CAPITOLO 1 GEOMETRIA DIFFERENZIALE

§1 Notazioni fondamentali di Geometria Differenziale

NOTA Discutiamo i fondamenti della Geometria differenziale e stabiliamo le notazioni fondamentali.

1.1 Varietà differenziabili

Ricordiamo la nozione di struttura C^∞ o di varietà differenziabile di dimensione n, su uno spazio topologico di Hausdorf a base numerabile M.

Si parte dalla nozione di *Atlante*, questo è una famiglia di carte $f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ (dette coordinate locali) che soddisfano i seguenti assiomi.

i) Gli U_i sono aperti di M che ricoprono M ossia $M = \cup_i U_i$.

ii) Le f_i sono omeomorfismi su aperti $V_i := f_i(U_i)$ di $\mathbb{R}^n$.

iii) I *cambiamenti di coordinate* $f_i \circ f_j^{-1} : f_j(U_j \cap U_i) \to f_i(U_i)$ sono C^∞.

In modo simile si da la nozone di varietà complessa, in cui è dato un atlante $f_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ per cui i *cambiamenti di coordinate* $f_i \circ f_j^{-1} : f_j(U_j \cap U_i) \to f_i(U_i)$ sono olomorfi.

Le funzioni olomorfe sono caratterizzate dal fatto di essere espresse in serie di potenze convergenti di variabile complessa. Questa condizione di esprimibilità in serie convergenti può essere fatta anche solo nel caso reale dando luogo alla nozione di varietà C^ω ovvero *analitiche reali*.

La nozione di varietà algebrica è simile anche se più complicata perché non è più possibile usare un unico modello per le coordinate locali ma servono le varietà affini.

Esempi (tutte varietà analitiche reali) 1) Data una sfera le due proiezioni stereografiche dal polo nord e polo sud formano un atlante.

2) Prendiamo il gruppo $SL(n, \mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ a determinante 1. Scriviamo il determinante espanso per la prima riga:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1,i} \Delta_{1,i} = 1$$

($\Delta_{1,i}$ cofattori).

Gli aperti U_i dove $\Delta_{1,i} \neq 0$ coprono $SL(n, \mathbb{R})$ w, in U_i possiamo calcolare

$$x_{1,i} = \Delta_{1,i}^{-1}(1 - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} x_{1,j}\Delta_{1,j}).$$

Le altre variabili $x_{a,b}$ costituiscono parameri regolari per $SL(n, \mathbb{R}) \cap U_i$.

Nei prossimi esempi prenderemo coordinate complesse, il caso reale è del tutto simile:

3) Lo spazio proiettivo e la varietà Grassmanniana.

Lo spazio proiettivo è $P^n(\mathbb{C})$ l'insieme delle rette per l'origine, di $\mathbb{C}^{n+1}$,ogni retta è generata da un vettore non nullo $v = (x_0, \ldots, x_n)$ per ogni i le rette generate da un vettore con $x_i \neq 0$ sono per definizione un aperto con possibili coordinate quelle dell'unico vettore che la genera con $x_i = 1$, si vede subito che gli assiomi di varietà complessa sono verificati.

4) La Grassmaniana $G_{k,n}$ è formata dai sottospazi V di dimensione k di $\mathbb{C}^n$, ogni tale sottospazio V è determinato da una possibile base di k vettori linearmente indipendenti che possiamo esibire come righe di una matrice $k \times n$ che denotiamo X.

Per ipotesi le righe di X sono linearmente indipendenti e quindi almeno uno dei minori di ordine massimo di X deve avere determinante non zero. Sia $A = X_{i_1,\ldots,i_k}$ un tale minore che possiamo supporre estratto dalle colonne $i_1, \ldots, i_k$, le righe della matrice $Y := A^{-1}X$ sono una nuova base di V ma questa è caratterizzata dalla normalizzazione che il minore $Y_{i_1,\ldots,i_k}$ estratto dalle colonne $i_1, \ldots, i_k$ è l'identità. Le matrici di questo tipo formano uno spazio affine di dimensione $k(n-k)$ le cui coordinate sono tutti gli altri elementi di matrice fuori del minore fissato, queste sono evidentemente carte di un atlante (addirittura algebrico) per la varietà .

Due atlanti sono compatibili ovvero definiscono la medesima struttura differenziabile se la loro unione è ancora un atlante (questa è una restrizione sui cambiamenti di coordinate fra i due atlanti).

Infine una struttura differenziabile si può definire o come classe di equivalenza fra atlanti ovvero come data da un atlante massimale.

Naturalmente si può anche considerare il caso C^k, C^ω in cui i cambiamenti di coordinate si assumono di classe k oppure analitici reali, esiste inoltre anche la teoria complessa in cui le carte sono a valori complessi e i cambiamenti di coordinate olomorfi (ed anche la teoria algebrica).

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita su un aperto A di M si dice C^∞ se
$f \circ f_i^{-1} : f_i(A \cap U_i) \to \mathbb{R}$ è C^∞ per ogni i.

Denoteremo con $C^\infty(A)$ l'insieme (in effetti un'algebra commutativa) di tali funzioni C^∞ su A.

Si ha in effetti in questo modo un *fascio*[1] di algebre, tramite tale fascio si possono considerare poi tutte le possibili carte locali che definiscono la stessa struttura differenziabile.

Dalla nozione di funzione C^∞ si passa immediatamente a quella globale di *morfismo* C^∞ fra varietà ossia una funzione $f : M \to N$ continua e tale che per ogni aperto U di N ed ogni funzione C^∞, g su U si ha che $g \circ f$ è C^∞ su $f^{-1}(U)$. In altre parole un morfismo C^∞ si scrive in coordinate locali tramite funzioni C^∞.

In particolare un *diffeomorfismo* $f : M \to N$ è una funzione invertibile e tale che sia f che f^{-1} siano morfismi. I metodi che svilupperemo tenderanno a costruire la geometria in modo invariante per diffeomorfismi (almeno fino alla introduzione di ulteriori strutture).

ESEMPIO La funzione x^3 da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un omeomorfismo ma non un diffeomorfismo, in quanto la sua inversa, $x^{1/3}$ non è derivabile in 0.

In pratica quasi tutti gli esempi di varietà M che incontreremo sono *immerse* in un qualche aperto U di uno spazio $\mathbb{R}^n$ ovvero ammettono una delle due seguenti descrizioni:

1) **Descrizione parametrica** Un insieme chiuso $M \subset U$ tale che, per ogni punto $p \in U$ esiste un sistema di coordinate curvilinee $(y_1, \dots, y_n)$ in un intorno $V_p \subset U$ di p per cui $M \cap V_p := \{(y_1, \dots, y_k, 0, 0, \dots, 0),\ y_i = 0,\ \forall i > k\}$.

2) **Descrizione implicita** Un insieme chiuso $M \subset U$ tale che, per ogni punto $p \in U$ esiste un intorno $V_p \subset U$ di p ed una funzione $F : V_p \to \mathbb{R}^{n-k}$ con matrice Jacobiana di rango massimo in ogni punto ed un punto $y_0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ per cui $M \cap V_p := F^{-1}(y_0)$.

L'equivalenza fra le due descrizioni segue dal Teorema delle funzioni implicite.

3) **Descrizione mista** Un insieme chiuso $M \subset U$ tale che, per ogni punto $p \in U$ esiste:
a) Un intorno $V_p \subset U$ di p ed una funzione $F : V_p \to \mathbb{R}^{n-k}$ con matrice Jacobiana di rango massimo in ogni punto.
b) Un aperto $A \subset \mathbb{R}^{n-k}$ per cui $F(V_p) \subset A$ ed una varietà $N \subset A$ per cui $M \cap V_p := F^{-1}(N)$.

Esempi

(1) La sfera $\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2,\ r > 0$ (descrizione implicita).
(2) Gli iperboloidi $\sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^n x_i^2 = r,\ r \neq 0$ (descrizione implicita).
(3) Il gruppo ortogonale $\{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid XX^t = 1\}$ (descrizione implicita). Si pensa ad XX^t come funzione dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a quello delle matrici simmetriche. Per vedere la condizione sulla matrice Jacobiana si calcola esplicitamente in serie (che termina al secondo ordine) $(X_0 + Y)(X_0 + Y)^t = X_0X_0^t + X_0Y^t + YX_0 + YY^t$ il termine lineare è $X_0Y^t + YX_0$ che, quando $X_0X_0^t = 1$ si verifica facilmente è una applicazione suriettiva sulle matrici simmetriche.
(4) Una classe coniugata di matrici. Questa va trattata parametricamente ma la lasciamo per ora come esercizio.

[1] non avremo bisogno della nozione di fascio e quindi la omettiamo

Esempi non naturalmente immersi, spazi proiettivi e varietà Grassmanniane.

1.2 Alcune costruzioni Vi sono alcuni modi di costruire varietà differenziabili a partire da varietà date.

La più semplice è di prendere un aperto di una varietà M.

Prese due varietà (o anche una infinità numerabile) M, N di dimensione n la unione disgiunta è una varietà.

ESERCIZIO Ogni varietà differenziabile è unione disgiunta di un numero finito o di una infinità numerabile di varietà connesse.

Date due varietà M, N di dimensioni m, n il prodotto $M \times N$ ha in modo naturale una struttura di varietà di dimensione $m + n$.

Ricordiamo che, dati due spazi topologici X, Y due aperti $U \subset X$, $V \subset Y$ ed un omeomorfismo $f : U \to V$ si può costruire un nuovo spazio $X \sqcup_f Y$ ottenuto dalla unione disgiunta di X, Y identificando i punti $u \equiv f(u)$, $\forall u \in U$ e con la topologia quoziente.

ESERCIZIO Se X, Y sono spazi di Hausdorf $X \sqcup_f Y$ è uno spazio di Hausdorf se e solo se $\Gamma := \{(u, f(u)\}$, $u \in U$ (il *grafico* dell'incollamento) è chiuso in $X \times Y$.

Se, nella costruzione precedente Y, Y sono varietà differenziabili e f un diffeomorfismo $X \sqcup_f Y$ è in modo naturale una varietà.

