEMMA. *i) Le classi degli elementi $e_i, h_i, f_i,\ i = 1, \ldots, r$ in L^1 sono linearmente indipendenti.*

ii) n_1^+ (risp. n_1^-) ha una base formata da elementi $[e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots, e_{i_k}]$, (risp. $[f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_k}]$). Un tale monomio è un autovettore di $\mathfrak{t}$ di autovalore $\sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j}$ (risp. $-\sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j}$).

iii) L^1 è somma diretta $n_1^+ \oplus \mathfrak{t} \oplus n_1^-$.

DIM. i) Basta provare che:

a) Le classi degli elementi $h_i,\ i = 1, \ldots, r$ in L^1 sono linearmente indipendenti.

b) Le classi degli elementi $e_i, f_i,\ i = 1, \ldots, r$ in L^1 sono non nulle.

Infatti se proviamo questi due enunciati possiamo concludere usando le relazioni *S1* che ci dicono che gli e_i, f_i sono autovettori degli operatori $ad(h_i)$ con autovalori non nulli e distinti.

Per provare questi primi due enunciati forniamo una rappresentazione esplicita dell'algebra L^1 da cui questi enunciati seguono facilmente.

Prendiamo come spazio della rappresentazione l'algebra libera in r variabili $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

Definiamo operatori:

$$\hat{h}_j(1) := 0, \quad \hat{h}_j(v_{i_1} \ldots v_{i_k}) := -(c_{i_1,j} + c_{i_2,j} + \cdots + c_{i_k,j})v_{i_1} \ldots v_{i_k}.$$

$$\hat{f}_j(1) := v_j, \quad \hat{f}_j(v_{i_1} \dots v_{i_k}) := v_j v_{i_1} \dots v_{i_k}. \quad \hat{e}_j(1) := 0, \ \hat{e}_j(v_i) := 0.$$

$$\hat{e}_j(v_{i_1} \dots v_{i_k}) := v_{i_1} \hat{e}_j(v_{i_2} \dots v_{i_k}) - \delta_j^{i_1}(c_{i_1,j} + c_{i_2,j} + \dots + c_{i_k,j}) v_{i_1} \dots v_{i_k}.$$

Si verifica immediatamente dalle definizioni che questi operatorri soddisfano le relazioni *S1* e quindi forniscono una rappresentazione dell'algebra L_1.

1) I vettori linearmente indipendenti v_i sono autovettori per gli h_j di autovalori le funzioni lineari $c_{j,i}$ che sono linearmente indipendenti, pertanto anche gli elementi h_i in L_1 sono linearmente indipendenti.

2) Gli elementi $\hat{f}_i$ sono evidentemente non 0 pertanto gli elementi $f_i \in L_1$ sono non nulli.

3) Gli elementi $e_i \in L_1$ sono non nulli per esempio in quanto $[e_i, f_i] = h_i$.

ii) n_1^+ è generata linearmente da monomi $[[\dots[e_{i_1}, e_{i_2}], e_{i_3}], \dots, e_{i_k}]$. Un tale monomio è un autovettore di $\mathfrak{t}$ di autovalore $\sum_{j=1}^k \alpha_{i_j}$.

iii) Per provare che L^1 è somma diretta $n_1^+ \oplus \mathfrak{t} \oplus n_1^-$ proviamo prima di tutto che $L^1 = n_1^+ + \mathfrak{t} + n_1^-$. Poiché $n_1^+ + \mathfrak{t} + n_1^-$ contiene gli elementi e_i, h_i, f_i basta provare che $n_1^+ + \mathfrak{t} + n_1^-$ è stabile tramite la azione aggiunta di tali elementi. Questo si prova facilmente per induzione a partire dalle relazioni. Per esempio applicando;

$$ad(f_i)[e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_k}] = \sum_j [e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, [f_i, e_{i_j}], \dots e_{i_k}] =$$

$$= \sum_j [e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, \delta_{i_j}^i h_i, \dots e_{i_k}] = \sum_j \delta_{i_j}^i (\pm \sum_{s=1}^{j-1} c_{i_s,i}) [e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_{j-1}}, e_{i_{j+1}}, \dots e_{i_k}]$$

è ancora una somma di monomi nelle e_i.

Per provare che la somma è diretta basta osservare che (ii) sia n_1^+ che $\mathfrak{t}$ che n_1^- sono spazi con una base di autovettori per gli elementi h_j.

La differenza è che $\mathfrak{t}$ corrisponde all'autovalore 0 mentre n_1^+ agli autovalori *positivi* $\sum n_i \alpha_i, \ n_i \geq 0$ e n_1^- agli autovalori *negativi* $\sum n_i \alpha_i, \ n_i \leq 0$. Essendo le α_i linearmente indipendenti, spazi di autovettori relativi ad autovalori distinti formano somma diretta. $\square$

Finiamo ora la dimostrazione della esistenza secondo Serre.

Per costruzione, l'algebra L_1 contiene, per ogni i una copia $sl_i(2)$ di $sl(2)$ con base e_i, h_i, f_i.

Poniamo $E_{i,j} := ad(e_i)^{-c_{j,i}+1}(e_j) \in n_1^+, \ F_{i,j} := ad(f_i)^{-c_{j,i}+1}(f_j) \in n_1^-$.

