——— Esercizi tutorato - 20/12/2005 ——-

In állegato trovate gli esercizi per le vacanze. Se trovate degli errori di battitura segnalateli via e-mail cosí li correggo. Gli esercizi possono anche essere trovati all'indirizzo:

http://www.mat.uniroma1.it/~fabbri/tutorato/happychristmastutorato.pdf

Ex. 1

Si consideri l'applicazione $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ che mappa il vettore $(i,2,0)$ in $2(i,2,0)$, il vettore $(0,1,1)$ in $i(0,1,1)$ e il vettore $(0,0,i)$ in $-(0,0,i)$. scrivere la matrice dell'applicazione rispetto alla base $\mathbb{F} = \{(1,1,1),(0,1,i),(0,0,i)\}$

[Nota: l'esercizio é un (bel) po' noioso da svolgere: usare se servono i seguenti conti giá fatti da Matlab: (magari calcolare una delle inverse per accertarsi di ricordarsi come si fa)

$$B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 2i & 1 & 0 \\ -2 & i & -i \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & i & i \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ (1+i) & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$C^{-1}B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 2-i & 1 & 0 \\ -3+i & -1-i & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}C = (C^{-1}B)^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 1+2i & 1 & 0 \\ -2 & 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

Ex. 2

E' possibile diagonalizzare la matrice A seguente?

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(diagonalizzare significa trovare una base dello spazio formato da autovettori per A).

Ex. 3

Sia T un'endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Siano $\lambda_1, ..., \lambda_n$ autovalori **distinti** di T. Sia v_1 un autovettore relativo all'autovalore λ_1, v_2 un autovettore relativo all'autovalore λ_2 e cosí via (cioé in breve $Tv_i = \lambda_i v_i$). Dimostrare che i vettori v_i sono linearmente indipendenti.

[suggerimento: procedere per assurdo: se i v_i non sono linearmente indipendenti allora esiste un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti. A meno di riordinarli possiamo assumere siano i primi $k < n$: $v_1, ..., v_k$. Essi generano $v_{k+1}, ..., v_n$ (altrimenti il sottoinsieme non sarebbe massimale). per tanto...]

Ex. 4

Scrivere in fattori di primo grado il polinomio caratteristico della matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & 0 & 0 \\ 3i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Senza svolgere conti, utilizzando l'esercizio 3 e il fatto che *per ogni radice del polinomio caratteristico esiste almeno un autovettore che ha tale radice come autovalore* mostrare che la matrice A si puó diagonalizzare.