ESEMPIO Sia $X = Y = \mathbb{R}$, e $U = V = \mathbb{R} - 0$. Prendiamo $f : x := x^{-1}$ l'insieme $\Gamma = \{(x, y) \mid xy = 1\}$ è chiuso, si vede facilmente che $X \sqcup_f Y = S^1$ una circonferenza.

Se invece prendiamo $f := x$ il grafico non è chiuso e $X \sqcup_f Y$ è lo spazio non Hausdorf in cui il punto 0 si è *raddoppiato.*

ESERCIZIO Descrivere la sfera $S^n := \{(x_0, \ldots, x_n) \mid \sum_i x_i^2 = 1\}$ per incollamento.

1.3 Vettori tangenti Il primo punto saliente è la costruzione degli spazi tangenti e cotangenti in un punto.

Sia $A(n, \epsilon)$ l'anello delle funzioni C^∞ nel disco aperto di raggio ϵ centro 0 in $\mathbb{R}^n$.

Sia $m(n, \epsilon)$ l'ideale delle funzioni in $A(n, \epsilon)$ che svaniscono in 0.

Chiameremo la potenza $m(n, \epsilon)^k$ gli infinitesimi di ordine $\geq k$ in 0 (nel disco aperto di raggio ϵ centro 0).

Indichiamo con

$$dx_i := x_i + m(n, \epsilon)^2$$

la classe della coordinata x_i modulo infinitesimi del secondo ordine.

Si parte dal seguente Lemma.

Lemma.

(1) *(Formula di Taylor) Data una funzione $f(x)$ in $A(n,\epsilon)$ essa si scrive come*

$$f(x) = f(0) + \sum_i \Big(\frac{\partial f(0)}{\partial x_i} + \sum g_i(x)\Big) x_i$$

con $g_i(0) = 0$.

(2) *Le classi dx_i, $i = 1, \ldots, n$ sono una base su $\mathbb{R}$ dello spazio vettoriale $m(n,\epsilon)/m(n,\epsilon)^2$ degli infinitesimi del primo ordine a meno di quelli del secondo.*

Dim. 1) Si ha

$$f(x) - f(0) = \int_O^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_O^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$$

e basta porre $h_i(x)) := \int_O^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$ osservare che $h_i(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}$ e quindi porre $g_i = h_i - \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}$.

2) Da 1) segue che, se $f(0) = 0$ si ha che $f(x) \cong \sum_i \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} x_i$, *mod* $m(n,\epsilon)^2$, ma le derivate prime in 0 degli infinitesimi di ordine ≥ 0 sono tutte nulle, quindi le coordinate x_i sono linearmente indipendenti mod $m(n,\epsilon)^2$ altrimenti se $\sum a_i x_i \in m(n,\epsilon)^2$ si ha $a_i = \frac{\partial \sum a_i x_i}{\partial x_i} = 0, \ \forall i$.

Ora la dualità.

Definizione. Un funzionale lineare $D : A(n,\epsilon) \to \mathbb{R}$ (a valori reali) si dice una *derivazione* in 0 se per ogni coppia di funzioni $f(x), g(x) \in A(n,\epsilon)$ si ha:

(1.3.1)
$$D(f(x)g(x)) = D(f(x))g(0) + f(0)D(g(x)).$$

Proposizione. *Un funzionale lineare $D : A(n,\epsilon) \to \mathbb{R}$ è una derivazione in 0 se e solo se:*

$$D(1) = 0, \quad D(m(n,\epsilon)^2) = 0$$

Lo spazio delle derivazioni in 0 è lo spazio duale di $m(n,\epsilon)/m(n,\epsilon)^2$ ed ha come base le derivate parziali $\frac{\partial}{\partial x_i}$ calcolate in 0. Data una derivazione D si ha $D = \sum_i D(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Dim. $D(1) = D(11) = 2D(1)$ quindi $D(1) = 0$ inoltre un infinitesimo del secondo ordine è della forma $\sum x_i g_i(x)$ con $g_i(0) = 0$ e quindi dalla proprietà di D si ha che $D(\sum x_i g_i(x)) = 0$.

Viceversa $f(x)g(x) - f(0)g(x) - f(x)g(0)$ è un infinitesimo del secondo ordine e quindi la formula delle derivazioni segue. 2) Segue da 1) e dal lemma precedente.

I lemmi precedenti sono indipendenti da ϵ per renderli ancora più intrinseci conviene introdurre l'algebra $A(n)$ dei germi[2] delle funzioni C^∞ in 0 i cui elementi sono classi di equivalenza di funzioni C^∞ definite in qualche intorno di 0, dove due funzioni si considerano equivalenti se coincidono in qualche intorno di 0.

Analogamente si definisce $m(n)$ (gli infinitesimi del primo ordine in p).

Esercizio I lemmi precedenti valgono per i germi.

Ora possiamo definire intrinsecamente, per una varietà differenziabile M ed un suo punto $p \in M$.

$$\begin{aligned} C_p^\infty(M) &\quad \text{l'algebra dei germi delle funzioni } C^\infty \text{ in } p \\ m_p^\infty(M) &\quad \text{l'ideale dei germi delle funzioni } C^\infty \text{ che svaniscono in } p \\ T_p^*(M) := m_p^\infty(M)/m_p^\infty(M)^2 &\quad \text{lo spazio cotangente in } p \\ T_p(M) := &\text{ lo spazio tangente in } p\text{, spazio delle derivazioni in } p \end{aligned}$$

per i lemmi precedenti, usando carte locali, $T_p^*(M), T_p(M)$ sono in dualità.

Gli insiemi $T(M) := \cup_p T(M)$, $T^*(M) := \cup_p T^*(M)$ hanno una ulteriore struttura quella di *fibrati vettoriali* C^∞ *su* M. Prima di evidenziarla osserviamo la struttura di $T(\mathbb{R}^n)$.

LEMMA. *$T(\mathbb{R}^n)$ si identifica ad $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ in quanto un elemento qualunque di $T(\mathbb{R}^n)$ è una coppia $\{(x_1, \ldots, x_n), \sum_j y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\}$.*

Similmente $T^*(\mathbb{R}^n)$ si identifica ad $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ in quanto un elemento qualunque di $T^*(\mathbb{R}^n)$ è una coppia $\{(q_1, \ldots, q_n), \sum_j p_j dq_j\}$. (Abbiamo utilizzato i simboli familiari della meccanica Hamiltoniana per ragioni che saranno evidenti in seguito).

DEFINIZIONE. Un fibrato vettoriale $k-$dimensionale C^∞ su una varietà differenziabile M consiste di una varietà differenziabile V con un morfismo C^∞, $p : V \to M$ si suppone inoltre che esista un ricoprimento di carte $f_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n$ e di carte (omeomorfismi) $g_i : p^{-1}(U_i) \to V_i \times \mathbb{R}^k$ compatibili con le carte date ossia per cui

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[r, "g_i"'] \arrow[d, "p"] & V_i \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "p_1"] \\ U_i \arrow[r, "f_i"'] & V_i \end{tikzcd}$$

per cui i cambiamenti di coordinate $g_i \circ g_j^{-1} : V_{ij} \times \mathbb{R}^k \to V_{ij} \times \mathbb{R}^k$ sono lineari nella seconda variabile, ossia per ogni $x \in V_{ij}$ la funzione $g_i \circ g_j^{-1}(x, y) : x \times \mathbb{R}^k \to x \times \mathbb{R}^k$ è lineare.

[2]La nozione di germe vale in effetti per qualunque fascio

Una sezione (su un aperto U di M) del fibrato V è una funzione $s : U \to V$ tale che $p \circ s = 1_U$.

Si noti che si può definire un fascio delle sezioni C^∞ di un fibrato vettoriale che è un fascio di moduli sulle funzioni C^∞.

Le ipotesi fatte su un fibrato vettoriale implicano che ogni fibra V_p di V ha una struttura intrinseca di spazio vettoriale.

Abbiamo una ovvia nozione di isomorfismo fra fibrati vettoriali su M e di *fibrato banale* $M \times \mathbb{R}^k$.

Per costruzione un fibrato V è *localmente banale* ossia ogni punto $p \in M$ ha un intorno u per cui il *fibrato ristretto ad* U ossia $p^{-1}(U)$ è isomorfo al fibrato banale $U \times \mathbb{R}^k$.

Notazione fondamentale, data una funzione C^∞ su un aperto U di M ed un punto p si pone df_p la classe di $f - f(p)$ in $T_p^*(M)$.

La funzione $p \to df_p : M \to T^*(M)$ è una sezione e viene indicata con df.

Vi è un secondo modo di pensare a df ovvero come funzione

$$df : T(M) \to \mathbb{R}$$

Dato un vettore $D_p \in T_p(M)$ si ha

$$df(D_p) := D_p(f).$$

In coordinate si ha, per una funzione $f(x)$, che $df(x)(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. Pertanto si ottiene che gli elementi dx_i sono una base duale della base $\frac{\partial}{\partial x_i}$ inoltre:

$$(1.3.2) \qquad df(x)(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad \implies df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i.$$

Definizione. Una sezione C^∞, definita in un aperto $U \subset M$, del fibrato cotangente $T^*(M)$ è detta 1-forma differenziale. Lo spazio di tali sezioni è denotato con $\mathcal{E}^1(U)$.

Una sezione C^∞ in un aperto U del fibrato tangente $T(M)$ è detta campo vettoriale. Lo spazio di tali sezioni è denotato con $\mathcal{L}(U)$.

Se in U vi è un sistema di coordinate locali x_i ogni forma differenziale su U è della forma $\psi = \sum_i f_i(x) dx_i$ ed ogni campo vettoriale su U è della forma $\sum_i f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ con le f_i funzioni C^∞. Naturalmente se scegliamo altre coordinate abbiamo una diversa espressione

$$\psi = \sum_i f_i(x_i(y)) dx_i = \sum_i f_i(x_i(y)) \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j = \sum_j (\sum_i f_i(x_i(y)) \frac{\partial x_i}{\partial y_j}) dy_j$$

similmente
$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}$$

Calcolando per ogni punto un campo vettoriale X contro una funzione f si ha una nuova funzione $X(f)$ ed evidentemente $X(fg) = X(f)g + f(X(g)$ si provi:

Esercizio Ogni operatore lineare da $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ per cui $X(fg) = X(f)g + f(X(g)$ per ogni coppia di funzioni C^∞ è un campo vettoriale.