Lemma. *In L_1 si ha:*

$$ad(f_k)(E_{i,j}) = 0, \ \forall k, i, j.$$

Dim. Distinguiamo due casi. Se $k \neq i$ dalle relazioni *S1* segue che $ad(e_i)$ ed $ad(f_k)$ commutano pertanto $ad(f_k)(ad(e_i)^{-c_{j,i}+1}(e_j)) = ad(e_i)^{-c_{j,i}+1}(ad(f_k)(e_j))$. Se $k \neq j$ si ha

$ad(f_k)(e_j) = 0$ altrimenti $ad(f_j)(e_j) = -h_j$ e $ad(e_i)^{-c_{j,i}+1}(-h_j) = ad(e_i)^{-c_{j,i}} c_{j,i} e_i = 0$, in quanto se $c_{j,i} \neq 0$ si ha $ad(e_i(e_i) = 0$.

Se $k = i$ dobbiamo analizzare il sottomodulo relativo ad $sl_i(2)$ generato da e_j.

A priori tale modulo non è di dimensione finita quindi non possiamo usare direttamente la teoria svolta, ma essenzialmente ripetere la dimostrazione fatta in dimensione finita. Infatti abbiamo $ad(f_i)(e_j) = 0$ quindi e_j è come un vettore di peso più basso ed il suo peso (rispetto ad h_i) è $-m := c_{j,i}$ dalla identità $[h_i, e_j] = c_{j,i} e_j$. Dalla analisi fatta nella teoria delle rappresentazioni segue che, per ogni t si ha che $(ad(e_i)^t(e_j))$ è un vettore di peso $c_{j,i} + 2t$ e che $ad(f_i)(ad(e_i)^t(e_j)) = t(m - t + 1)(ad(e_i)^{t-1}(e_j))$. Pertanto per $t = m + 1$ si ha $ad(f_i)(ad(e_i)^t(e_j)) = 0$. $\square$

Siano ora I, J rispettivamenete gli ideali di n_1^+ e n_1^- generati dagli elementi $E_{i,j}$, risp. $F_{i,j}$. Vogliamo dimostrare che $I, J, I \oplus J \subset L_1$ sono ideali di L_1.

Fatto questo proveremo che il quoziente $L := L_1/I + J$ è l'algebra richiesta dal teorema di esistenza.

Proviamo l'enunciato per I, per J è simile. Dalla identità di Jacobi segue che I è somma degli spazi $[\dots[E_{i,j}, e_{i_1}], e_{i_2}], \dots, e_{i_k}]$. Se applichamo $ad(h_i)$ dalla identità di Jacobi segue facilmente che tali elementi sono autovettori. È chiaro che il commutatore di due vettori peso è un vettore peso (per la somma dei pesi).

Se applichiamo $ad(e_i)$abbiamo una espressione dello stesso tipo. Infine se applichiamo $ad(f_i)$ abbiamo una somma data dai termini in cui applichiamo $ad(f_i)$ ai vari fattori del monomio scelto. Poiché $ad(f_i)(E_{i,j}) = 0$ restano solo i termini in cui compaiono elementi $ad(f_i)(e_j)$. Un tale elemento o è 0 oppure è in $\mathfrak{t}$ in questo ultimo caso usiamo il fatto che il monomio precedente è un autovettore per $\mathfrak{t}$.

OSSERVAZIONE Le radici semplici non appaiono come autovalori in $I + J$ pertanto modulo $I + J$ gli elementi e_i, f_i, h_i restano linearmente indipendenti.

Lemma. *In L gli elementi $ad(e_i)$ e $ad(f_i)$ sono localmente nilpotenti.*

Dim. Se applichiamo $ad(f_i)$ ad un elemento $[e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_k}]$ abbiamo una combinazione lineare di elementi del medesimo tipo ma di lunghezza $k-1$ tranne nel caso $k = 1$ e $ad(f_i)(e_i) = -h_i$, iterando $ad(f_i)(-h_i) = 2f_i$ e $ad(f_i)(2f_i) = 0$. Similmente per $ad(e_i)$ applicata ad n^-. Se invece applichiamo $ad(e_i)^M$ ad un elemento $[e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_k}]$ abbiamo una somma di termini che sono prodotti di Lie di elementi del tipo $ad(e_i)^{M_j}(e_{i_2})$ con $\sum_j M_j = M$. Se M è abbastanza grande abbiamo che in ogni termine almeno un M_j è maggiore di $-c_{j,i} + 1$ e quindi il termine è 0 in L. $\square$

Il fatto che $ad(e_i)$ e $ad(f_i)$ sono localmente nilpotenti implica che L è somma diretta di moduli di dimensione finita per $sl_i(2)$ e che abbiamo una azione del corrispondente $SL(2)$ su L. In particolare possiamo considerare l'elemento

$$n_i := \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = esp(e_i)esp(-f_i)esp(e_i)$$

questo elemento normalizza $\mathfrak{t}$ inducendo la riflessione s_i e porta un spazio di peso β nello spazio di peso $s_i(\beta)$.

LEMMA. *Sia $\gamma \in E$, allora o γ è un multiplo di una radice oppure esiste un $w \in W$ per cui, posto $w(\gamma) = \sum_i n_i\alpha_i,\ \alpha_i \in \Delta$ si ha un $n_i < 0$ ed un $n_j > 0$ fra i suoi coefficienti.*

DIM. Se γ non è un multiplo di una radice il suo iperpiano ortogonale è distinto dagli iperpiani ortogonali alle radici, esiste quindi un vettore regolare v ortogonale a γ. Sia $w(v)$ nella camera fondamentale, è un vettore ortogonale a $w(\gamma)$. Pertanto:

$$0 = (w(v), w(\gamma)) = \sum_i n_i(w(v), \alpha_i).$$

Per ipotesi $(w(v), \alpha_i) > 0$ per ogni i e l'enunciato segue.

TEOREMA.
Dato un peso γ si ha che $L_\gamma = 0$ a meno che γ sia una radice, in questo caso $\dim L_\gamma = 1$.
L è semplice.

DIM. $\dim L_\gamma = \dim L_{w(\gamma)}$ per ogni $w \in W$ pertanto se γ è una radice esiste w per cui $w(\gamma)$ è una radice semplice e l'enunciato segue.
Un elemento non nullo $[e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_k}]$ con $k > 1$ deve avere $i_1 \neq i_2$ quindi i multipli delle radici non appaiono e per gli altri si applica il lemma precedente. $\square$

Sia I un ideale di L in particolare deve essere formato da autovettori di $\mathfrak{t}$, se contiene un $h \in \mathfrak{t}, h \neq 0$ si ha per qualche i che $\alpha_i(h)e_i = [h, e_i] \neq 0$, pertanto qualche $e_i \in I$, poiché $sl(2)$ è semplice e $I \cap sl_i(2) \neq 0$ si ha $sl_i(2) \subset I$. Ma se h_i corrisponde ad un nodo del diagramma di Dynkin vediamo subito che anche $[h_i, e_j] \neq 0$ per j connesso ad i e $e_j \in I$ continuando poiché il diagramma di Dynkin è connesso abbiamo che gli elementi $e_i, h_i, f_i \in I$ ma questi elementi generano L quindi $I = L$. $\square$

5.3 La forma di Killing Gli elementi di $\mathfrak{t}$ (che hanno come base gli h_i) sono simultaneamente diagonalizzabili e segue come sempre che due spazi di autovalori α, β sono ortogonali per la forma di Killing a meno che $\alpha + \beta = 0$.

Gli elementi $h, k \in \mathfrak{t}$ sono diagonalizzabili di autovalori simultanei $\alpha(h), \alpha(k), \alpha \in \Phi$ di molteplicità 1 quindi per la forma di Killing si ha:

$$(h, k) = tr(ad(h)ad(k)) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h)\alpha(k) = 2 \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha(h)\alpha(k)$$

Se $h = \sum_i c_i h_i,\ c_i \in \mathbb{R}$ poiché $\alpha(h_i) \in \mathbb{Z}$ si ha $(h, h) \geq 0$ e dalla indipendenza lineare delle radici $(h, h) = 0$ se e solo se $h = 0$ ovvero la forma è positiva sullo spazio reale generato dagli h_i. Inoltre dalla associatività si ha (cf. 3.2) $(e_i, f_i) = 1/2(h_i, h_i) > 0$.

5.4 La forma compatta

Resta da passare da una algebra semplice ad un gruppo compatto, per questo ricordando la teoria delle matrici dobbiamo definire gli elementi *antihermitiani* in pratica dobbiamo definire l'analogo di $X \to -\overline{X}^t$.

Per capire la definizione analizziamo l'automorfismo $X \to -X^t$ dell'algebra di Lie $sl(2, \mathbb{C})$. Applicato alle matrici e, f, h le manda in $-f, -e, -h$.

Quindi si definisce:

PROPOSIZIONE. *i) La applicazione $e_i \to -f_i, f_i \to -e_i, h_i \to -h_i$ si estende ad un automorfismo ω di L di ordine 2.*
ii) Per ogni radice α si ha che $\omega(L_\alpha) = L_{-\alpha}$.

DIM. i) Basta provare che tramite tale applicazione le relazioni vengono mandate in relazioni. Questo è sostanzialmente evidente e lasciato per esercizio. Il fatto che $\omega^2 = 1$ segue dal fatto che questa proprietà è vera sugli elementi e_i, f_i, h_i che generano L.

ii) Se $x \in L_\alpha$ e $h \in \mathfrak{t}$ si ha:

$$[h, \omega(x)] = -[\omega(h), \omega(x)] = -\omega[h, x] = -\omega(\alpha(h)x) = -\alpha(h)\omega(x)$$

$\square$

ω è detta *involuzione di Cartan.*

L'algebra di Lie L è definita sui reali (e anche sui razionali o persino sugli interi). Pertanto ha senso applicare la coniugazione dei coefficienti pensando i generatori come vettori reali.

La involuzione di Cartan induce un automorfismo di ordine 2 del gruppo di Lie associato compatibile per i vari $SL(2, \mathbb{C})$ associati alle algebre di Lie e_i, f_i, h_i con l'automorfismo $X \to X^* = (\overline{X}^{-1})^t$. In particolare l'elemento n_i è unitario e fissato da ω.

Vogliamo quindi considerare la sottoalgebra di Lie $\mathfrak{g} := \{x \in L \,|\, \omega(\overline{x}) = x\}$ formata dagli *elementi antihermitiani.*

Analizziamo la sua struttura. Prima di tutto se $x = \sum_j a_j h_j$ si ha $\omega(\overline{x}) = -\sum_j \overline{a}_j h_j$, pertanto $\omega(\overline{x}) = x$ se e solo se a_j è immaginario per ogni j.

Abbiamo visto che $\omega(L_\alpha) = L_{-\alpha}$ quindi se $e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha$ è una base standard di $sl_\alpha(2, \mathbb{C})$ si deve avere $\omega(e_\alpha) = cf_\alpha$ per qualche c. Ma da $\omega^2 = 1$ si ha $\omega(f_\alpha) = c^{-1}e_\alpha$ e posto $c = d^2$ sostituendo e_α, f_α con $de_\alpha, d^{-1}f_\alpha$ possiamo fissare la base in modo che $\omega(e_\alpha) = -f_\alpha$. Inoltre scritta $\alpha = w(\alpha_i)$ con $w \in W$ e α_i radice semplice e $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ abbiamo $L_\alpha = n_{i_1} \dots n_{i_k} L_{\alpha_i}$ per cui, posto $n_w := n_{i_1} \dots n_{i_k}$ possiamo prendere $e_\alpha = n_w(e_{\alpha_i})$ che quindi è reale. Segue che in $L_\alpha \oplus L_{-\alpha}$ gli elementi antihermitiani sono lo spazio vettoriale sui reali con base:

$$e_\alpha + \omega(e_\alpha), \quad i(e_\alpha - \omega(e_\alpha)).$$

TEOREMA. *L'algebra $\mathfrak{g}$ degli elementi antihermitiani ha base su $\mathbb{R}$ gli elementi:*

$$ih_j, \quad e_\alpha + \omega(e_\alpha) = \quad e_\alpha - f_\alpha, \quad i(e_\alpha - \omega(e_\alpha)) = i(e_\alpha + f_\alpha), \quad \alpha \in \Phi^+.$$