Precisamente in coordinate $x_1, \ldots, x_n$ si ha:

(1.3.3) $$X = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

sugg. prima di tutto ci si deve ridurre al caso in cui M è un aperto con coordinate dimostrando che un tale operatore è *locale* ovvero il valore di $X(f)$ in un punto p dipende solo dal germe di f in p, poi bisogna utilizzare la formula di Taylor e provare che il valore di $X(f)$ in un punto p dipende solo dal valore delle derivate prime in p.

Poichè campi vettoriali e 1-forme prendono valori in spazi duali, si può calcolare l'accoppiamento di dualità. Se $X \in \mathcal{L}(U)$, $\psi \in \mathcal{E}^1(U)$ scriviamo con $\langle\psi|X\rangle$ la funzione ottenuta puntualmente valutando in p la forma ψ_p contro il vettore X_p. Se $\psi = \sum_i f_i(x)dx_i$, $X = \sum_i g_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ si ha
$$\langle\psi|X\rangle = \sum_i f_i(x)g_i(x).$$

Si noti la formula
$$\langle df|X\rangle = X(f),\ f \in C^\infty(U).$$

1.4 Il differenziale di un morfismo

Sia $f : M \to N$ un morfismo[3]. Vogliamo definire una trasformazione lineare $df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ con la formula

(1.4.1) $$g \in C^\infty(N),\ D_p \in T_p(M),\ df_p(D_p)(g) := D_p(g \circ f)$$

Globalmente abbiamo un *morfismo di fibrati vettoriali* (ovvero che manda fibre in fibre linearmente).

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \xrightarrow{df} & T(N) \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

[3] tutti i morfismi per ipotesi sono C^∞

In coordinate supponiamo che N abbia coordinate $y_i, \; = 1, \ldots, m$ ed M abbia coordinate $x_i, \; = 1, \ldots, n$ ed F sia dato esplicitamente da $y_i := y_i(x_1, \ldots, x_n)$ allora

$$df_p(\frac{\partial}{\partial x_i})(y_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j(x_1, \ldots, x_n)), \quad \text{ovvero} \quad df_p(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_j \frac{\partial y_j(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Usiamo per $T_p(M)$ la base $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ e per $T_{f(p)}(M)$ la base $\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_m}$ la matrice $m \times n$ di df_p è la matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Per dualità possiamo definire

$$df_p^* : T_{f(p)}^*(N) \to T_p^*(M)$$

in coordinate $df_p^*(dy_j) = dy_j(x_1, \ldots, x_n) = \sum \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i$.

Ovvero pensando alle forme differenziali come funzioni sul fibrato tangente, $\psi \in E^1(N)$, $\psi : T(N) \to \mathbb{R}$, otteniamo una applicazione

$$f^* : \mathcal{E}^1(N) \to \mathcal{E}^1(M), \; T(M) \xrightarrow{df} T(N) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}, \; f^*(\psi) := \psi \circ df$$

Abbiamo la funtorialità dati morfismi $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ si ha

$$d(g \circ f) = dg \circ df, \; (g \circ f)^* = g^* \circ f^*.$$

Due casi particolari della nozione di differenziale di un morfismo.

Prendiamo una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ pensata come morfismo. A priori abbiamo una certa confusione perché abbiamo definito df come 1-forma e df come il suo differenziale come morfismo. Verificare che $df : T(M) \to T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ è proprio $x \to (f(p(x)), df(x))$ ($p : T(M) \to M$ la proiezione canonica).

Prendiamo ora una *curva parametrica* ossia un morfismo $\psi(t) : \mathbb{R} \to M$ (abbiamo indicato con t (*il tempo!*) la coordinata in $\mathbb{R}$).

Il vettore

$$\dot{\psi} := d\psi(\frac{d}{dt})$$

si dice velocità della curva. In coordinate se $x_i = x_i(t)$ è la curva parametrica la velocità è $\sum \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (come usuale $\dot{f}$ indica la derivata *temporale* ossia rispetto al parametro t).

In un linguaggio ancora meno intrinseco la velocità è semplicemente il vettore di coordinate $\dot{x}_i$.

A questo punto è utile una osservazione. Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione e $\psi(t) : \mathbb{R} \to M$ una curva. La composizione $F(t) := f(\psi(t))$ rappresenta l'evoluzione del valore di f al variare del tempo. La derivata $\dot{F}(t)$ coincide con $\dot{\psi} f$ nel punto $\psi(t)$. Prendiamo per semplicità la derivata in 0. Se per ipotesi $\dot{\psi}(0) = 0$ evidentemente la derivata in 0 di $f(\psi(t))$ è 0 per ogni f calcoliamone dunque la derivata seconda che è chiaramente un funzionale lineare

$$\ddot{\psi} : f \to \frac{d^2 f(\psi(t))}{dt^2}_{t=0}$$

dalle regole delle derivate si verifica facilmente che $\ddot{\psi}$ è una derivazione ovvero un vettore tangente in $f(0)$:

$$\ddot{\psi}(fg) = \frac{d^2 f(\psi(t))}{dt^2} g(\psi(t))_{t=0} + 2 \frac{df(\psi(t))}{dt} \frac{dg(\psi(t))}{dt}_{t=0} + f(\psi(t)) \frac{d^2 g(\psi(t))}{dt^2}_{t=0} =$$
$$\frac{d^2 f(\psi(t)) g(\psi(t))}{dt^2}_{t=0} + \frac{d^2 f(\psi(t)) g(\psi(t))}{dt^2}_{t=0}$$

L'analisi si può continuare, se le prime $k-$derivate svaniscono la derivata $k+1$-esima è un vettore tangente.

§2 Gruppi ad un parametro

NOTA Discutiamo il legame fra campi vettoriali e gruppi ad un parametro.

2.1 Algebre di Lie Abbiamo visto che un campo vettoriale X è un particolare operatore differenziale sulle funzioni, è un operatore del primo ordine, caratterizzato dalla proprietà di essere una derivazione.

Se componiamo due operatori del primo ordine X, Y abbiamo i due operatori del secondo ordine $XY,\ YX$, il fatto fondamentale è che:

PROPOSIZIONE. *L'operatore $XY - YX$ è un operatore del primo ordine, in coordinate se $X = \sum_i f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_i g_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ si ha che $XY - YX$ coincide con il campo vettoriale*

(2.1.1) $$[\sum_i f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j g_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}] = \sum_i (\sum_j f_j(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Questa formula si può calcolare direttamente senza difficoltà ma di fatto, la proprietà è formale.

DEFINIZIONE. *Data un algebra S qualsiasi (ossia con una arbitraria operazione bilineare denotata ab) una derivazione D è un operatore $D : S \to S$ tale che*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

PROPOSIZIONE. *i) Se D_1, D_2 sono due derivazioni di un'algebra S si ha che: $[D_1, D_2] := D_1D_2 - D_2D_1$ è una derivazione.*

ii) Se $\phi : S \to T$ è un isomorfismo fra due algebre S, T, e $A : S \to S$ una trasformazione lineare posto:

$$\phi_*(A) : \phi \circ A \circ \phi^{-1} : T \to T$$

si ha che, se A è una derivazione di S anche $\phi_*(A)$ è una derivazione di T.

DIM.

$$(D_1D_2 - D_2D_1)(ab) = D_1(D_2(a)b + aD_2(b)) - D_2(D_1(a)b + aD_1(b)) =$$

$$D_1D_2(a)b + D_2(a)D_1(b) + D_1(a)D_2(b) + aD_1D_2(b) -$$

$$(D_2D_1(a)b + D_1(a)D_2(b) + D_2(a)D_1(b) + aD_2D_1(b)) =$$

$$[D_1, D_2](a)b + a[D_1, D_2](b).$$

ii) $\phi_*(A)(ab) = \phi(A(\phi^{-1}(ab)) = \phi(A(\phi^{-1}(a)\phi^{-1}(b)) =$
$= \phi(A(\phi^{-1}(a))\phi^{-1}(b) + \phi^{-1}(a)A(\phi^{-1}(b)) = \phi(A(\phi^{-1}(a)))b + a\phi A(\phi^{-1}(b)) = \phi_*(A)(a)b + a\phi_*(A)(b)$ □

In una algebra associativa come nel nostro caso l'algebra degli operatori lineari (in particolare differenziali) sulle funzioni, si definisce il *commutatore* $[a, b]$ di due elementi con la formula $[a, b] := ab - ba$.

Questa composizione bilineare si chiama il *prodotto di Lie.*

Si verifica immediatamente che tale prodotto soddisfa le due proprietà seguenti;

$$[a, b] = -[b, a], \text{ antisimmetria} \quad [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad \text{identità di Jacobi}$$

Diamo ora una definizione fondamentale che astrae le precedenti:

DEFINIZIONE. Un algebra di Lie è uno spazio vettoriale L con una operazione bilineare denotata $[a, b]$ che soddisfi le due proprietà:

$$[a, b] = -[b, a], \text{ antisimmetria} \quad [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad \text{identità di Jacobi}$$

Come con tutte le strutture algebriche le nozioni di *sottoalgebra di Lie, omomorfismo di algebre di Lie* sono le usuali.

È molto utile rivedere l'identità di Jacobi in altre forme:

i) Data un'algebra A con un prodotto $[a,b]$ antisimmetrico, l'identità di Jacobi è equivalente alla proprietà che le trasformazioni $ad(a) : b \to [a,b]$ sono *derivazioni* dell'algebra.

ii) L'identità di Jacobi implica che l'applicazione $a \to ad(a)$ è un *omomorfismo* di algebre di Lie.

I fatti formali fondamentali sono dunque:

(1) Se R è un algebra associativa il prodotto di Lie $[a,b] := ab - ba$ da una struttura di algebra di Lie.

(2) Data un algebra S qualsiasi le derivazioni di S sono una sottoalgebra di Lie dell'algebra degli operatori lineari su S.