Su questa algebra la forma di Killing è definita negativa, pertanto $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie di un gruppo compatto.

DIM. L'algebra L è la somma ortogonale, per la forma di Killing degli spazi $\mathfrak{t}, L_\alpha \oplus L_{-\alpha}, \quad \alpha \in \Phi^+$. Questi spazi sono fissati da $x \to \omega(\overline{x})$ pertanto la prima parte è vera. per la seconda basta calcolare la forma di Killing sui vari addendi ortogonali.

Sullo spazio generato dagli h_j sui reali la forma è positiva quindi è negativa sullo spazio generato dagli ih_j. Per quanto riguarda $\quad e_\alpha - f_\alpha, \quad i(e_\alpha + f_\alpha)$) abbiamo (ricordando che $0 = (e_\alpha, e_\alpha) = (f_\alpha, f_\alpha), \quad (e_\alpha, f_\alpha) > 0$:

$$(e_\alpha - f_\alpha, i(e_\alpha + f_\alpha)) = 0, \ (e_\alpha - f_\alpha, e_\alpha - f_\alpha) < 0, \ (i(e_\alpha + f_\alpha)), i(e_\alpha + f_\alpha))) < 0.$$

□

Abbiamo pertanto dimostrato:

TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE DEI GRUPPI DI LIE SEMPLICI COMPATTI. *Ad un gruppo di Lie compatto semplice è associato un sistema di radici irriducile. In questo modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra gruppi di Lie compatti semplici (a meno di isomorfismo) e sistemi di radici irriducili (a meno di isomorfismo).*

5.5 Il gruppo di Weyl

A questo punto dobbiamo paragonare due definizioni che abbiamo dato per il gruppo di Weyl. Quella interna al gruppo di Lie compatto $W := N_T/T$ e quella in termini del sistema di radici. Vogliamo provare che coincidono.

Abbiamo già visto che, un elemento $n \in N_T$ induce un'automorfismo del sistema di radici. Inoltre, per ogni radice semplice si ha un elemento $n_i \in SU_i(2)$ con $n_i \in N_T$ e n_i induce la riflessione s_i sulle radici. Detto W il gruppo di Weyl del sistema di radici abbiamo dunque un omomorfismo $N_T/T \to W$ suriettivo. Evidentemente anche N_T/T permuta le camere di Weyl quindi basta provare che, se $n \in N_T$ fissa la camera fondamentale allora $n \in T$. Per questo osserviamo che n induce un'automorfismo del sistema di radici che in particolare è una trasformazione ortogonale $\overline{n}$ di E di ordine finito k che fissa la camera C. Vogliamo provare che tale trasformazione fissa anche un vettore di C per questo basta prendere un vettore qualunque $x \in C$ e formare la media $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \overline{n}^i x \in C$ per convessità.

Dualmente abbiamo che n fissa una retta nell'algebra di Lie di $\mathfrak{t}$ che non è contenuta in nessun iperpiano definito da una radice. Esponenziando abbiamo che n commuta con un gruppo ad un parametro $esp(su)$ formato da elementi regolari. Dal Teorema 2, 1.3 esiste un toro massimale che contiene $n, esp(su)$ ma dal Lemma 3.4 l'unico toro massimale contenente $esp(su)$ è T e quindi $n \in T$.

5.6 Complementi

In effetti la storia non finisce qui, si può infatti provare che ogni algebra di Lie semplice complessa $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, è la complessificazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di un gruppo compatto semplice (unico a meno di isomorfismo).

In più, se G è un gruppo di Lie di algebra di Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ i sottogruppi di G compatti massimali sono tutti coniugati fra loro ed hanno algebra di Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.

Inoltre G è un gruppo algebrico (di tipo semplice) e per tali gruppi si ha una nozione algebrica di *toro massimale*, i tori massimali sono tutti coniugati fra loro.

Questo è l'inizio di una teoria molto precisa che immette potenti metodi di geometria algebrica nella teoria dei gruppi di Lie.

Anche rimanendo solo nella teoria dei gruppi compatti a questo punto il capitolo successivo è la teoria delle rappresentazioni di tali gruppi in cui i risultati fondamentali di Weyl e Cartan danno risposte molto precise ai problemi di classificazione e descrizione delle rappresentazioni irriducibili.

5.7 BIBLIOGRAFIA

TESTI CLASSICI

BIANCHI, Luigi Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni. - Pisa, E. Spoerri, 1918. vi, 590 p. 25 cm.

CAMPBELL, John Edward Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups, by John Edward Campbell. - Oxford, At the Clarendon press, 1903. xx, 416 p. 23 cm.

CARTAN, Elie Oeuvres complètes. - Paris, Gauthier, 1952-1955. 6 v. Vol. 1.1:Groupes de Lie.

CARTAN, Elie Oeuvres complètes. - Paris, Gauthier, 1952-1955. 6 v. Vol. 1.2: Groupes de Lie.

CARTAN, Elie La topologie des groupes de Lie / Elie Cartan. - Paris: Hermann, 1936. (Actualités scientifiques et industrielles; 358).

CARTAN, Elie Sur la structure des groupes de transformations finis et continus / E. Cartan. - Deuxième édition. - Paris: Librairie Vuibert, 1933.

Chevalley, C.: Theory of Lie groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1946. Theorie des groupes de Lie. Paris: Hermann. T. II, 1951; T. III, 1955

CHEVALLEY, Claude Théorie des groupes de Lie. Groupes algébriques. Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie. - Paris, Hermann, 1968.

CHEVALLEY, Claude Théorie des groupes de lie. Tome II: groupes algébriques / C. Chevalley. - Paris: Hermann, 1951. (Actualités scientifiques et industrielles; 1152).

CHEVALLEY, Claude Théorie des groupes de lie. Tome III: théorèmes généraux sur les algèbres de lie / C. Chevalley. - Paris: Hermann, 1955. (Actualités scientifiques et industrielles; 1226).

CHEVALLEY, Claude Theory of Lie groups. I / Claude Chevalley. - Princeton: Princeton University Press, 1946. (Princeton Mathematical Series; 8).

COHEN, Abraham An introduction to the Lie theory of one-parameter groups; with applicationsto the solution of differential equations, by Abraham Cohen. - Reprint of Edition 1911. - New York: G. E. Stechert & Co., 1931. (Reprints of Rare Mathematical Books and Logarithm Tables).

Lie, Sophus Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von S. Lie und G. Scheffers. - Leipzig, B. J. Teubner, 1896. Bd. 1.; cm.25.

Séminaire C. Chevalley 1956-58. Classification des groupes de lie algébriques. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958. 2 vol.

Seminaire "Sophus Lie": [exposes]. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955-56. In testa al front.: Faculté des sciences de Paris.

Seminaire "Sophus Lie",1., Paris, 1954/1955 Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie. - Paris: Ecole Normale Supérieure.

WEYL, Hermann The classical groups, their invariants and representations, by Hermann Weyl. - Princeton, N.J., Princeton university press; London, G. Cumberlege, Oxford university press [1946]. xiii, 320 p. 24 cm. - (Princeton Mathematical Series; 1). "Second edition, with supplement.". - Bibliography: p. 308-315.

TRATTATI GENERALI

BOURBAKI, Nicolas Groupes et algèbres de Lie. Chapitre 1. Algèbres de Lie / N. Bourbaki. - Paris: Masson, 1960. (Actualités scientifiques et industrielles; 1285).

BOURBAKI, Nicolas Groupes et algèbres de Lie. Chapitre 2. Algèbres de Lie libres. Chapitre 3. Groupes de Lie / N. Bourbaki. - Paris: Hermann, 1972. (Actualités scientifiques et industrielles; 1349).

BOURBAKI, Nicolas Groupes et algèbres de Lie. Chapitre 7. Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers. Chapitre 8. Algèbres de Lie semi-simples déployées. - Paris: Hermann, 1975. (Actualités scientifiques et industrielles; 1364).

BOURBAKI, Nicolas Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VII. Sous-algèbres de Cartan, élémemts réguliers. Chapitre VIII. Algèbres de Lie semi-simples déployées / N. Bourbaki. - Paris: Hermann, 1975. (Actualités scientifiques et industrielles; 1364).

BOURBAKI, Nicolas Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV. Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V. Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI. Systèmes deracines / N. Bourbaki. - Paris: Hermann, 1968. (Actualités scientifiques et industrielles; 1337).

FREUDENTHAL, Hans Linear lie groups [by] Hans Freudenthal [and] H. de Vries. - New York, Academic Press, 1969. xxii, 547 p. 24 cm. - (Pure and applied mathematics. A series of Monographs andTextbooks; 35).

Hochschild, Gerhard Paul Basic theory of algebraic groups and Lie algebras / Gerhard P. Hochschild. - New York: Springer-Verlag, c1981. viii, 267 p.; 24 cm. - (Graduate texts in mathematics; 75). Bibliography: p. 263.

Hochschild, Gerhard Paul The structure of Lie groups. - San Francisco-London-Amsterdam, Holden-Day, 1965.

Lie groups and Lie algebras I: Foundations of Lie theory Lie transformationgroups / A.L. Onishchik. - Berlin [etc.]: Springer, 1993. 235 p.; 24 cm. - (Encyclopaedia of mathematical sciences; 20). ISBN 3-540-18697-2

Lie groups and Lie algebras II: discrete subgroups of Lie groups and cohomologies of of Lie groups and Lie algebras / A.L. Onishchik, E.B. Vinberg (Eds.). - Berlin [etc.]: Springer, 2000. 219 p.; 25 cm. - (Encyclopaedia of mathematical sciences; 21).

Lie groups and Lie algebras III: Structure of Lie groups and Lie algebras / A.L. Onishchik, E.B. Vinberg (eds.). - Berlin [etc.]: Springer, 1994. 248 p.; 24 cm. - (Encyclopaedia of mathematical sciences; 41).

A.L. Onishchik, E.B. Vinberg. Lie groups and algebraic groups - Berlin: Springer, 1990. ix, 328 p.; 24 cm. - (Springer series in soviet mathematics).

ROSENFELD, Boris Geometry of Lie groups / B. Rosenfeld. - Dordrecht: Kluwer, 1997. xviii, 393 p.; 25 cm. - (Mathematics and its applications).

Serre, J-P.: Lie algebras and Lie groups. New York: W.A. Benjamin, 1965

Varadarajan, V. S. Lie groups, Lie algebras, and their representations. - New York: Springer-Verlag, c1984. xiii, 430 p.; 24 cm. - (Graduate texts in mathematics; 102).