(3) Per una composizione antisimmetrica l'identità di Jacobi è equivalente a dire che l'operatore $x \to [a,x] := ad(a)(x)$ è una derivazione.
Una tale derivazione si dice *derivazione interna*.

(4) In un algebra di Lie, si ha $ad([a,b]) = [ad(a), ad(b)]$ dove il commutatore a sinistra è quello dell'algebra di Lie mentre quello a destra è quello dedotto dall'algebra associativa degli operatori lineari.

(5) Un campo vettoriale su una varietà M è semplicemente una derivazione dell'algebra delle funzioni C^∞, il commutatore di due campi vettoriali è un campo vettoriale (in coordinate)

$$[\sum_i f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j g_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}] = \sum_i(\sum_j f_j(x)\frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j(x)\frac{\partial f_i}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Si ha $[X, fY] = f[X,Y] + X(f)Y$, con X, Y campi vettoriali e f funzione.

(6) Se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo esso induce un isomorfismo f^* fra l'algebra delle funzioni C^∞ su M e l'algebra delle funzioni C^∞ su N con $f^*(g)(x) := g(f^{-1}x)$. Dunque induce un isomorfismo fra derivazioni (come nella proposizione precedente) ossia fra le algebra di Lie $f_* : L(M) \to L(N)$ dei campi vettoriali di N e di M (sostituzione di variabili) data globalizzando la definizione 1.3.1da

$$f^* \circ X \circ (f^*)^{-1}, \quad f_*(X)(g) := X(g \circ f) \circ f^{-1}, \quad \text{ossia } df(X_p) = f_*(X)_{f(p)}. \tag{2.1.2}$$

2.2 Sottovarietà.

DEFINIZIONE. *Data una varietà M di dimensione n ed un sottoinsieme $N \subset M$ diremo che N è una sottovarietà di codimensione k in M se:*

1) N è chiuso.

2) Per ogni $n \in N$ esiste un intorno U_n con coordinate $(x_1, \dots, x_n)$, $|x_i| < 1$ tale che $U_n \cap N = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0\}$.

Osservazione: Data una varietà M di dimensione n, una sottovarietà $N \subset M$ di codimensione k in M ed un aperto U di M allora $N \cap U$ è una sottovarietà di codimensione k in U.

Data una varietà M di dimensione n ed un sottoinsieme $N \subset M$ ed un ricoprimento aperto U_α di M, N è una sottovarietà di codimensione k in M se e solo se per ogni α, $U_\alpha \cap N$ è una sottovarietà di codimensione k in U_α.

La definizione data va paragonata con una simile:

DEFINIZIONE. *Date due varietà M, N di dimensione n, m ed una applicazione C^∞. $f : N \to M$ diremo che f è una* **immersione** *se:*
1) f è iniettiva.
2) per ogni punto $p \in N$ l'applicazione $df_p : T_p(N) \to T_p(M)$ è iniettiva.

Esempio Esercizio 1) Sia $\dim N = n = m = \dim M$ e $i : N \to M$ una immersione iniettiva, allora $i(N)$ è aperto in M e $i : N \to i(N)$ è un diffeomorfismo.

2) Sia data $f : N \to M$, se per ogni $n \in N$ si ha che df_n è iniettiva e f è suriettiva, allora $\dim M = \dim N$.

3) Sia $i : N \to M$ una immersione biunivoca allora $\dim N = \dim M$ e i è un diffeomorfismo.

DIM. Dal teorema delle funzioni implicite e dalla definizione è facile vedere che 2) implica 3). Proviamo 2) per la iniettività di df_n $\dim N \leq \dim M$, se per assurdo $\dim N < \dim M$ abbiamo che possiamo ricoprire N con una infinità numerabile di carte che dalla descrizione locale hanno immagine insiemi di misura nulla in qualunque aperto coordinato di M (per la misura di Lebesgue usuale in quelle coordinate) quindi tali insiemi non possono ricoprire M. $\square$

Il legame fra le due nozioni è il seguente:

PROPOSIZIONE. *1) Data una varietà M di dimensione n ed una sottovarietà N di codimensione k allora N ammette una unica struttura di varietà di dimensione $n-k$ tale che la inclusione $i : N \to M$ sia una immersione.*

2) Data una immersione $i : N \to M$ si ha che $i(N)$ è una sottovarietà di M, se e solo se $i(N)$ è chiuso in M e $i : N \to i(N)$ è un omeomorfismo dove $i(N)$ ha la topologia indotta.

DIM. Prima di tutto consideriamo il caso locale

$$M := \{(x_1, \dots, x_n),\ |x_i| < 1\}, \quad N = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0, \quad |x_i| < 1\}$$

evidentemente N si identifica a $\{(x_{k+1}, \dots, x_n), \quad |x_i| < 1\}$ che è una varietà differenziabile e la inclusione è una immersione. D'altra parte questa è l'unica maniera in cui N può acquisire una struttura differenziabile che renda l'inclusione C^∞, infatti se i è una immersione si ha che le funzioni x_i sono un omeomorfsmo j, C^∞ fra N e $\mathbb{R}^{n-k}$, resta da provare che j è un diffeomorfismo, questo segue dal fatto che essendo i una immersione si deve avere che i differenziali dx_i, $i = k+1, \dots, n$ sono una base dei differenziali su N e quindi j ha Jacobiano invertibile ed è un diffeomorfismo. Dal caso locale segue facilmente quello globale usando come carte quelle appena descritte localmente.

2) Per definizione una sottovarietà è chiusa quindi la prima condizione condizione è necessaria, inoltre se $i(M)$ è una sottovarietà è chiaro che la applicazione $i : N \to i(N)$

è una immersione biunivoca, dal teorema delle funzioni implicite possiamo provare che è necessariamente un diffeomorfismo dall esempio precedente.

Supponiamo viceversa che $i(N)$ sia chiusa e i sia un omeomorfismo. Dal teorema delle funzioni implicite, preso un punto $p \in N$ esiste un intorno U_p di p in N ed un intorno $V_{i(p)}$ in M con coordinate tali che

$$V_{i(p)} := \{(x_1, \dots, x_n),\ |x_i| < 1\}, \quad U_p = \{(x_{k+1}, \dots, x_n), \quad |x_i| < 1\}$$

con la immersione canonica. Per ipotesi esiste un aperto A di M tale che $A \cap i(N) = i(U_p)$, in particolare $i(N - U_p)$ è un inisieme chiuso che non contiene p, pertanto esiste un intorno $W \subset V_{i(p)}$ che ad esempio si può prendere come $W := \{(x_1, \dots, x_n),\ |x_i| < \epsilon\}$ per cui $W \cap i(N) \subset U_p$ ovvero $W \cap i(N) = \{(0, 0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n), \quad |x_i| < \epsilon\}$. Questa è la descrizione di sottovarietà.

□

Esempio esercizio:

Sia $A := diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$ una matrice diagonale reale (con 0 fuori della diagonale. Consideriamo la applicazione $t \to e^{itA} = (e^{ita_1}, \dots, e^{ita_n})$ a valori matrici diagonali unitarie. Se $A \neq 0$ si ha una immersione di $\mathbb{R}$ in $T^n := S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$, un principio ben noto di Kronecker prova che se i numeri a_i sono linearmente indipendenti sui razionali la immagine di questa curva è densa in T^n.[4]

2.3 Gruppi ad un parametro La idea fondamentale da cui far germinare la teoria dei gruppi di Lie è quella di gruppo ad un parametro di diffeomorfismi su una varietà, questa idea corrisponde alla descrizione di una evoluzione che ad esempio in modo fisico può essere quella di un fluido con velocità costante nel tempo.

In altre parole data una funzione g su M si ha la funzione $X(g)$ data da:

$$X(g)(p) := \frac{dg(f(s,p))}{ds}_{s=0}$$

Viceversa dato un campo vettoriale X su M si può costruire un gruppo ad un parametro che lo ammetta come generatore infinitesimale almeno *localmente*, infatti si vede che tale gruppo si ottiene integrando un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

La velocità di una particella è dunque un campo di vettori X sulla varietà, la evoluzione si pensa come una funzione $F : \mathbb{R} \times M \to M$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ la funzione $\phi_t(m) := F(t, m)$ da M in M descrive dove si trova il punto m al tempo t di evoluzione, le proprietà da imporre sono le seguenti.

1) $\phi_0(m) = m$ per ogni m, (ovvero al tempo 0 il punto m non si è mosso).

2) $\phi_t(\phi_s(m)) = \phi_{t+s}(m)$, esprime il fatto che la velocità del moto in un punto non dipende dal tempo. 1) e 2) si esprimono anche tramite le eguaglianze:

$$\phi_0 = 1_M, \qquad \phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$$

[4] questo è l'esempio fondamentale della teoria ergodica.

Se assumiamo come abbiamo fatto che il tempo t possa anche essere negativo abbiamo una condizione di *reversibilità* che implica che ϕ_t è invertibile con inversa ϕ_{-t}.[5] In definitiva:

La mappa $t \to \phi_t$ è un omomorfismo da $\mathbb{R}$ al gruppo dei diffeomorfismi di M,[6] un tale omomorfismo è un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi.

Un gruppo ad un parametro su una varietà differenziabile M è quindi una azione (C^∞) di $\mathbb{R}$ su M.

Data una azione f di $\mathbb{R}$ su M ed un punto $p \in M$ si determina *la curva di evoluzione di* p ovvero la curva $s \to f(s, p)$.

Il metodo infinitesimale inizia osservando che, ad un gruppo ad un parametro su una varietà M, è associato in modo canonico un campo vettoriale X su M. Il campo X in un punto p per definizione è la velocità al tempo 0 della curva di evoluzione $\psi_p(t) := \phi_t(p) = F(t, p)$ di p, in termini precisi:

$$X_{p_1,\dots,p_n} := d\psi_p(0)(\frac{d}{dt}), \quad X_p = (\frac{\partial F_1(t,p)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial F_n(t,p)}{\partial t})_{t=0}.$$

X è detto *generatore infinitesimale* del gruppo ad un parametro, è un campo di vettori tangenti a tutte le curve di evoluzione.

Come è chiaro dalla nostra discussione vogliamo capire che tale gruppo è determinato dal campo di vettori velocità dato su M.