STRUTTURA DELLE ALGEBRE DI LIE

Adams, John Frank Lectures on exceptional Lie groups - Chicago: University of Chicago Press, 1996. xiv, 122 p.; 25 cm. - (Chicago lectures in mathematics).

BERTRAM, Wolfgang The geometry of Jordan and Lie structures. - Berlin [etc.]: Springer, 2000. xvi, 269 p.; 25 cm. - (Lecture notes in mathematics; 1754).

Goto, M.; Grosshans F.D.; Semisimple Lie algebras, New York, Marcel Dekker, 1978.

Humphreys, J.E. Introduction to Lie algebras and representation theory, (3 ed.). New York; Springer, 1980.

N. Jacobson Exceptional Lie algebras . - New York, M. Dekker, 1971. v, 125 p. 26 cm. - (Lecture notes in pure and applied mathematics; 1).

Jacobson, Nathan Lie algebras. - New York: Dover, 1962. ix, 331 p.

REUTENAUER, Christophe Free Lie algebras / Christophe Reutenauer. - London: Clarendon Press, 1993. xvii, 269 p.; 24 cm. - (London Mathematical Society. Monographs series; 7).

Samelson, Hans Notes on Lie algebras. - Revised edition. - Berlin: Springer, 1990. xii, 162 p.; 24 cm. - (Universitext).

Serre, J-P.: Algèbres de Lie semi-simples complexes. New York: W.A. Benjamin, 1966

GRUPPI DI LIE E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

GILMORE, Robert Lie groups, Lie algebras and some of their applications. - Malabar: Krieger, 1994. xx, 587 p.

Helgason, Sigurdur Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. - New York: Academic Press, 1978. xv, 628 p.; 24 cm. - (Pure and applied mathematics. A series of Monographs andTextbooks).

Nomizu, Katsumi Lie groups and differential geometry . - S.l.: The mathematical society of Japan, 1956. (Publications of the Mathematical Society of Japan; 2).

Vranceanu, Gheorghe Leçons de géométrie différentielle. - Bucarest: Editions de l'Académie de la République Populaire Roumaine, 1957-1964. 3 v.

Warner, Frank Wilson Foundations of differentiable manifolds and Lie groups [by] Frank W. Warner. - Glenview, Ill., Scott, Foresman [1971]. 270 p. illus. 25 cm. - Bibliography: p. [260]-261.

GRUPPI DI LIE COMPATTI

Adams, J.F. Lectures on Lie groups, New York: W.A. Benjamin, 1969.

Bröcker T., tom Dieck T.; Representations of compact Lie groups, G.T.M. 98, Springer Verlag, 1985

Adams, John Frank Lectures on exceptional Lie groups Chicago: University of Chicago Press, 1996. xiv, 122 p.; 25 cm. - (Chicago lectures in mathematics).

Zhelobenko, D.P., Stern, AL: Representations of Lie groups. Moscow: Nauka, 1983

GRUPPI ALGEBRICI

Borel A.: Linear algebraic groups. New York: W.A. Benjamin, 1969.

Seminaire C. Chevalley. Classification des groupes de Lie algèbriques. T. 1-2. Paris: Ècole Norm. 1956-58

Humphreys, J.E. Linear algebraic groups, (3 ed.). New York; Springer, 1987.

HUMPHREYS, James E. Algebraic groups and modular Lie algebra. - Providence, AMS, 1967. (Memoirs of the American Mathematical Society; 71).

Seminaire Sophus Lie. Theorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie. Paris: Ècole Norm. Sup., 1955

Vinberg, E.B., Onishchik, A.L.: Seminar on algebraic groups and Lie groups, 1967/68. Moscow: Moscow Univ. Press, 1969 (Russian)

RELAZIONI CON LA FISICA

A. Roy Chowdhury. Lie algebraic methods in integrable systems. - Boca Raton[etc.]: Chapman & Hall/CRC, 2000. 354 p.; 25 cm. - (Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics; 415).

Jürgen Fuchs. Affine Lie algebras and quantum groups: an introduction, with applications in conformal field theory. - First paperback edition (with corrections). - Cambridge: Cambridge University Press, 1995. xiv, 433 p.; 25 cm. - (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

FUCHS, jurgen Symmetries, lie algebras and representations: a graduate course for physicists / J. Fuchs ... [et al.]. - Cambridge: C.U.P., 1997. xxi, 438 p.; 25 cm. - (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

HERMANN, Robert Lie algebras and quantum mechanics / R. Hermann. - New York: W. A. Benjamin, 1970. xvi, 320 p. 23 cm. - (Mathematics lecture note series).

Perelomov, Askold M. Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras. / A .M. Perelomov. - Basel: Birkhuser, 1990. x, 307 p.; 24 cm.

Simms, David John. Lie groups and quantum mechanics, by D. J. Simms. - Berlin, New York [etc.],Springer-Verlag, 1968. 90 p. illus. 28 cm. - (Lecture notes in mathematics; 52). Bibliography: p. 88-90.

Weyl, Hermann Gruppentheorie und Quantemechanik. - Leipzig: S. Hirzel, 1928.

LAVORI SPECIALISTICI

C. De Concini, C.Procesi, Complete Symmetric Varieties. C.I.M.E. 1982, Springer Lecture Notes 997, pp. 1-44 (1983).

C. De Concini, C.Procesi, Complete Symmetric Varieties II (Intersection Theory). Advanced Studies in Pure Mathematics 6, Algebraic groups and related topics pp. 481-513 (1985).