Pensiamo ora a t come la unica variabile e p come parametri e quindi scriviamo la derivata in t come $\frac{d}{dt}$ una derivata ordinaria e non parziale. Supponiamo dato il campo X da vettori che in coordinate scriviamo come $X_1(p), \dots, X_n(p)$, quindi le funzioni $F_i(t, p)$ che descrivono la evoluzione soddisfano al sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{d\,F_i(t,p)}{dt} = X_i(F_1(t,p), \dots, F_n(t,p)), \quad F_i(0, p_1, \dots, p_n) = p_i$$

Il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni per sistemi di equazioni differenziali dipendenti da parametri implica prima di tutto che, fissato p_0 un punto esiste un $\epsilon > 0$ ed un intorno U di p_0 per cui le funzioni soluzione di tale sistema esistono (e sono uniche).

Poniamo dunque:

$$\phi_t(p) := (F_1(t,p), \dots, F_n(t,p)).$$

Ora vogliamo verificare le proprietà dei gruppi ad un parametro con il limite posto dal fatto che in generale non possiamo aspettarci che il sistema sia risolubile in grande, otterremo dunque una verifica solo *locale* delle due proprietá 1), 2) e non otterremo un vero gruppo ad un parametro ma solo un *germe* di gruppo ad un parametro.

[5] In effetti nella teoria generale e in particolare nelle equazioni differenziali a derivate parziali o in calcolo delle probabilità questa ipotesi di reversibilità non si applica e si studiano i *semigruppi*, questa peraltro è una teoria abbastanza differente da quella che stiamo prendendo in esame.

[6] (che è sempre un gruppo di *dimensione infinita* se la dimensione di M è almeno 1)

In termini precisi per ogni punto $p \in M$ esiste un $\epsilon > 0$ un intorno U di p ed una funzione $f : [-\epsilon, \epsilon] \times U \to M$ con le leggi di gruppo quando definite e con velocità il campo X. Ossia esiste un *germe di gruppo ad un parametro* in un intorno di un qualunque punto p.

La proprietà 1) è semplicemente la condizione iniziale ed è quindi verificata concentriamoci sulla 2), per s, t abbastanza piccoli e p in un intorno piccolo di p_0 le funzioni $F_i(t+s,p)$ sono definite e soddisfano alla equazione differenziale

$$\frac{d\,F_i(t+s,p)}{dt} = X_i(F_1(t+s,p), \ldots, F_n(t+s,p))$$

inoltre per $t = 0$ si ha

$$(F_1(0+s,p), \ldots, F_n(0+s,p)) = \phi_s(p).$$

Ne segue che $\phi_t \circ \phi_s(p)$ e $\phi_{t+s}(p)$ soddisfano entrambe la stessa equazione differenziale con le stesse condizioni iniziali e sono dunque identiche (per valori piccoli per cui sono entrambe definite).

OSSERVAZIONE Dato un punto p, la curva di evoluzione $\psi_p(t) := \phi_t(p)$ è costante (di valore p) se e solo se $X_p = 0$.

Dim. Infatti la curva è costante se e solo se la sua velocità (derivata) è 0. Pertanto se $\psi_p(t)$ è costante $X_p = \frac{d}{dt}\psi_p(t) = 0$. Ma se $X_p = 0$ la curva costante soddisfa l'equazione differenziale, l'unicità della soluzione del sistema di equazioni differenziali mostra quindi che $\psi_p(t)$ è costante. $\square$

OSSERVAZIONE Le curve di evoluzione sono definite globalmente, ovvero lo spazio M si decompone nella unione disgiunta delle curve di evoluzione, su ciascuna curva abbiamo una evoluzione che però in generale partendo da un punto può andare rapidamente all'infinito in un tempo finito.

ESERCIZIO Si prenda un campo vettoriale X ed una funzione f e si consideri fX. Si provi che, se f non è mai nulla X ed fX hanno le medesime curve di evoluzione, altrimenti si provi che ogni curva di evoluzione di X si decompone in punti fissi e curve di evoluzione per fX. In particolare se $f = c$ è una costante non nulla detto ϕ_t il gruppo generato da X la evoluzione ψ_t per cX coincide con ϕ_{ct} ovvero viene solo riscalata la velocità di percorrenza.

Esempi In $\mathbb{R}^k$.

Il campo vettoriale costante $\sum a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ genera il gruppo delle traslazioni

$$v \to v + s(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Data una matrice $A := (a_{ij})$ $(k \times k)$ si ha il gruppo ad un parametro $v \to e^{sA}v$. Derivando si vede che il suo generatore c̀ampo vettoriale lineare Av (di matrice A) che scritto in coordinate $v = (x_1, \dots, x_k)$ è

$$\sum_{ij} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

In particolare dalla formula $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ e dalla rappresentazione matriciale dei complessi si deduce che

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = exp(t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

il campo vettoriale generatore delle rotazioni è dunque $-x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$ (si osservi che è tangente a tutte le circonferenze di centro 0).

ESERCIZIO Da questa analisi si possono facilmente scrivere anche i generatori dei vari gruppi di rotazioni in $\mathbb{R}^3$.

Osservazione Dato un gruppo ad un parametro $\phi(s)$ con generatore X ed un numero r si ha che $\phi(sr)$ è un gruppo ad un parametro con generatore rX.

È opportuno vedere subito esempi in cui il gruppo ad un parametro non esiste per ogni valore di t, cominciamo con un esempio *stupido*.

Partiamo dal gruppo ad un parametro su $\mathbb{R}$ dato dalla traslazione $\phi_t(x) := x + t$. Il suo campo vettoriale associato è $\frac{d}{dx}$, se prendiamo come $M := (-\pi/2, \pi/2)$ un intervallo (che per comodità abbiamo preso di lunghezza π) è evidente che il gruppo ad un parametro non è definito globalmente su M in quanto ogni punto *esce* dall'intervallo in tempo finito. Questo esempio può sembrare artificioso ma in effetti non lo è, in quanto un intervallo è diffeomorfo ad $\mathbb{R}$ e quindi con un tale diffeomorfismo possiamo facilmente descrivere un campo vettoriale su tutta la retta $\mathbb{R}$ che non si può integrare ad un gruppo ad un parametro globale. Per esempio prendiamo come diffeomorfismo la funzione $y := \tan x$, nella coordinata y il campo vettoriale ora è (ricordiamo che $y = -i\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}$)

$$\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy} = \frac{1}{\cos^2 x}\frac{d}{dy} = (y^2+1)\frac{d}{dy}$$

per esplicitare l'evoluzione in modo elementare basta calcolare

$$\tan(x+t) = -i\frac{e^{2ix}e^{2it}-1}{e^{2ix}e^{2it}+1} = -i\frac{(\frac{1+iy}{1-iy})e^{2it}-1}{(\frac{1+iy}{1-iy})e^{2it}+1} = -i\frac{(1+iy)e^{2it}-(1-iy)}{(1+iy)e^{2it}+(1-iy)}$$

È importante avere qualche criterio per essere certi che ϕ_t sia definito globalmente come gruppo ad un parametro di diffeomorfismi, per questo si osservi:

LEMMA. *Supponiamo che il germe di gruppo ad un parametro $\phi_t(p)$ sia definito per $|t| < \epsilon$ e per ogni $p \in M$, allora il gruppo ad un parametro ϕ_t è definito per ogni t.*

DIM. Per t, s abbastanza piccoli (in modulo $< \epsilon/2$) si ha che ϕ_t, ϕ_s e ϕ_{t+s} sono definiti e si ha anche:

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t = \phi_{t+s}$$

Preso un qualunque tempo t che possiamo supporre positivo, sia N un numero intero naturale abbastanza grande per avere $t/N < \epsilon/2$ quindi $\phi_{t/N}$ è definito globalmente in M. Vogliamo ora porre:

$$\phi_t := (\phi_{t/N})^N$$

dobbiamo provare che la definizione data non dipende dall'N scelto e che verifica tutti gli assiomi di un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi.

$$(\phi_{t/N})^N = (\phi^{N'}_{t/NN'})^N = (\phi^{N}_{t/NN'})^{N'} = (\phi_{t/N'})^{N'},$$

$$\phi_{t+s} = (\phi_{t+s/N})^N = (\phi_{t/N} \circ \phi_{s/N})^N = (\phi_{t/N})^N \circ (\phi_{s/N})^N = \phi_t \circ \phi_s$$

□

Abbiamo un semplice criterio generale che ci assicura che le ipotesi del lemma precedente siano verificate ovvero il germe di gruppo ad un parametro $\phi_t(p)$ generato da un campo vettoriale X sia definito per $|t| < \epsilon$ e per ogni $p \in M$.

PROPOSIZIONE. *Se X è un campo vettoriale a supporto compatto, il germe di gruppo ad un parametro $\phi_t(p)$ è definito per $|t| < \epsilon$ e per ogni $p \in M$ e quindi genera un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi.*

DIM. Sia K un compatto di M contenente il supporto di X, quindi $X_p = 0$ se $p \notin K$. Per ogni $q \in K$ esiste un $\epsilon_q > 0$ ed un intorno U_q di q per cui possiamo costruire il germe ψ_t del gruppo ad un parametro. Per compattezza preso un ricoprimento finito di $U_q$ed il minimo ϵ_q troviamo un $\epsilon > 0$ ed un intorno V di K su cui il germe è definito. Però dalla Osservazione segue che $\psi_t(p) = p$ per ogni $p \in V - K$, d'altra parte il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi uguali alla identità su $M - K$ ha per definizione velocità 0. pertanto possiamo definire i ψ_t come l'identità su $M - K$ ed abbiamo un germe definito su tutta M e per $|t| < \epsilon$. La proposizione precedente permette di estenderlo a tutti i tempi.

□

Un caso particolarmente importante si ha quando M è essa stessa compatta, in questo caso non vi è alcuna restrizione su X ed ogni campo vettoriale genera un gruppo ad un parametro.