Dynkin, E.B.: The review of principal concepts and results of the theory of linear representations of semisimple Lie algebras (Complement to the paper "Maximal subgroups of classical groups"). Tr. Mosk. Mat. O-va 1, 109-151(1952) (Russian)

Dynkin, E.B.: Lie group theory. In: Mathematics in the USSR during last 40 years, 19171957, v. 1, pp. 213-227. Moscow: Fizmatgiz, 1959 (Russian)

Dynkin, E.B., Onishchik, A.L.: Compact global Lie groups. Usp. Mat. Nauk 10, 3-74 (1955) (Russian). English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. 21(1962), 119-192

Araki, S.: On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces. J. Math. Osaka City Univ. 13, 1-13(1962)

Borel, A.: Groupes linèaires algtbriques. Ann. of Math. 64, 20-82 (1956)

Dynkin, E.B.: Maximal subgroups of classical groups. Tr. Mosk. Mat. O-va 1, 39166 (1952) (Russian). English transl.: Amer. Math. Soc. Transl., Ser 2, 6, 245-378 (1957)

Dynkin, E.B.: Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. Mat. Sbornik 30 (72), 349- 462 (1952) (Russian). English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. Ser 2, 6, 111244

Freudenthal, H.: Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen. I. Indag. Math. 16, 369376(1954)

Gantmacher, F.R.: Canonical representation of automorphisms of a complex semi-simple Lie group. Mat. Sbornik 5 (47), 101-146 (1939)

Gantmacher, F.R.: On the classification of real simple Lie groups. Mat. Sbornik 5(47), 217-250 (1939)

Goto, M.: On an arcwise connected subgroup of a Lie group. Proc. Amer. Math. Soc. 20, 157162 (1969)

Iwahori, N.: On real irreducible representation of Lie algebra. Nagoya Math. J. 14, 5983 (1959)

Karpelevich, F.L: Simple subalgebras of real Lie algebras. Tr. Mosk. Mat. O-va 4, 3-112 (1955) (Russian)

Malcev, AL: On semisimple subgroups of Lie groups. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 8, 143-174 (1944) (Russian). English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. Ser 1, 11, 172-213

Malcev, AL: On the theory of the Lie groups in the large. Mat. Sbornik 16(58), 163-190 (1945); corrigendum: ibid. 19(61), 523 (1946)

Malcev, AL: On solvable Lie algebras. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 9, 329-352 (1945) (Russian). English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. Ser 1, 9, 228-262

Morozov, V.V.: On the theorem about a nilpotent element of a semisimple Lie algebra. Usp. Mat. Nauk 15, 137-139 (1960) (Russian)

Parthasaraty, Ranga Rao, Varadarajan: Representations of complex semisimple Lie groups. Ann. of Math. 85, 383-429 (1967)

Steinberg, R.: Endomorphisms of linear algebraic groups. Mem. Amer. Math. Soc. 80 (1968)

Steinberg, R.: Conjugacy classes in algebraic groups. Lect. Notes in Math., 366. Berlin: Springer, 1974

Tits, J.: Tabellen zu den einfachen Lieschen Gruppen und ihren Darstellungen. Lect. Notes in Math., 40. Berlin: Springer, 1967

Weyl, H.: Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Trans- formationen. I. Math. Zeitschr. 23, 271-309 (1925X II-IV ibid. 24, 328-395 (1926X Nachtrag ibid. 24,789-791 (1926)

TESTI VARI CONNESSI (algebre di Lie di dimensione infinita, algebre modulari, ideali primitivi)

Borho, Walter Primideale in Einhüllenden auflosbarer Lie -Algebren. W. Borho, P. Gabriel und R. Rentschler. - Berlin, Springer, 1973. (Lecture notes in mathematics; 357).

ALGEBRA IX: Finite groups of Lie type: Finite-dimensional division algebras / A. I. Kostrikin ... [et al.] (eds.). - Berlin: Springer, 1996. 239 p.; 24 cm. - (Encyclopaedia of mathematical sciences; 77).

CARTER, Roger W. Simple groups of Lie type [by] Roger W. Carter. - London, New York, Wiley-Interscience, 1972. [3], viii, 331 p. illus. 24 cm. - (Pure and applied mathematics). "A Wiley-Interscience publication.". - Bibliography: p. 311-322.

Drucker, Daniel Exceptional Lie algebras and the structure of hermitian symmetric spaces. - Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1978. iv, 207 p.; 26 cm. - (Memoirs of the American Mathematical Society; 208).

KAC, Victor G. Infinite dimensional Lie algebras / Victor G. Kac. - 2nd ed. - Cambridge [Cambridgeshire]; New York: Cambridge University Press, 1985. xvii, 280 p.: ill.; 24 cm. - Bibliography: p. 261-277.

Knapp, Anthony W. Lie groups, lie algebras, and cohomology. - Princeton,N.J.: Princeton University Press, 1988. xii, 509 p.: ill.; 24 cm. - (Mathematical notes; 34).

Seligman, George B. Modular Lie algebras. - Berlin, Springer, 1967. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge; 40).

NOTE STORICHE

Lie, Sophus Sophus Lie's 1880 transformation group paper/ translated by M. Ackermann; comments and additional material by Robert Hermann. - Brookline, MA.: Math Sci Press, c1975. (Lie groups. History, frontiers and applications; 1).

Lie, Sophus Sophus Lie's 1884 differential invariant paper = 1884 differential invariantpaper / translated by M. Ackermann; comments and additional material by Robert Hermann. - Brookline, MA.: Math Sci Press, c1976. viii, 273 p.; 21 cm. - (Lie groups. History, frontiers and applications; 3). Bibliography: p. 271-273.