In generale quello che possiamo fare è di approssimare localmente un germe di gruppo ad un parametro con un gruppo globale. Infatti preso comunque un campo vettoriale X ed un aperto U a chiusura compatta si può costruire una funzione f a supporto compatto con $f(p) = 1,\ p \in U$. Il campo vettoriale fX ha supporto compatto e genera una evoluzione con la proprietà che le curve di evoluzione nell'aperto U coincidono con la evoluzione localmente definita da X, ma ovviamente appena escono da X cambiano fino ad essere costanti fuori del supporto di fX. Naturalmente prendendo aperti sempre più grandi possiamo approssimare sempre più in grande il germe con un vero gruppo ad un parametro. Questa approssimazione ci permette a volte di restringere le verifiche di alcune identità a gruppi globalmente definiti.

2.4 Relazioni fra gruppi ad 1-parametro e diffeomorfismi

Dato un diffeomorfismo $f : M \to N$ esso stabilisce un isomorfismo f_* fra campi vettoriali su M e campi vettoriali su N, dato da (formula 1.4.1):

$$f_*(X)_q := df(X_{f^{-1}q}).$$

Se g è una funzione su N abbiamo dunque:

$$f_*(X)(g)(q) = X(g \circ f)(f^{-1}q), \quad f_*([X, Y]) = [f_*(X), f_*(Y)] \tag{2.4.1}$$

In particolare:

PROPOSIZIONE. *Il gruppo dei diffeomorfismi di M opera sui campi vettoriali come gruppo di automorfismi della struttura di algebra di Lie.*

Per capire bene il legame fra gruppi ad un parametro (o germi di tali gruppi) e campi vettoriali serve capire la Formula di Taylor. Dato un germe di gruppo ad un parametro $\phi(t)$ associato ad un campo vettoriale X ed una funzione F che sia C^∞ su M consideriamo la funzione $F(\phi(t)x)$, per $|t| < \epsilon$, $x \in U$ (un aperto per cui il germe sia definito) e calcoliamone la serie di Taylor in t. Poiché $\frac{d}{dt}_{t=0} F(\phi(t)x) = XF$ iterando si ha per ogni m che

$$F(\phi(t)x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{t^i}{i!} X^i F + t^{m+1} R(t, x)$$

con $R(t, x)$ una funzione C^∞ su $(-\epsilon, \epsilon) \times U$.

Vogliamo ora studiare la evoluzione, rispetto ai gruppi ad un parametro, dei campi vettoriali, riassumiamo quanto fatto:

TEOREMA. *1) Il gruppo dei diffeomorfismi $Diff(M)$ opera linearmente sullo spazio delle funzioni sullo spazio dei campi vettoriali con:*

$$\Phi \in Diff(M), \quad T_\Phi(f) := f \circ \Phi^{-1}, \quad T_\Phi \circ A \circ T_\Phi^{-1} \tag{2.4.2}$$

Puntualmente detto $B := T_\Phi \circ A \circ T_\Phi^{-1}$ si ha:

$$B_x = d\Phi_{\Phi^{-1}x}(A_{\Phi^{-1}x}), \quad (d\Phi_{\Phi^{-1}x} : T_{\Phi^{-1}x}(M) \to T_x(M)). \tag{2.4.3}$$

L'azione sullo spazio delle funzioni preserva il prodotto e quella sui campi preserva la parentesi di Lie.

2) Dato un campo vettoriale A ed un gruppo ad un parametro ϕ_s generato da X si consideri $A(s) := T_{\phi(s)} \circ A \circ T_{\phi(s)}^{-1}$ si ha allora:[7]

$$\frac{d\,A(s)}{ds} = [A(s), X] \tag{2.4.4}$$

In particolare l'azione sui campi vettoriali di un gruppo ad un parametro $\phi(s)$ di diffeomorfismi ammette, in modo analogo a quanto avviene in dimensione finita, un generatore infinitesimale dato da $A \to [A, X]$.

3) Se $\psi(t)$ è il gruppo ad un parametro generato da A e Φ è un diffeomorfismo si ha che $\Phi \circ \psi(t) \circ \Phi^{-1}$ è un gruppo ad un parametro con generatore infinitesimale $T_\Phi \circ A \circ T_\Phi^{-1}$.

DIM. 1) Se A è un campo vettoriale e Φ un diffeomorfismo possiamo associare a Φ l'operatore sulle funzioni $T_\Phi(f)(x) := f(\Phi^{-1}x)$ e considerare il campo $T_\Phi \circ A \circ T_\Phi^{-1}$, è immediato che tale azione preserva la parentesi di Lie. Per definizione

$$(T_\Phi \circ A \circ T_\Phi^{-1})f = T_\Phi \circ A(T_\Phi^{-1} f) = A(f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$$

Puntualmente da 1.1.1:

$$(A(f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1})(x) = A(f \circ \Phi)(\Phi^{-1}x) = A_{\Phi^{-1}x}(f \circ \Phi) = d\Phi_{\Phi^{-1}x}(A_{\Phi^{-1}x})(f).$$

2) Se prendiamo $\Phi = \phi(s)$ abbiamo un campo variabile con il tempo $A(s) := T_{\phi(s)} \circ A \circ T_{\phi(s)}^{-1}$ e applicando la formula di Taylor vediamo che:

$$A(s)f = T_{\phi(s)} \circ A \circ T_{\phi(s)}^{-1} f = T_{\phi(s)} \circ A(f + sXf + O(s^2)) = T_{\phi(s)}(Af + sAXf) + O(s^2) =$$
$$= Af + sAXf - sX(Af + sAXf) + O(s^2) = (A + s[A, X])f + O(s^2)$$

si ottiene che

$$\frac{d}{ds} A(s)_{s=0} = [A, X], \quad A(0) = A.$$

Similmente

$$\frac{d}{ds} A(s)_{s=s_0} = \frac{d}{dt} A(s_0 + t)_{t=0} = [A(s_0), X]. \tag{2.4.5}$$

3) È chiaro che $\Phi \circ \psi(t) \circ \Phi^{-1}$ è un gruppo ad un parametro, sia B il suo generatore infinitesimale, in un punto x si ha che B_x è il trasformato di $\frac{d}{dt}$ tramite il differenziale in 0, della funzione $t \to \Phi \circ \psi(t) \circ \Phi^{-1}x$

$$B_x = d(\Phi \circ \psi(t)(\Phi^{-1}x))_{t=0} \frac{d}{dt} = d\Phi_{\Phi^{-1}x} \circ d(\psi(t)(\Phi^{-1}x))_{t=0} \frac{d}{dt} = d\Phi_{\Phi^{-1}x}(A_{\Phi^{-1}x}).$$

$\square$

Sia $\psi(s)$ un secondo gruppo ad un parametro generato da un campo vettoriale Y.

[7] fissato p si ha che $A(s)_p$ varia nello spazio vettoriale $T_p(M)$ quindi ha senso fare la derivata e definire $\frac{d\,A(s)}{ds}_p := \frac{d\,A(s)_p}{ds}$.

Teorema. *I due gruppi ad un parametro $\psi(s), \phi(t)$ commutano se e solo se $[X,Y]=0$.*

Dim. I due gruppi commutano se e solo se $\psi(s)\phi(t)\psi(s)^{-1} = \phi(t)$ per ogni t ed s. In altre parole, detto $X(s)$ is generatore del gruppo ad un parametro (in t) $\psi(s)\phi(t)\psi(s)^{-1}$ si ha che i due gruppi commutano se e solo se $X(s) = X$ per ogni s. Da 3) del Teorema precedente $X(s) = T_{\psi(s)} \circ X \circ T_{\psi(s)}^{-1}$ e da 2):

$$\frac{d}{ds}X(s) = [X(s), Y] \tag{2.4.6}$$

in particolare se i gruppi commutano $X(s)$ è costante e $[Y,X]=0$ viceversa se $[Y,X]=0$ si ha che $X(s)$ e X sono entrambe soluzioni della equazione differenziale 1.7.6 con la stessa condizione iniziale $X(0) = X$ a 0. Per l'unicità delle soluzioni $X(s) = X$, $\forall s$. Quindi $\psi(s)\phi(t)\psi(-s) = \phi(t)$ come richiesto.

ESERCIZIO Sia $i : N \to M$ una immersione e X un campo vettoriale su M, diremo che X è *tangente* ad N se esiste un campo vettoriale Y su N con la proprietà che, per ogni $p \in N$ si abbia:

$$di_p(Y_p) = X_{i(p)}.$$

Provare che se X è tangente a N, $p \in N$ e ϕ_t, ψ_t denotano i (germi di) gruppi ad un paramtro su N, M rispettivamente, generati da Y ed X si ha:

$$i(\phi_t(p)) = \psi_t(i(p)).$$

In altre parole, se il campo X è tangente ad N le evoluzioni dei punti di N si muovono in N, il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi di M generato da X preserva N ed induce su N il gruppo ad un parametro generato da Y.

In coordinate locali in cui localmente $i(N)$ è dato dall'annullarsi di $x_1, \ldots, x_k$ abbiamo che X è tangente ad N se e solo se è della forma

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0, \ \forall i \leq k$$

Sia X tangente ad N ed Y la sua restrizione, data una funzione f sia g la sua restrizione ad N si ha allora che Xf ristretta ad N coincide con Yg.

Esercizio 1) Se X è tangente ad N ed f è una funzione fX è tangente ad N .

2) X è tangente ad N se e solo se X è combinazione lineare, a coefficienti funzioni, dei campi

$$x_i\frac{\partial}{\partial x_j}, i,j \leq k, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}, \ j > k$$

3) Se $X_1 = \sum_{i=1}^n f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad X_2 = \sum_{i=1}^n g_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ sono tangenti ad N anche $[X_1, X_2]$ è tangente ad N, inoltre se Y_i, $i = 1, 2$ è la restrizione di X_i ad N abbiamo che $[Y_1, Y_2]$ è la restrizione di $[X_1, X_2]$ ad N.

Finalmente osserviamo la separazione delle variabili. Siano M, N due varietà differenziabili e consideriamo $M \times N$, in un punto (p, q) si ha $T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \oplus T_qN$.

Dati due campi vettoriali X, Y su M, N rispettivamente possiamo definire un campo Z su $M \times N$ con $Z_{p,q} = X_p \oplus Y_q$ allora in coordinate si vede immedatamente che, detti ϕ_t, ψ_t le evoluzioni definite da X, Y su M, N rispettivamente si ha che la evoluzione definita da Z si separa come:

$$(p, q) \to (\phi_t(p), \psi_t(q)).$$

§3 Distribuzioni e Teorema di Frobenius

NOTA Discutiamo le distribuzioni integrabili.

3.1 Distribuzioni e Teorema di Frobenius

Come primo passo studiamo cosa avviene in presenza di campi vettoriali che commutano:

PROPOSIZIONE. *Dati k campi vettoriali $Y_1, \dots, Y_k$ su una varietà M che commutano, ovvero $[Y_i, Y_j] = 0$, se p è un punto di M in cui i valori dei campi Y_i sono vettori linearmente indipendenti esiste un sistema di coordinate $x_1, \dots, x_n$ in un intorno di p in cui si ha $Y_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.*

DIM. Prendiamo prima di tutto un sistema di coordinate locali y_i intorno a p per cui $p = (0, 0, \dots, 0)$ e nel punto p i vettori $(Y_i)_0 = \dfrac{\partial}{\partial y_i}$. Poniamo $\phi_i(t)$ il gruppo ad un parametro generato da Y_i, le ipotesi fatte sugli Y_i implicano che tali gruppi ad 1-parametro commutano.

Prendiamo ora la seguente applicazione definita in un intorno abbastanza piccolo di 0 in $\mathbb{R}^n$:

$$\Psi : (x_1, x_2, \dots, x_n) \to (y_1, \dots, y_n) := \phi_1(x_1) \circ \phi_2(x_2) \circ \dots \phi_k(x_k)(0, 0, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_n)$$

ne calcoliamo lo Jacobiano in 0 e vediamo che risulta una matrice del tipo a blocchi

$$\begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ M & 1_{n-k} \end{pmatrix}$$

Dunque Ψ definisce un sistema di coordinate in un intorno di p ed inoltre, dalla proprietà di commutazione dei ϕ_i:

$$\phi_i(t) \circ \phi_1(x_1) \circ \phi_2(x_2) \circ \dots \phi_k(x_k) = \phi_1(x_1) \circ \phi_2(x_2) \circ \dots \circ \phi_i(x_i + t) \circ \dots \phi_k(x_k)$$

In questo diffeomorfismo il gruppo delle traslazioni della $i-$esima coordinata $x_i + t,\ i \leq k$ corrisponde al gruppo $\phi_i(t)$ ne segue che nelle nuove coordinate x_i i campi Y_i si identificano ai campi $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. $\square$

Per prepararci alla teoria dei gruppi di Lie dobbiamo passare attraverso una idea geometrica importante, quella di *foliazione* di una varietà.

DEFINIZIONE. *Una foliazione regolare di una varietà M con foglie di codimensione k è una decomposizione di M come unione disgiunta di sottovarietà immerse N_α di codimensione k.*

Nella definizione non si assume, ed in generale non sarà vero, che le foglie siano chiuse. L'esempio più semplice di foliazione di codimensione $n-1$ ($\dim M = n$) è la foliazione data dalle curve di evoluzione di un gruppo ad un parametro se assumiamo che il campo vettoriale X non sia mai nullo, e quindi non ci siano punti fissi (altrimenti dobbiamo ammettere foglie di dimensione 0).

Per passare al caso generale le idee sono le seguenti. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n preso un numero $k \leq n$ per ogni punto $p \in M$ consideriamo l'insieme dei sottospazi vettoriali $k-$dimensionali dello spazio tangente $T_p(M)$ chiamiamo tale insieme $G_{k,p}$. Non è difficile provare le seguenti asserzioni (si confronti l'esempio 3) del §1).

(1) $G_{k,p}$ è una varietà differenziabile, per semplicità C^∞, di dimensione $k(n-k)$, l'unione $G_k(M) := \cup_{p\in M} G_{k,p}$ è in modo naturale una varietà differenziabile che si fibra $p : G_k(M) \to M$ come fibrato localmente banale di fibra $G_{k,p}$ su M.

(2) Una sezione C^∞ $s : M \to G_k(M)$ localmente è sempre data da k campi vettoriali $X_i,\ i = 1, \ldots, k$ che in ogni punto p dell'aperto su cui sono definiti, danno una base $X_i(p)$ dello spazio $s(p) \in G_{k,p}$.

    Una tale sezione è detta una $k-$*distribuzione* su M.

(3) Un campo vettoriale X è detto tangente ad una distribuzione s se $X(p) \in s(p)$ per ogni p.

Ricordiamo che, se N è una varietà k dimensionale, una immersione di N in M è un morfismo iniettivo $i : N \to M$ con differenziale di iniettivo in ogni punto.

Per abuso di linguaggio si dice che $i(N)$ è una sottovarietà immersa in M.

Data una tale immersione, per ipotesi, per ogni $n \in N$ si ha che $Im(di_p)$ è un sottospazio di dimensione k di $T_{i(p)}(M)$.

La complessità geometrica possibile nel concetto di immersione si vede prendendo ad esempio la immersione di $\mathbb{R}$ in un toro $n-$dimensionale $r \to (exp(ra_1\sqrt{-1}), \ldots, exp(ra_n\sqrt{-1})$ (l'ipotesi è che gli a_i non sono tutti nulli. È un noto fatto che se i numeri a_i sono linearmente indipendenti sui numeri razionali l'immagine di tale curva è densa nel toro.

In generale il fenomeno è il medesimo, una immersione i è un omeomorfism sull'immagine solo localmente ma non necessariamente globalmente ed $i(N)$ non è in genere localmente chiusa.

DEFINIZIONE. Una immersione $i : N \to M$ è tangente ad una distribuzione $s : M \to G_k(M)$ se per ogni $n \in N$ si ha $Im(di_p) = s(i(p))$. Ovvero lo spazio tangente ad $i(N)$ in ogni suo punto è lo spazio della distribuzione data.

Una distribuzione s si dice integrabile se, dato comunque un punto $m \in M$ esiste un intorno di p con coordinate x_i tale che le varietà di livello $x_{k+1} = a_1, \ldots, x_n = a_n$ sono tangenti alla distribuzione. Ovvero i campi $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, k$ sono una base dei sottopazi della distribuzione.

Diremo che le x_i sono *coordinate adattate* alla distribuzione.

OSSERVAZIONE Data una distribuzione da k campi vettoriali X_i, in coordinate adattate le funzioni a_i soddisfano le equazioni differenziali $X_i(a_j) = 0$.

ESERCIZO L'esistenza di $n-k$ soluzioni indipendenti alle precedenti equazioni differenziali implica l'esistenza di coordinate adattate.

LEMMA DI FROBENIUS. *Una distribuzione è integrabile se e solo se valgono le due condizioni equivalenti:*

(1) *Esiste un ricoprimento di aperti U_i e su ogni U_i, k campi vettoriali X_i che generino in ogni punto lo spazio della distribuzione s e tali che $[X_i, X_j] = \sum_l f^l_{i,j} X_l$ con $f^l_{i,j}$ funzioni C^∞.*

(2) *Per ogni aperto U l'insieme dei campi vettoriali (C^∞) tangenti ad s in U è una sottoalgebra di Lie dei campi vettoriali su U.*

DIM. In un sistema di coordinate adattate ad una distribuzione integrabile i campi vettoriali tangenti sono i campi $\sum_{i=1}^k f_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ per cui le due condizioni del lemma sono verificate. Possiamo prendere $X_i := \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Viceversa verifichiamo solo che se vale la prima condizione la distribuzione è integrabile. Prendiamo un punto p ed una base X_i campi di vettori in un intorno di U che verifichino le condizioni precedenti.

Scegliamo coordinate y_i e scriviamo $X_i := \sum_{j=1}^n f_{ij}\dfrac{\partial}{\partial y_j}$.

Poiché i vettori X_i sono linearmente indipendenti in p a meno di riordinare le coordinate possiamo supporre che in p il determinante della matrice $F(p) := (f_{ij}(p))|i, j = 1. \ldots, k$ è non nullo. Pertanto in tutto un intorno tale determinante è ancora non nullo e tale matrice si può invertire. Definiamo nuovi campi vettoriali Y_i in tale intorno dalla formula matriciale

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ \ldots \\ Y_k \end{vmatrix} := F(y)^{-1} \begin{vmatrix} X_1 \\ \ldots \\ X_k \end{vmatrix}.$$

I campi Y_i sono una nuova base degli spazi della distribuzione in un intorno di p, Per costruzione $Y_i = \dfrac{\partial}{\partial y_i} + \Delta_i,\ \Delta_i = \sum_{j=k+1}^n g_{ij} \dfrac{\partial}{\partial y_j}$.

Per ipotesi $[Y_i, Y_j] = \sum_{h=1}^k u_{i,j}^h Y_h$, ma osserviamo due cose:

1) Dalla formula esplicita degli Y_i i commutatori $[Y_i, Y_j]$ sono combinazioni lineari dei campi $\dfrac{\partial}{\partial y_s},\ s = k+1, \ldots, n$.

2) Per ogni i, j, h si ha che $u_{i,j}^h$ è il coefficiente di $\dfrac{\partial}{\partial y_h}$ in $[Y_i, Y_j]$.

Da queste due osservazioni segue che tutti i coeficienti $u_{i,j}^h$ sono 0 e che i campi Y_i commutano. A questo punto possiamo applicare la Proposizione precedente. $\square$

Ora possiamo globalizzare il Teorema.

Teorema di Frobenius. *Se s è una distribuzione integrabile, per ogni $p \in M$ passa una unica sottovarietà connessa immersa tangente a p e massimale, tali varietà sono dette le foglie della distribuzione e decompongono M secondo una foliazione.*

Dim. Siano $i : N \to M,\ j : L \to M$ due varietà immerse tangenti ad s proviamo tre fatti.

(1) a) L' insieme $U_N := \{n \in N | i(n) \in j(L)$ é aperto in N e similmente per $U_L := \{x \in L | j(x) \in i(N)\}$.
(2) b) L'applicazione $j^{-1} \circ i : U_N \to U_L$ è un diffeomorfismo.
(3) c) Il grafico di $j^{-1} \circ i$ è una sottovarietà chiusa di $N \times L$.