Hawkins, Thomas Emergence of the theory of Lie groups: an essay in the history of mathematics 1869-1926 / Thomas Hawkins. - New York: Springer, 2000. xiii, 564 p.; 25 cm. - (Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences; 18).

TABELLE

BREMMER, M.R. Tables of dominant weight multiplicities for representation of simple Lie algebras. M.R. Bremmer, R.V. Moody, J. Patera. - New York: Dekker, c1985. (Pure and Applied Mathematics. A program of Monographs, Textbooks and Lecture Notes.; 90).

McKay, W. G. Tables of dimensions, indices, and branching rules for representations of simple Lie algebras / W. G. McKay and J. Patera. - New York: M. Dekker, c1981. v, 317 p.; 26 cm. - (Lecture notes in pure and applied mathematics; 69). Includes bibliographical references.

McKay, W. G. Tables of representation of simple Lie algebras: Vol. I Exceptional simple Lie algebras / W.G. McKay, J. Patera, D.W. Rand. - Montral, Centre de Recherches-Mathématiques-Université, 1990.

TITS, J. Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen. - Berlin, Springer, 1967. (Lecture notes in mathematics; 40).

Tits, Jacques. Sur les constantes de structure et le théoréme d'existence des algébres de Lie semi-simples. sta in Publications mathématiques n 31 / IHES. - Paris: Presses Universitaires de France, 1966.

ANALISI SU GRUPPI E RAPPRESENTAZIONI DI DIMENSIONE INFINITA

AGRANOVSKII, Mark L'vovich Invariant function spaces on homogeneous manifolds of Lie groups and applications / M. L. Agranovskii. - Providence: American Mathematical Society, 1993. ix, 131 p.; 26 cm. - (Translations of mathematical monographs; 126).

AKHIEZER, Dmitri N. Lie group actions in complex analysis / Dmitri N. Akhiezer. - Braunschweig:Vieweg, 1995. vii, 201 p.; 24 cm. - (Aspects of mathematics; 27).

Auslander, Louis. Unitary representation of solvable Lie groups / L. Auslander, C. C. Moore. - Providence, AMS, 1966. (Memoirs of the American Mathematical Society; 62).

Analyse harmonique sur les groupes de Lie: séminaire, Nancy-Strasbourg edité par P. Eymard ... [et al.]. - Berlin; New York: Springer-Verlag, 1975-¡79¿. v. $< 1 - 2 >$; 25 cm. - (Lecture notes in mathematics; 497).

BELTITA, Daniel Lie algebras of bounded operators / Daniel Beltita, Mihai Sabac. - Basel [etc.]: Birkhauser, 2001. viii, 217 p.; 25 cm. - (Operator theory. Advances and applications.; 120).

Boseck, Helmut Analysis on topological groups: general Lie theory / Helmut Boseck, Günter Czichowski, Klaus-Peter Rudolph. - Leipzig: Teubner, 1981. 136 p.; 21 cm. - (Teubner-Texte zur Mathematik; 37). Bibliography: p. 131-134.

Brezin, J. Unitary representation theory for solvable Lie groups. - Providence, AMS, 1968. (Memoirs of the American Mathematical Society; 79).

Collingwood, David H. Nilpotent obits in semsimple Lie algebras /David H. Collingwood and W .M. M McGovern. - New York: Van Nostrand Reinhold, 1993. xiii, 186 p.; 24 cm. - (Mathematics series).

Collingwood, David H. Representations of rank one Lie groups / David H. Collingwood. - Boston: Pitman Advanced Pub. Program, 1985. 244 p.: ill.; 25 cm. - (Research notes in mathematics; 137). Bibliography: p. 233-239.

Collingwood, David H. Representations of rank one Lie groups II: n-cohomology / David H. Collingwood. - Providence, R.I., USA: American Mathematical Society, c1988. iv, 101 p.: ill.; 26 cm. - (Memoirs of the American Mathematical Society; 387). "July 1988, Volume 74, Number 387 (first of 2 numbers).". - Bibliography: p. 100-101.

CORWIN, Lawrence J. Representations of nilpotent Lie groups and their applications / Lawrence J.Corwin, Frederick P. Greenleaf. - Cambridge [England]; New York: Cambridge University Press, 1990- . v. 1. - (Cambridge studies in advanced mathematics; 18).

Dieudonné, Jean Alexandre Special functions and linear representations of Lie groups. - Providence, R.I.: Published for Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society, c1980. iii, 59 p.; 26 cm. - (Regional Conference Series in Mathematics / CBMS; 42).

ENRIGHT, Thomas J. Lectures on representations of complex semi-simple lie groups. Notes by Vyjayanthi Sundar. - Berlin, Springer-Verlag, 1981. 91 p.; 25 cm. - (Tata Institute of Fundamental Research. Lectures on mathematics and physics; 66).

Knapp, Anthony W. Lie groups beyond an introduction / Anthony W. Knapp. - Boston: Birkhauser,1996. xv, 604 p.; 24 cm. - (Progress in Mathematics; 140).

Varadarajan, V. S. An introduction to harmonic analysis on semisimple Lie groups. - Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1989. x, 316 p.: ill.; 24 cm. - (Cambridge studies in advanced mathematics; 16).

Vogan, David A. Representations of real reductive Lie groups / David A. Vogan, Jr. - Cambridge, Mass.: Birkhuser Boston, 1981. xvii, 754 p.; 24 cm. - (Progress in Mathematics; 15). Bibliography: p. 742-747.

Vogan, David A. Unitary representations of reductive Lie groups / by David A. Vogan, Jr. - Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1987. x, 308 p.; 25 cm. - (Annals of mathematics studies; 118). Bibliography: p. 302-308.

Warner, Garth Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. - Berlin, New York, Springer-Verlag, 1972. 2 v. 24 cm.