Tali proprietà ci permettomno di definire una relazione di equivalenza ovvero una serie di incollamenti sulla unione disgiunta di tutte le varietà immerse tangenti, ponendo $n \cong x$, se e solo se $i(n) = j(x)$ (notazioni precedenti).

Si verifica facilmente che le componenti connesse di questa relazione di equivalenza sono varietà di dimensione k che si immergono in foglie massimali in M.

La sola cosa che necessita un minimo di cura è di provare che ogni tale componente connessa è una unione finita o numerabile di carte locali. Per questo basta provare che se si intersecano due carte con coordinate adattate una varietà di livello dell'una interseca una famiglia discreta di varietà di livello dell'altra carta.

Sia data una carta locale U che decomponiamo $U = A \times B$ con $A = \{(x_1, \ldots, x_k),\ |x_i| < 1\}$ e $B\{(a_{k+1}, \ldots, a_n),\ |a_i| < 1$, le varietà di livello sono date dai parametri a_i consideriamo il sottoinsieme chiuso $N := (0, \ldots, 0, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ trasversale alle varietà di livello.

Sia V a un'altra carta con coordinate adattate e una varietà di livello $M \subset V$. Per costruzione M è chiusa e quindi $M \cap U$ è un insieme chiuso unione di varietà di livello connesse in $V \cap U$. Si verifica immediatamente poiché localmente la varietà di livello per un punto è univocamente determinata che $M \cap N$ è un insieme discreto. Poiché gli insiemi discreti di $\mathbb{R}^{n-k}$ sono numerabili coprendo con una famiglia numerabile di carte con coordinate adattate il Teorema segue. $\square$

ESERCIZO Ridimostrare il teorema come segue: definire in M una nuova topologia (più forte), in cui sono *aperti* tutti gli insiemi $i(N)$ per $i : N \to M$ una immersione tangente alla distribuzione. Provare che le foglie sono le componenti connesse di questa topologia.

Vi è una proprietà universale delle distribuzioni integrabili che vogliamo mettere in evidenza. Data una distribuzione W_p ed una funzione $f : P \to M$ C^∞ da una varietà differenziablile P in M diremo che f è tangente alla distribuzione se, per ogni $q \in P$ si ha $df_q(T_q(P)) \subset T_{f(q)}(M)$.

PROPOSIZIONE. *Se P è connessa f è tangente ad una distribuzione integrabile se e solo se si fattorizza tramite una mappa C^∞ in una foglia della distribuzione.*

DIM. In un verso è ovvio, se f si fattorizza, vediamo il viceversa. Sia U un aperto con coordinate adattate $x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_h$ in cui la distribuzione è data dai $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, e consideriamo prima di tutto la restrizione di f ad una componente connessa P_0 di $f^{-1}(U)$. Consideriamo i differenziali du_i affermo che $f^*(du_i) = 0$, $\forall i$. Infatti per definizione dato un vettore tangente v in un punto p di $f^{-1}(U)$ si ha:

$$\langle f^*(du_i)_p \,|\, v\rangle = \langle (du_i)_{f(p)} \,|\, df_p(v)\rangle = 0$$

in quanto per ipotesi $df_p(v)$ è nel sottospazio generato dai vettori $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ortogonale alle forme du_i. Ne segue che $u_i \circ f$ sono funzioni costanti su P_0 e pertanto f manda P_0 in una foglia di U. Ora dallo stesso ragionamento segue che, se N è una foglia massimale $f^{-1}(N)$ è aperto in P. Essendo le foglie massimali un ricoprimento di M in insiemi disgiunti ne otteniamo un ricoprimento aperto in insiemi disgiunti di P, essendo P connesso $f(P)$ è contenuto in una unica foglia massimale. $\square$

§4 Calcolo esterno

NOTA Discutiamo il calcolo delle forme esterne di Cartan.

4.1 Calcolo differenziale A partire da un fibrato vettoriale V su una varietà M se ne possono costruire altri ad esempio i fibrati tensoriali $V^{\otimes m}$, $\wedge^k(V)$ che hanno come fibre le potenze tensoriali o esterne delle fibre di V.

Particolare importanza hanno i fasci delle sezioni dei fibrati $\wedge^k(T^*(M))$, $k = 0, \ldots, n = dim(M)$ si indica con $\mathcal{E}^k(U)$ lo spazio delle sezioni C^∞ di $\wedge^k(T^*(M))$ su un aperto U, gli elementi di $\mathcal{E}^k(U)$ vengono dette $k-$forme differenziali esterne su U. Se U ha coordinate x_i allora su U una $k-$forma si esprime come

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1, i_2, \ldots, i_k}(x_1, \ldots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

con $f_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ funzioni C^∞.

Per $k=0$ si ha che $\wedge^k(T^*(M)) = M \times \mathbb{R}$ e $\mathcal{E}^0(U) = C^\infty(M)$.

Le proprietà fondamentali di tali forme sono prima di tutto quelle di essere una *algebra differenziale graduata.*

1. La struttura di algebra ossia il prodotto $\wedge$ (detto *wedge*) è dato dal prodotto nell'algebra esterna. Il prodotto è bilineare associativo e *commutativo in senso graduato*

$$\phi \wedge \psi = (-1)^{hk}\psi \wedge \phi,\ \phi \in \mathcal{E}^h(U),\ \psi \in \mathcal{E}^k(U).$$

2. Il differenziale $d : \mathcal{E}^k(U) \to \mathcal{E}^{k+1}(U)$ è caratterizzato dalle seguenti proprietà.

$$d(f) := d,\ f \in C^\infty(M);\ d \circ d = 0,\ d(\phi \wedge \psi) = d(\phi) \wedge \psi + (-1)^h \phi \wedge d(\psi), \phi \in \mathcal{E}^h(U).$$

In coordinate

$$d \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} f_{i_1,i_2,\dots,i_k}(x_1,\dots,x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =$$
$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} df_{i_1,i_2,\dots,i_k}(x_1,\dots,x_n) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Indichiamo con $\mathcal{E}(U) := \oplus_{k=0}^n \mathcal{E}^k(U)$ l'algebra delle forme su U.

Dato un morfismo $f : M \to N$ il morfismo $f^* : \mathcal{E}^1(U) \to \mathcal{E}^1(f^{-1}U), \forall U \subset N$ ed U aperto si estende ad un morfismo di algebre differenziali graduate.

$$\wedge f^* : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(f^{-1}U)$$

Definizione. Un morfismo di algebre differenziali graduate è un omomorfismo che preserva il grado e commuta con il differenziale.

Gli altri punti salienti del calcolo differenziale sono, l'integrazione delle forme, il lemma di Poincaré ed il teorema di Stokes.

Osservazione. Vi è una semplice relazione fra prodotto di Lie e differenziale delle forme. si ψ una 1-forma differenziale e X, Y due campi vettoriali, $d\psi$ è una due forma e quindi possiamo calcolarla, si prova subito che[8]:

$$\langle \psi | [X,Y] \rangle = -\langle d\psi \,|\, X \wedge Y \rangle + X(\langle \psi \,|\, Y \rangle) - Y(\langle \psi \,|\, X \rangle) \tag{4.1.1}$$

Il formalismo si completa con la nozione di *derivata di Lie* L_X, associata ad un campo vettoriale X, un operatore su funzioni forme campi etc, che ne determina infinitesimalmente la evoluzione rispetto al gruppo ad 1 parametro generato da X.

[8] se non si vogliono fare i calcoli espliciti si può osservare, con semplici manipolazioni, che se la formula è vera per dati ψ, X, Y è anche vera moltiplicando uno dei tre per una funzione, ci si riduce allora a campi vettoriali e forme del tipo $\frac{\partial}{\partial x_i}, dx_j$ per cui è banale.

Dato un campo vettoriale X per definizione la derivata di Lie di X applicata ad una funzione f è $X(f)$. La derivata di Lie di X applicata ad un campo vettoriale Y è $[X,Y]$ e fi

Dato un campo vettoriale X ed una 1-forma ψ possiamo definire implicitamente la derivata di Lie $L_X\psi$ dalla equazione

$$X(\langle\psi\,|\,Y\rangle) = L_X(\langle\psi\,|\,Y\rangle) = \langle L_X\psi\,|\,Y\rangle + \langle\psi\,|\,L_XY\rangle = \langle L_X\psi\,|\,Y\rangle + \langle\psi\,|\,[X,Y]\rangle. \tag{4.1.2}$$

Vedremo il significato di tutte queste formule nel formalismo della teoria delle rappresentazioni.

4.2 Integrazione Data una varietà differenziabile M di dimensione n essa si dice orientabile se il fibrato $\wedge^n T(M)$ è banale, il che avviene quando esiste una famiglia di carte per cui le matrici Jacobiane dei cambiamenti di coordinate hanno tutte determinante positivo. In tal caso, data una forma $\psi \in \mathcal{E}^n(M)$ a supporto compatto se ne può definire l'integrale su M, $\int_M \psi$.

Essenzialmente se ψ ha supporto in una carta (orientata come la varietà) e quindi in coordinate $\psi = f(x_1,\dots,x_n)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ si definisce l'integrale usando l'usuale misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ ovvero

$$\int_M \psi := \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_n)dx_1 \dots dx_n$$

Il teorema sul cambiamento di coordinate degli integrali multipli assicura che la definizione non dipende dalle coordinate.

In generale si usa il metodo della partizione dell'unità.

Si prende un ricoprimento aperto U_i e per cui ogni U_i abbia una carta coordinata e che sia *localmente finito.*

Si costruiscono funzioni C^∞, $f_i : M \to [0,1]$ con f_i a supporto compatto in U_i e $\sum_i f_i = 1$.

Questa è una partizione dell'unità.

Finalmente si pone $\int_M \psi := \sum_i \int_{U_i} f_i\psi$ e si verifica che è indipendente dalla partizione dell'unità.

Il valore intrinseco di tale costruzione è dato dal seguente semplice.

Lemma. *Se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo allora*

$$\int_M f^*(\psi) = \int_N \psi.$$

A partire da una $n-$forma ψ possiamo definire una misura su M integrando $\int_M f(x)\psi$.